und somit (e), denn lokal lässt sich jedes Element in $\Omega^*(M; E \otimes F)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\sigma \wedge \tau$ wie oben schreiben. $\square$

II.4.3. Proposition. *Die Krümmung misst, wie weit der horizontale Lift aus Bemerkung II.3.9, $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(E)$, $X \mapsto \tilde{X}$, davon abweicht ein Lie Algebra Homomorphismus zu sein,*

$$R_{X,Y}e = \big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big)(e) \in V_eE = E_x, \tag{II.32}$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $e \in E_x$, $x \in M$.

Beweis. Es bezeichne $\tilde{\nabla} := p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf dem Vektorbündel p^*E über E. Wir erinnern uns an die vertikale Projektion $P = \tilde{\nabla}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; p^*E) = \Omega^1(M; VE)$, wobei $\mathbf{x} \in \Gamma(p^*E)$ die identische Abbildung bezeichnet. Mit Proposition II.4.2(b) folgt $d^{\tilde{\nabla}}P = d^{\tilde{\nabla}}d^{\tilde{\nabla}}\mathbf{x} = R^{\tilde{\nabla}}\mathbf{x} = (p^*R)\mathbf{x}$ und daher

$$P\big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big) = (d^{\tilde{\nabla}}P)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = p^*(R_{X,Y})\mathbf{x}, \tag{II.33}$$

denn $P(\widetilde{[X,Y]}) = 0$ und $P(\tilde{X}) = 0 = P(\tilde{Y})$, siehe auch (II.27). Beachte weiters

$$Tp\big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big) = 0, \tag{II.34}$$

denn $p \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} = \mathrm{Fl}_t^X \circ p$, also $Tp \circ T\,\mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} = T\,\mathrm{Fl}_t^X \circ Tp$, somit

$$\begin{aligned}
Tp \circ ((\mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}})^*\tilde{Y}) &= Tp \circ (T\,\mathrm{Fl}_{-t}^{\tilde{X}} \circ \tilde{Y} \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}}) \\
&= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Tp \circ \tilde{Y} \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} \\
&= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ p \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} \\
&= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X \circ p = (\mathrm{Fl}_t^X)^*Y \circ p
\end{aligned}$$

und Ableiten bei $t = 0$ gibt $Tp \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y] \circ p$, siehe [**3**, Abschnitt 2.15]. Aus (II.33) und (II.34) folgt

$$\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = p^*(R_{X,Y})\mathbf{x}$$

und Auswerten bei $e \in E$ liefert dann (II.32). $\square$

II.4.4. Proposition. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E. Weiters sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Ursprungs, $h : U \to M$ eine glatte Abbildung, $z := h(0,0)$, $X := \frac{\partial}{\partial x}h(0,0) \in T_zM$ und $Y := \frac{\partial}{\partial y}h(0,0) \in T_zM$. Für hinreichend kleines $t > 0$ ist daher*

$$P_t : E_z \to E_z, \quad P_t := \mathrm{pt}_{0,t}^{h(0,-)} \circ \mathrm{pt}_{0,t}^{h(-,t)} \circ \mathrm{pt}_{t,0}^{h(t,-)} \circ \mathrm{pt}_{t,0}^{h(-,0)},$$

wohldefiniert und glatt in t. In dieser Situation gilt nun

$$P_0 = \mathrm{id}_{E_z}, \quad \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 P_t = 0 \quad \textit{und} \quad \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}|_0 P_t = R_{Y,X}.$$

Beweis. Durch Betrachten von h^*E und $h^*\nabla$ dürfen wir o.B.d.A. $M = U$ und $h = \mathrm{id}_U$ annehmen, siehe auch Proposition II.4.2(b). Durch Verkleinern von U dürfen wir weiters $E = U \times E_0$ annehmen, wobei E_0 die Faser über $0 = z$ bezeichnet. Die Konnexion lässt sich daher in der Form $\nabla = d + A$ schreiben, $A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(E_0))$. Trivilisieren wir E mittels Paralleltransport zuerst längst der y-Achse und dann längs Geraden parallel zur x-Achse, so können wir weiters $A(\frac{\partial}{\partial x}) = 0$ und $A(\frac{\partial}{\partial y})(0, y) = 0$ erreichen, dh. $\nabla = d + ady$ wobei $a := A(\frac{\partial}{\partial y}) \in C^\infty(U; \mathrm{end}(E_0))$ und $a(0, y) = 0$. Aus Proposition II.4.2(b) erhalten wir

$$\begin{aligned} R(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}) &= (dA + A \wedge A)(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x} A(\tfrac{\partial}{\partial y}) - \tfrac{\partial}{\partial y} A(\tfrac{\partial}{\partial x}) - A([\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}]) + A(\tfrac{\partial}{\partial x})A(\tfrac{\partial}{\partial y}) - A(\tfrac{\partial}{\partial y})A(\tfrac{\partial}{\partial x}) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x} A(\tfrac{\partial}{\partial y}) = \tfrac{\partial}{\partial x} a \end{aligned}$$

und somit

$$R_{X,Y} = \tfrac{\partial}{\partial x} a(0,0). \tag{II.35}$$

Sei nun $v_0 \in E_0$, und definiere $v \in C^\infty(U, E_z)$ durch $v(x, 0) = v_0$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} v = 0$, dh. $\frac{\partial}{\partial y} v + av = 0$. Es gilt daher

$$P_t(v_0) = v(t,t). \tag{II.36}$$

Da $v(x, 0) = v_0 = v(0, y)$ folgt $v(0, 0) = v_0$, $\frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} v(0, y) = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} v(0, y) = 0$, und aus $\frac{\partial}{\partial y} v(x, 0) + a(x, 0)v_0 = 0$ erhalten wir $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v(x, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} a(x, 0)v_0$. Zusammenfassend erhalten wir, siehe auch (II.35):

$$\begin{array}{lll} v(0,0) = v_0 & \tfrac{\partial}{\partial x} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial}{\partial y} v(0,0) = 0 \\ \tfrac{\partial^2}{\partial x^2} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial^2}{\partial y^2} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} v(0,0) = R_{Y,X} v_0 \end{array}$$

Zusammen mit (II.36) ergibt sich

$$P_0(v_0) = v_0, \quad \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 P_t(v_0) = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}|_0 P_t(v_0) = 2R_{Y,X} v_0,$$

und somit die Behauptung der Proposition. □

II.4.5. Satz (Satz von Frobenius). *Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $H \subseteq TM$ ein Teilbündel vom Rang k. In dieser Situation sind äquivalent:*

(a) H ist involutiv, *dh. für alle $X, Y \in \Gamma(H) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ gilt auch $[X, Y] \in \Gamma(H)$.*

(b) Um jeden Punkt in M existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k}$ einen Rahmen von $H|_U$ bildet.

In dieser Situation wird das Teilbündel integrabel *genannt. Durch jeden Punkt $x \in M$ existiert daher eine (lokale)* Integralmannigfaltigkeit *S maximaler Dimension, dh. $S \subseteq M$ ist eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, $x \in S$ und $TS = H|_S$, nämlich $S = \{u^i = \mathrm{const}, k < i\}$ bezüglich der Koordinaten in (b).*

BEWEIS. Die Implikation (b)⇒(a) ist offensichtlich. Bilden die Koordinatenvektorfeder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k}$ einen Rahmen von $H|_U$, und sind $X, Y \in \Gamma(H)$ zwei beliebige Schnitte, dann existieren $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$ mit $X|_U = X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y|_U = Y^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + Y^k \frac{\partial}{\partial u^k}$. Da die Koordinatenvektorfelder kommutieren folgt

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{k} X^i Y^j \underbrace{[\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}]}_{=0} + X^i \tfrac{\partial Y^j}{\partial u^i} \tfrac{\partial}{\partial u^j} - \tfrac{\partial X^i}{\partial u^j} Y^j \tfrac{\partial}{\partial u^i}$$

und somit $[X, Y]|_U \in \Gamma(H|_U)$. Für die umgekehrte Implikation (a)⇒(b) sei nun $x_0 \in M$ und $M \supseteq V \xrightarrow{v} \mathbb{R}^n$ eine Karte um x, sodass $\frac{\partial}{\partial v^1}(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial v^k}(x_0)$ eine Basis von H_{x_0} bilden. Durch Verkleinern von V können wir weiters erreichen, dass Funktionen $f_i^l \in C^\infty(V)$ existieren, sodass die Vektorfelder

$$X_i = \tfrac{\partial}{\partial v^i} + \sum_{l=k+1}^{n} f_i^l \tfrac{\partial}{\partial v^l}, \qquad 1 \le i \le k,$$

tangential an H sind, dh. $X_i \in \Gamma(H|_V) \subseteq \mathfrak{X}(V)$. Die Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ bilden daher einen Rahmen von $H|_V$. Für ihre Lie Klammern folgt

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=k+1}^{n} \big(\tfrac{\partial}{\partial v^i} \cdot f_j^l - \tfrac{\partial}{\partial v^j} \cdot f_i^l\big) \tfrac{\partial}{\partial v^l} \tag{II.37}$$

Wegen der Involutivität von H ist auch $[X_i, X_j]$ tangential an H, also existieren Funktionen $h_{i,j}^p \in C^\infty(V)$, sodass

$$[X_i, X_j] = \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p X_p = \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p \tfrac{\partial}{\partial v^p} + \sum_{l=k+1}^{n} \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p f_p^l \tfrac{\partial}{\partial v^l}.$$

Koeffizientenvergleich mit (II.37) liefert $h_{i,j}^p = 0$, also $[X_i, X_j] = 0$. Nach [**3**, Abschnitt 2.15] kommutieren daher die Flüsse dieser Vektorfelder, dh.

$$\mathrm{Fl}_t^{X_i}(\mathrm{Fl}_s^{X_j}(x)) = \mathrm{Fl}_s^{X_j}(\mathrm{Fl}_t^{X_i}(x)), \qquad 1 \le i, j \le k, \tag{II.38}$$

wenn immer beide Seiten definiert sind, $x \in V$, $t, s \in \mathbb{R}$. Für $k < i \le n$ setzen wir $X_i := \frac{\partial}{\partial v^i}$. Betrachte nun die lokal um $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte glatte Abbildung

$$\mathbb{R}^n \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^n \xrightarrow{w} M, \qquad w(t_1, \dots, t_n) := (\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_n}^{X_n})(x_0).$$

Offensichtlich gilt $w(0) = x_0$ und die Tangentialabbildung $T_0 w$ ist ein linearer Isomorphismus. Durch Verkleinern von ε können wir also erreichen, dass w ein Diffeomorphismus auf sein Bild wird. Die Umkehrabbildung $u := w^{-1}$ bildet daher eine Karte von M. Für $|t_j| < \varepsilon$ gilt

$$\tfrac{\partial}{\partial u^1}(u^{-1}(t_1, \dots, t_n)) = X_1\big((\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_n}^{X_n})(x_0)\big),$$

also ist das Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial u^1}$ tangential an H. Aufgrund von (II.38) können wir w auch in der Form

$$w(t_1,\dots,t_n)=\big(\mathrm{Fl}^{X_i}_{t_i}\circ\mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1}\circ\cdots\circ\mathrm{Fl}^{X_{i-1}}_{t_{i-1}}\circ\mathrm{Fl}^{X_{i+1}}_{t_{i+1}}\circ\cdots\circ\mathrm{Fl}^{X_n}_{t_n}\big)(x_0)$$

schreiben und das obige Argument zeigt dann, dass auch $\frac{\partial}{\partial u^i}$ tangential an H ist, $1\leq i\leq k$. Also bilden $\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^k}$ einen lokalen Rahmen von H. □

II.4.6. Satz. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E mit Krümmung $R\in\Omega^2(M;\mathrm{end}(E))$ und horizontalem Bündel $H\subseteq TE$. In dieser Situation sind äquivalent:*

(a) $R=0$.
(b) $d^\nabla d^\nabla=0$.
(c) Der horizontale Lift $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(E)$, $X\mapsto\tilde X$, siehe Bemerkung (II.3.9)*, ist ein Lie Algebra Homomorphsimus, dh.* $\widetilde{[X,Y]}=[\tilde X,\tilde Y]$ *für alle* $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.
(d) Das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ ist integrabel.
(e) Um jeden Punkt in M existiert ein lokaler Rahmen $s_1,\dots,s_k\in\Gamma(E|_U)$ paralleler Schnitte, $\nabla s_i=0$.
(f) Um jeden Punkt in M existiert eine Vektorbündelkarte $E|_U\cong U\times V$, sodass $\nabla^{E|_U}$ mit der trivialen Konnexion dieser Karte übereinstimmt, siehe Beispiel II.3.1.
(g) Der Paralleltransport $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}:E_{c(t_0)}\to E_{c(t_1)}$ hängt nur von der Homotopieklasse relativ Endpunkten der Kurve c ab, dh. ist $h:I\times[0,1]\to M$ glatt und $h(t_0,s)=x$, $h(t_1,s)=y$ für alle $s\in[0,1]$, dann gilt $\mathrm{pt}^{c_0}_{t_1,t_0}=\mathrm{pt}^{c_1}_{t_1,t_0}:E_x\to E_y$, wobei $c_0,c_1:I\to M$ die Kurven $c_0(t):=h(t,0)$ und $c_1(t):=h(t,1)$ bezeichnen.

Sind diese äquivalenten Eigenschaften erfüllt, dann wird ∇ flach *genannt.*

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt aus (II.31) und (II.28). Die Äquivalenz (a)⇔(c) folgt aus (II.32). Ist der horizontale Lift ein Lie Algebra Homomorphismus, dann ist das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ involutiv. Ist nämlich $X_1\dots,X_n\in\mathfrak{X}(U)$ ein lokaler Rahmen von TM, dann bilden $\tilde X_1,\dots,\tilde X_n\in\Gamma(H|_{p^{-1}(U)})$ einen Rahmen von $H|_{p^{-1}(U)}$ und für beliebige Schnitte $\xi=\xi^1\tilde X_1+\cdots+\xi^n\tilde X_n$, $\zeta=\zeta^1\tilde X_1+\cdots+\zeta^n\tilde X_n$ von $H|_{p^{-1}(U)}$, $\xi^i,\zeta^i\in C^\infty(p^{-1}(U))$, folgt, siehe [**3**, Abschnitt 2.14],

$$[\xi,\zeta]=\sum_{i,j=1}^k\xi^i\zeta^j[\tilde X_i,\tilde X_j]+\xi^i(\tilde X_i\cdot\zeta^j)\tilde X_j-(\tilde X_j\cdot\xi^i)\zeta^j\tilde X_i,$$

also hat auch $[\xi,\zeta]$ Werte im horizontalen Bündel. Die Implikation (c)⇒(d) folgt nun aus Satz II.4.5 oben.

Ist das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ integrabel und $e\in E_x$, dann existiert eine Teilmannigfaltigkeit $S\subseteq E$ mit $e\in S$ und $TS=H|_S$. Die Einschränkung der Projektion $p|_S:S\to M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, denn ihre Tangentialabbildung ist ein Isomorphismus, $T_e(p|_S):T_eS=H_e\cong T_xM$. Es existiert daher eine lokale Umkehrabbildung $s : U \to S$, $p \circ s = \mathrm{id}_U$, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von x, dh. $s \in \Gamma(E|_U)$ und $s(x) = e$. Da die Tangentialabbildung Ts Werte im horizontalen Bündel $H = \ker(P)$ hat, folgt $\nabla s = 0$, siehe (II.6). Ist nun $e_1, \dots, e_k \in E_x$ eine Basis, so erhalten wir lokale Schnitte $s_i \in \Gamma(E|_U)$ mit $\nabla s_i = 0$ und $s_i(x) = e_i$. Durch Verkleinern von U können wir weiters erreichen, dass $s_1(y), \dots, s_k(y)$ für jedes $y \in U$ eine Basis von E_y bildet. Damit ist die Implikation (d)⇒(e) gezeigt.

Ein lokaler Rahmen paralleler Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ wie in (e) definiert eine Vektorbündelkarte $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$, $(x, t^1, \dots, t^k) \mapsto \sum_i t^i s_i(x)$, siehe Proposition II.1.5. Für einen beliebigen Schnitt $s = f^1 s_1 + \cdots + f^k s_k \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ mit $(f^1, \dots, f^k) \in C^\infty(U; \mathbb{R}^k)$, folgt mit der Leibniz Regel und $\nabla_X s_i = 0$,

$$\nabla_X^{E|_U} s = df^1(X) s_1 + \cdots + df^k(X) s_k,$$

also stimmt $\nabla^{E|_U}$ mit der trivialen Konnexion dieser Karte überein. Dies zeigt die Implikation (e)⇒(f).

Um die Implikation (f)⇒(g) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass wir durch Unterteilen des Definitionsbereiches von h annehmen dürfen, dass h Werte in einer offenen Teilmengen $U \subseteq M$ wie in (f) hat. O.B.d.A. sei daher $E = M \times V$ und $\nabla = d$ die triviale Konnexion. Fassen wir $v \in V$ als konstante Abbildung $v \in C^\infty(M, V) = \Gamma(E)$ auf, dann gilt also $\nabla v = 0$, und daher $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}(v) = v$, für jede Kurve $c : [t_0, t_1] \to M$.

Aus Proposition II.4.4 erhalten wir sofort die Implikation (g)⇒(a), denn nach Voraussetzung gilt $P_t = \mathrm{id}$, da die in dieser Proposition betrachteten Kurven homotop zu konstanten Kurven sind. □

II.4.7. Bemerkung. Ist E ein flaches Vektorbündel über M, dh. E ist mit einer flachen Konnexion ∇ ausgestattet, dann wird

$$H^q(M; E) := \frac{\ker\big(d^\nabla : \Omega^q(M; E) \to \Omega^{q+1}(M; E)\big)}{\mathrm{img}\big(d^\nabla : \Omega^{q-1}(M; E) \to \Omega^q(M; E)\big)}$$

die q-te *de Rham Kohomologie mit Werten im flachen Bündel* E genannt. Beachte, dass dies wegen $d^\nabla d^\nabla = 0$ wohldefiniert ist. Für $E = \xi^1$ mit der trivialen Konnexion erhalten wir die übliche de Rham Kohomologie $H^*(M)$ zurück.

II.4.8. Bemerkung. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen, $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ der duale lokale Korahmen, $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$, und $\omega_j^i \in \Omega^1(U)$ die Konnexionsformen, $\omega_j^i(X) = \sigma^i(\nabla_X s_j)$, siehe Bemerkung II.3.16. Für die Krümmung $R \in \Omega^2(U; \mathrm{end}(E)) = \Omega^2(U; E \otimes E')$ gilt dann

$$R_{X,Y} = \sum_{i,j=1}^k \Omega_j^i(X, Y) s_i \otimes \sigma^j,$$

wobei $\Omega^i_j \in \Omega^2(U)$ die sogenannten *Krümmungformen* bezeichnen, $\Omega^i_j(X,Y) := \sigma^i(R_{X,Y}s_j)$. Wir wollen nun die Krümmungsformen Ω^i_j aus den Konnexionsformen ω^i_j berechnen. Aus (II.29) erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}s_j &= \nabla_X\nabla_Y s_j - \nabla_Y\nabla_X s_j - \nabla_{[X,Y]}s_j \\
&= \nabla_X \sum_{l=1}^k \omega^l_j(Y)s_l - \nabla_Y \sum_{l=1}^k \omega^l_j(X)s_l - \sum_{l=1}^k \omega^l_j([X,Y])s_l \\
&= \sum_{l=1}^k \Big((X\cdot\omega^l_j(Y))s_l + \sum_{i=1}^k \omega^l_j(Y)\omega^i_l(X)s_i\Big) \\
&\qquad - \sum_{l=1}^k \Big((Y\cdot\omega^l_j(X))s_l + \sum_{i=1}^k \omega^l_j(X)\omega^i_l(Y)s_i\Big) - \sum_{l=1}^k \omega^l_j([X,Y])s_l \\
&= \sum_{l=1}^k (d\omega^l_j)(X,Y)s_l + \sum_{i,l=1}^k (\omega^i_l\wedge\omega^l_j)(X,Y)s_i
\end{aligned}$$

also

$$\Omega^i_j(X,Y) = \sigma^i(R_{X,Y}s_j) = (d\omega^i_j)(X,Y) + \sum_{l=1}^k (\omega^i_l\wedge\omega^l_j)(X,Y)$$

und somit

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_{l=1}^k \omega^i_l\wedge\omega^l_j. \tag{II.39}$$

Fassen wir Ω^i_j als $(k\times k)$-Matrix $\mathbf{\Omega}$ mit Eintragungen in $\Omega^2(U)$ auf, so lässt sich dies mittels Matrizenmultiplikation auch als

$$\mathbf{\Omega} = d\mathbf{w} + \mathbf{w}\wedge\mathbf{w} \tag{II.40}$$

schreiben.

II.5. Euklidische Bündel. Unter einer *Euklidischen Metrik* auf einem Vektorbündel E verstehen wir einen glatten Schnitt $g \in \Gamma(S^2E')$, der auf jeder Faser positiv definit ist, dh. für jedes $x \in M$ ist g_x eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf E_x, und diese hängt glatt von x ab. Jede Euklidische Metrik induziert einen Vektorbündelisomorphismus $\flat_g : E \to E'$, der faserweise durch $(\flat_g)_x : E_x \to E'_x$, $v_x \mapsto g_x(v_x, -)$ gegeben ist, siehe Proposition II.1.5, den Inversen bezeichnen wir mit $\sharp_g := \flat_g^{-1}$. Unter einem *Euklidischen Vektorbündel* verstehen wir ein Vektorbündel, das mit einer Euklidischen Metrik ausgestattet ist.

II.5.1. PROPOSITION. *Jedes Vektorbündel E besitzt Euklidische Metriken. Jede solche Metrik induziert einen Isomorphismus $\flat = \sharp^{-1} : E \cong E'$.*

Beweis. Wir wählen einen Vektorbündelatlas $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ von E, dh. $\bigcup_i U_i = M$. Weiters wählen wir positiv definite innere Produkte $\tilde{g}_i$ auf V_i. Mit Hilfe der Vektorbündelkarten erhalten wir daraus Euklidische Metriken g_i auf den Vektorbündeln $E|_{U_i}$. Schließlich sei λ_i eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M,[0,1])$, $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Es ist dann $\lambda_i g_i \in \Gamma(S^2E'|_{U_i})$, und dieser Schnitt lässt sich durch Null zu einem global definierten glatten Schnitt von S^2E' ausdehnen. Da die Partition der Eins lokal endlich ist, erhalten wir einen glatten Schnitt $g := \sum_i \lambda_i g_i \in \Gamma(S^2E')$. Für jedes $x \in M$ ist g_x eine Konvexkombination von positiv semi-definiten symmetrischen Bilinearformen auf E_x, von denen mindestens eine positiv definit ist, denn es existiert i mit $\lambda_i(x) \neq 0$. Da die positiv definiten symmetrischen Bilinearformen eines Vektorraums eine konvexe Menge bilden, folgt nun, dass g faserweise positiv definit ist. □

II.5.2. Proposition. *Es sei E ein Euklidisches Vektorbündel über M mit Metrik $g \in \Gamma(S^2E')$. Dann existiert um jeden Punkt von M ein* lokaler Orthonormalrahmen *$s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$, dh. $g(s_i, s_j) = \delta_{i,j}$. Jeder solche lokale Orthonormalrahmen definiert eine isometrische Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, die jede Faser E_x isometrisch auf $\mathbb{R}^k$ mit dem Standardskalarprodukt abbildet, $x \in U$.*

Beweis. Wir beginnen mit einem beliebigen lokalen Rahmen $v_1, \dots, v_k \in \Gamma(E|_U)$ und wenden das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an. Genauer definieren wir induktiv $s_1 := v_1/\sqrt{g(v_1, v_1)}$ und

$$\tilde{s}_i := v_i - g(v_i, s_{i-1})s_{i-1} - \cdots - g(v_i, s_1)s_1, \qquad s_i := \tilde{s}_i/\sqrt{g(\tilde{s}_i, \tilde{s}_i)},$$

für $1 < i \leq k$. Wir erhalten $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ und nach Konstruktion gilt $g(s_i, s_j) = \delta_{i,j}$, also bildet s_i einen lokalen Orthonormalrahmen. Schließlich ist $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$, $(x, t^1, \dots, t^k) \leftrightarrow \sum_{i=1}^k t^i s_i(x)$, eine Vektorbündelkarte, die jede Faser E_x isometrisch auf $\mathbb{R}^k$ abbildet. □

II.5.3. Bemerkung. Ist $E \to M$ ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik g und $F \subseteq E$ ein Teilbündel, dann bildet das faserweise orthogonale Komplement $F^\perp := \bigcup_{x \in M} F_x^\perp$ ein zu F komplementäres Teilbündel, $F \oplus F^\perp = E$, denn $F^\perp = \ker(\pi)$ wobei $\pi : E \to E$ die faserweise Orthogonalprojektion auf F bezeichnet. Beachte, dass π glatt ist, denn mit Hilfe eines lokalen Orthonormalrahmen s_i von F, siehe Proposition II.5.2, lässt sich diese Projektion lokal als $\pi(v) = \sum_i g(s_i, v)s_i$ schreiben. Die komplementäre Orthogonalprojektion $\mathrm{id}_E - \pi : E \to F^\perp$ faktorisiert zu einem kanonischen Isomorphismus $E/F = F^\perp$.

II.5.4. Proposition. *Ist E ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik g, dann existieren lineare Konnexionen ∇ auf E, sodass $\nabla g = 0$, dh. g ist bezüglich der induzierten Konnexion auf S^2E' parallel, in anderen Worten*

$$X \cdot g(s_1, s_2) = g(\nabla_X s_1, s_2) + g(s_1, \nabla_X s_2) \tag{II.41}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ *und* $s_i \in \Gamma(E)$. *Ist* ∇ *so eine Konnexion,* $A \in \Omega^1(M; \operatorname{end}(E))$ *und* $\tilde{\nabla} = \nabla + A$, *dann gilt* $\tilde{\nabla} g = 0$ *genau dann wenn* $A \in \Omega^1(M; \mathfrak{o}(E))$, *wobei* $\mathfrak{o}(E) \subseteq \operatorname{end}(E)$ *das Teilbündel der faserweise schiefsymmetrischen Endomorphismen bezeichnet,*[7]

$$\mathfrak{o}(E)_x = \mathfrak{o}(E_x) = \big\{\varphi \in \operatorname{end}(E_x) \bigm| \forall v, w \in E_x : g_x(\varphi v, w) = -g_x(v, \varphi w)\big\}.$$

Die Menge der linearen Konnexionen für die g *parallel ist bildet daher einen affinen Raum über dem Vektorraum* $\Omega^1(M; \mathfrak{o}(E))$.

Beweis. Nach Proposition II.5.2 existiert ein isometrischer Vektorbündelatlas $\varphi^i : E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$, dh. $\bigcup_i U_i = M$, jeder der Vektorräume V_i ist mit einem Euklidischen Skalarprodukt ausgestattet, und $\varphi^i_x : E_x \cong V_i$ ist eine lineare Isometrie, für jedes $x \in U_i$. Beachte, dass für die mit diesen Karten assozierten trivialen Konnexionen $\nabla^{E|_{U_i}}$ auf $E|_{U_i}$ offensichtlich $\nabla^{E|_{U_i}}(g|_{U_i}) = 0$ gilt. Ist nun λ_i eine der Überdeckung U_i untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$, $\sum_i \lambda_i = 1$, so definiert $\nabla_X s := \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}_X s$ eine lineare Konnexion auf E und es folgt

$$\begin{aligned}(\nabla_X g)(s_1, s_2) &= X \cdot g(s_1, s_2) - g(\nabla_X s_1, s_2) - g(s_1, \nabla_X s_2)\\ &= \sum_i \lambda_i\big(X \cdot g(s_1, s_2) - g(\nabla^{E|_{U_i}}_X s_1, s_2) - g(s_1, \nabla^{E|_{U_i}}_X s_2)\big)\\ &= \sum_i \lambda_i(\nabla^{E|_{U_i}} g)(s_1, s_2) = 0,\end{aligned}$$

also $\nabla g = 0$ wie gewünscht. Sind ∇ und $\tilde{\nabla}$ zwei beliebige lineare Konnexionen auf E und bezeichnet $A := \tilde{\nabla} - \nabla \in \Omega^1(M; \operatorname{end}(E))$ dann gilt

$$(\tilde{\nabla}_X g)(s_1, s_2) = (\nabla_X g)(s_1, s_2) - g(A(X)s_1, s_2) - g(s_1, A(X)s_2)$$

woraus sofort die zweite Behauptung folgt. □

II.5.5. Bemerkung. Ist g eine Euklidische Metrik auf einem Vektorbündel E, dann induziert g Euklidische Metriken auf f^*E, E', $\otimes^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf E mit $\nabla g = 0$, dann sind auch die Metriken auf f^*E, E', $\otimes E^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$ parallel bezüglich der induzierten Konnexionen auf diesen Bündeln.

II.5.6. Proposition. *Es sei* $p : E \to M$ *ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik* g *und* ∇ *eine lineare Konnexion auf* E, *sodass* $\nabla g = 0$. *Dann gilt:*

(a) *Für jede glatte Kurve* $c : I \to M$ *ist der Paralleltransport* $\operatorname{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}$ *eine lineare Isometrie,* $t_0, t_1 \in I$, *dh.*

$$g_{c(t_1)}\big(\operatorname{pt}^c_{t_1,t_0}(v), \operatorname{pt}^c_{t_1,t_0}(w)\big) = g_{c(t_0)}(v, w),$$

für alle $v, w \in E_{c(t_0)}$.

[7] Schnitte von $\mathfrak{o}(E)$ können daher mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\phi : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ identifiziert werden, für die $g(\phi s_1, s_2) = -g(s_1, \phi s_2)$ gilt, $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

(b) Für die Krümmung von ∇ gilt $R \in \Omega^2(M; \mathfrak{o}(E))$, dh.

$$g(R_{X,Y}s_1, s_2) = -g(s_1, R_{X,Y}s_2),$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $s_i \in \Gamma(E)$.

Beweis. Betrachte das Pullback Bündel c^*E über I mit der induzierten Euklidischen Metrik $\tilde{g} := c^*g$ und der induzierten Konnexion $\tilde{\nabla} := \nabla^{c^*E}$. Weiters bezeichnen $\tilde{v}, \tilde{w} : I \to E$ die Kurven $\tilde{v}(t) := \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v)$ und $\tilde{w}(t) := \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(w)$. Da $p \circ \tilde{v} = c = p \circ \tilde{w}$ können wir $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ als Schnitte von c^*E auffassen, $\tilde{v}, \tilde{w} \in \Gamma(c^*E)$, und es gilt $\tilde{\nabla}\tilde{v} = 0 = \tilde{\nabla}\tilde{w}$. Nach Bemerkung II.5.5 gilt auch $\tilde{\nabla}\tilde{g} = 0$ und mit (II.41) daher

$$\partial_t \cdot \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{v}, \tilde{w}) + \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{w}) = 0 + 0 = 0,$$

wobei $\partial_t \in \mathfrak{X}(I)$. Zurückübersetzt bedeutet dies $\frac{\partial}{\partial t} g_{c(t)}\big(\mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v), \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(w)\big) = 0$, woraus nun (a) folgt. Nach (II.41) gilt:

$$\begin{aligned}
X \cdot Y \cdot g(s_1, s_2) &= g(\nabla_X \nabla_Y s_1, s_2) + g(\nabla_Y s_1, \nabla_X s_2) \\
&\qquad + g(\nabla_X s_1, \nabla_Y s_2) + g(s_1, \nabla_X \nabla_Y s_2) \\
-Y \cdot X \cdot g(s_1, s_2) &= -g(\nabla_Y \nabla_X s_1, s_2) - g(\nabla_X s_1, \nabla_Y s_2) \\
&\qquad - g(\nabla_Y s_1, \nabla_X s_2) - g(s_1, \nabla_Y \nabla_X s_2) \\
-[X, Y] \cdot g(s_1, s_2) &= -g(\nabla_{[X,Y]} s_1, s_2) - g(s_1, \nabla_{[X,Y]} s_2)
\end{aligned}$$

Aufaddieren ergibt $0 = g(R_{X,Y}s_1, s_2) + g(s_1, R_{X,Y}s_2)$, siehe (II.29). $\square$

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts werden wir nun explizite Respräsentanten der Thom und Euler Klassen konstruieren, und damit dann einen Satz von Gauss–Bonnet–Chern zeigen, siehe Satz II.5.8 unten. Die Darstellung hier orientiert sich eng an der in [**11**, Section 1.6].

Sei also E ein Vektorbündel über M, g eine Euklidische Metrik auf E und ∇ eine kompatible Konnexion, $\nabla g = 0$. Zunächst können wir mittels g die Vektorbündel $\Lambda^2 E$ und $\mathfrak{o}(E)$ identifizieren, $\Lambda^2 E = \mathfrak{o}(E)$,

$$\omega(\flat s_1, \flat s_2) := g(\omega(s_1), s_2), \quad \omega \in \Gamma(\mathfrak{o}(E)),\ s_1, s_2 \in \Gamma(E). \tag{II.42}$$

Dies erlaubt es die Krümmung von ∇ als Element in $R \in \Omega^2(M; \Lambda^2 E)$ aufzufassen, siehe Proposition II.5.6(b). Da $\nabla g = 0$, stimmen die induzierten Konnexionen auf $\Lambda^2 E$ und $\mathfrak{o}(E)$ überein,

$$\nabla^{\Lambda^2 E} = \nabla^{\mathfrak{o}(E)}. \tag{II.43}$$

Die Bianchi Identität in Proposition II.4.2(a) ist daher zu

$$d^{\nabla^{\Lambda^2 E}} R = 0 \in \Omega^3(M; \Lambda^2 E) \tag{II.44}$$

äquivalent.

Auf dem graduierten Vektorraum $\Omega^*(M;\Lambda^*E)=\bigoplus_r\bigoplus_{p+q=r}\Omega^p(M;\Lambda^qE)$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$(\alpha\otimes a)\wedge(\beta\otimes b):=(-1)^{|a||\beta|}\alpha\wedge\beta\otimes a\wedge b, \tag{II.45}$$

wobei $\alpha,\beta\in\Omega^*(M)$ und $a,b\in\Gamma(\Lambda^*E)$. Dabei ist der Grad von $\alpha\otimes a\in\Omega^p(M;\Lambda^qE)$ durch $|\alpha\otimes a|:=|\alpha|+|a|=p+q$ gegeben. Dadurch wird $\Omega^*(M;\Lambda^*E)$ zu einer assotiativen und graduiert kommutativen Algebra, dh.

$$\sigma\wedge\tau=(-1)^{|\sigma||\tau|}\tau\wedge\sigma,\qquad\sigma,\tau\in\Omega^*(M;\Lambda^*E).$$

Darüberhinaus wird $d^{\nabla^{\Lambda^*E}}:\Omega^*(M;\Lambda^*E)\to\Omega^{*+1}(M;\Lambda^*E)$ zu einer graduierte Derivation, siehe Proposition II.4.1(d), dh.

$$d^{\nabla^{\Lambda^*E}}(\sigma\wedge\tau)=(d^{\nabla^{\Lambda^*E}}\sigma)\wedge\tau+(-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge d^{\nabla^{\Lambda^*E}}\tau,\qquad\sigma,\tau\in\Omega^*(M;\Lambda^*E). \tag{II.46}$$

Zusammen mit (II.44) impliziert dies, für jedes $r\in\mathbb{N}$,

$$d^{\nabla^{\Lambda^{2r}E}}R^r=0\in\Omega^{2r+1}(M;\Lambda^{2r}E), \tag{II.47}$$

wobei $R^r:=R\wedge\cdots\wedge R\in\Omega^{2r}(M;\Lambda^{2r}E)$.

Ist darüberhinaus E orientiert und $k:=\operatorname{rank}(E)$, dann kann das Linienbündel Λ^kE mittels g mit dem trivialen Linienbündel identifiziert werden, und bezüglich dieser Identifikation wird die induzierte Konnexion auf Λ^kE zur trivialen Konnexion,

$$\Lambda^kE=\xi^1=M\times\mathbb{R},\qquad\nabla^{\Lambda^kE}=d.$$

Dabei entspricht $t\in\xi^1_x=\mathbb{R}$ das Element $ts_1\wedge\cdots\wedge s_k\in\Lambda^kE$, wobei $s_1,\dots,s_k$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von E_x bezeichnet — das Resultat hängt nicht von der Wahl dieser positiv orientierte Orthonormalbasis ab. Diese Identifikation wird auch als *Berezin Integration* bezeichnet. Für geraden Rang k können wir daher $R^{k/2}\in\Omega^k(M;\Lambda^kE)=\Omega^k(M)$ auffassen, und aus (II.47) erhalten wir

$$dR^{k/2}=0\in\Omega^{k+1}(M). \tag{II.48}$$

Für gerades k definieren wir die *Euler Form (Pfaffsche der Krümmung) eines orientierten Euklidischen Bündels mit kompatibler Konnexion* durch

$$e(E,g,\nabla):=(-1)^{k(k-1)/2}(2\pi)^{-k/2}\frac{R^{k/2}}{(k/2)!}\in\Omega^k(M), \tag{II.49}$$

für ungerades k setzen wir $e(E,g,\nabla):=0$.

II.5.7. Proposition. *Es sei E ein orientiertes Vektorbündel über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M, g eine Euklidische Metrik auf E und ∇ eine kompatible lineare Konnexion, $\nabla g=0$. Dann ist die Euler Form $e(E,g,\nabla)$, siehe* (II.49)*, geschlossen und repräsentiert die Euler Klasse, $[e(E,g,\nabla)]=e(E)\in H^k(M)$, siehe Definition II.2.2. Insbesondere ist die Euler Klasse eines Vektorbündels ungeraden Grades trivial.*

Beweis. Nach (II.48) gilt $de(E,g,\nabla)=0$, also ist die Euler Form geschlossen. Es bezeichne nun $\tilde E := p^*E$ das Pullback Bündel über E und $\tilde\nabla := p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf $\tilde E$. Wie schon zuvor $\Omega^*(M;\Lambda^*\tilde E)$, fassen wir auch $\Omega^*(E;\Lambda^*\tilde E)$ als assotiative graduiert kommutative Algebra auf, siehe (II.45), $d^{\tilde\nabla} := d^{\tilde\nabla^{\Lambda^*\tilde E}}$ ist daher eine graduierte Derivation auf $\Omega^*(E;\Lambda^*\tilde E)$, siehe (II.46). Weiters fassen die identische Abbildung $E\to E$ als Schnitt $\mathbf{x}\in\Gamma(\tilde E)$ auf, und definieren eine lineare Abbildung $a_{\mathbf{x}}:\Omega^*(E;\Lambda^*\tilde E)\to\Omega^*(E;\Lambda^{*-1}\tilde E)$ durch

$$a_{\mathbf{x}}(\beta\otimes b) := (-1)^{|\beta|}\beta\otimes i_{\tilde\flat\mathbf{x}}b, \qquad \beta\in\Omega^*(M),\, b\in\Gamma(\Lambda^*\tilde E),$$

wobei $i_{\tilde\flat\mathbf{x}}:\Lambda^*\tilde E\to\Lambda^{*-1}\tilde E$ die Kontraktion mit $\tilde\flat\mathbf{x}\in\Gamma(\tilde E')$ bezeichent, und $\tilde\flat:\tilde E\to\tilde E'$ mit der Euklidischen Metrik $\tilde g := p^*g$ auf $\tilde E$ definiert ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass auch $a_{\mathbf{x}}$ eine graduierte Derivation bildet, dh.

$$a_{\mathbf{x}}(\sigma\wedge\tau) = (a_{\mathbf{x}}\sigma)\wedge\tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge a_{\mathbf{x}}\tau, \qquad \sigma,\tau\in\Omega^*(E;\Lambda^*\tilde E).$$

Betrachte nun die Funktion $-|\mathbf{x}|^2/2 := -\tilde g(\mathbf{x},\mathbf{x})/2\in\Omega^0(E)=\Omega^0(E;\Lambda^0\tilde E)$, $\tilde\nabla\mathbf{x}\in\Omega^1(E;\tilde E)=\Omega^1(E;\Lambda^1\tilde E)$ und die Krümmung von $\tilde\nabla$, $\tilde R\in\Omega^2(E;\mathfrak{o}(\tilde E)) = \Omega^2(E;\Lambda^2\tilde E)$. Aus $\tilde\nabla\tilde g=0$, der Definition der Krümmung, siehe (II.28), und der Biancchi Identität, vgl. (II.44), erhalten wir sofort folgende Relationen:

$$\begin{aligned} d^{\tilde\nabla}\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}\big) &= a_{\mathbf{x}}\tilde\nabla\mathbf{x}\in\Omega^1(E;\Lambda^0\tilde E)\\ d^{\tilde\nabla}\tilde\nabla\mathbf{x} &= a_{\mathbf{x}}\tilde R\in\Omega^2(E;\Lambda^1\tilde E)\\ d^{\tilde\nabla}\tilde R &= 0\in\Omega^3(E;\Lambda^2\tilde E)\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen, und der trivialen Relation $a_{\mathbf{x}}(-|\mathbf{x}|^2/2)=0$, erhalten wir

$$(d^{\tilde\nabla}-a_{\mathbf{x}})\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)=0.$$

Da $d^{\tilde\nabla}-a_{\mathbf{x}}$ eine graduierte Derivation ist, folgt

$$(d^{\tilde\nabla}-a_{\mathbf{x}})\Big(\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)^r\Big)=0,$$

für jedes $r\in\mathbb{N}_0$, und daher auch

$$(d^{\tilde\nabla}-a_{\mathbf{x}})\exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)=0, \tag{II.50}$$

wobei

$$\exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)=\sum_{r=0}^{\infty}\tfrac{1}{r!}\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)^r = e^{-|\mathbf{x}|^2/2}e^{\tilde\nabla\mathbf{x}}e^{\tilde R}\in\bigoplus_p\Omega^p(E;\Lambda^p\tilde E).$$

Beachte, dass $\tilde\nabla\mathbf{x}$ und $\tilde R$ in $\Omega^*(E;\Lambda^*\tilde E)$ kommutieren und beide nilpotent sind, die Exponentiale $e^{\tilde\nabla\mathbf{x}}$ und $e^{\tilde R}$ sind daher durch endliche Summen gegeben. Bezeichnet $o:M\to E$ den Nullschnitt, dann gilt weiters

$$o^*\exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\tilde\nabla\mathbf{x}+\tilde R\big)=e^R\in\Omega^*(M;\Lambda^*E), \tag{II.51}$$

denn aus $\mathbf{x}\circ o = 0$ folgt $o^*\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} = 0$, $o^*(\tilde\nabla\mathbf{x}) = \nabla o^*\mathbf{x} = \nabla 0 = 0$ und $o^*\tilde R = o^*p^*R = (p\circ o)^*R = \mathrm{id}_M^* R = R$. Sei nun $x_0 \in M$ und E_{x_0} die Faser von E über x_0. Wähle eine positiv orientierte Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_k$ von E_{x_0} und betrachte die orientierungserhaltende lineare Isometrie $\iota : \mathbb{R}^k \to E_{x_0}$, $\iota(x^1, \dots, x^k) = x^1e_1 + \cdots + x^ke_k$. Ziehen wir die Konnexion $\tilde\nabla$ mit ι zurück, so erhalten wir die triviale Konnexion auf dem trivialen Vektorbündel $\iota^*\tilde E = \iota^*p^*E = (p\circ\iota)^*E = \mathrm{const}_{x_0}^* E = \mathbb{R}^k \times \Lambda^*E_{x_0}$ über $\mathbb{R}^k$. Es gilt daher $\iota^*\tilde\nabla\mathbf{x} = d\iota^*\mathbf{x} = d\sum_i x^i \otimes e_i = \sum_i dx^i \otimes e_i$, also $\iota^*\exp(\tilde\nabla\mathbf{x}) = \exp(\iota^*\tilde\nabla\mathbf{x}) = \prod_i \exp(dx^i\otimes e_i) = \prod_i(1 + dx^i \otimes e_i)$, und somit

$$\iota^*\exp\bigl(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde\nabla\mathbf{x} + \tilde R\bigr) = e^{-|x|^2/2}(1 + dx^1\otimes e_1)\wedge\cdots\wedge(1 + dx^k \otimes e_k), \quad \text{(II.52)}$$

denn aufgrund der Natürlichkeit der Krümmung, siehe Proposition II.4.2(b), haben wir auch $\iota^*\tilde R = \iota^*R^{p^*\nabla} = \iota^*p^*R = (p\circ\iota)^*R = \mathrm{const}_{x_0}^* R = 0$ und somit $\iota^*(\exp\tilde R) = 1$.

Es bezeichne $\tilde\phi \in \Omega^k(E;\Lambda^k\tilde E) = \Omega^k(E)$ jenen Teil von

$$(-1)^{k(k-1)/2}(2\pi)^{-k/2}\exp\bigl(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde\nabla\mathbf{x} + \tilde R\bigr)$$

der in $\Omega^k(E;\Lambda^k\tilde E)$ liegt, $k = \mathrm{rank}(E)$. Aus (II.50), (II.51) und (II.52) folgt:

$$d\tilde\phi = 0 \quad \text{(II.53)}$$

$$o^*\tilde\phi = e(E, g, \nabla) \quad \text{(II.54)}$$

$$\iota^*\tilde\phi = (2\pi)^{-k/2}e^{-|x|^2/2}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k \quad \text{(II.55)}$$

Zusammen mit dem Gauß'schen Integral, $\int_{\mathbb{R}^k} e^{-|x|^2/2}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k = (2\pi)^{k/2}$, erhalten wir aus (II.55) auch

$$\int_{E_{x_0}} \tilde\phi = 1. \quad \text{(II.56)}$$

Wir sehen daraus, dass $\tilde\phi \in \Omega^k(E)$ beinahe eine Thom Form darstellt, allerdings ist der Träger von $\tilde\phi$ nicht kompakt. Um dies zu korrigieren, betrachten wir die offene Teilmenge $BE := \{y \in E : |y| < 1\} \subseteq E$ und den Diffeomorphismus

$$f : BE \xrightarrow{\cong} E, \qquad f(y) := \frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Sezten wir die Form $\phi := f^*\tilde\phi \in \Omega^k(BE)$ durch Null auf ganz E fort, so erhalten wir eine glatte Form mit kompakten Träger, $\phi \in \Omega_c^k(E)$. Aus (II.53) und (II.56) folgt, dass ϕ die Thom Klasse repräsentiert, $[\phi] = \phi_E \in H_c^k(E)$, siehe Satz II.2.1, und aus (II.54) schließlich, dass $e(E, g, \nabla)$ die Euler Klasse repräsentiert, siehe Definition II.2.2. □

Aus Satz II.2.8 und Proposition II.5.7 erhalten wir nun

II.5.8. Satz (Gauß–Bonnet–Chern). *Es sei M eine orientierte geschlossene n-Mannigfaltigkeit, g eine Euklidische Metrik auf TM und ∇ eine kompatible lineare Konnexion, $\nabla g = 0$. Dann gilt*

$$\int_M e(TM, g, \nabla) = \chi(M),$$

wobei $e(TM, g, \nabla) \in \Omega^n(M)$ die Euler Form (Pfaffsche der Krümmung) bezeichnet, siehe (II.49).

II.6. Aufgaben zu Kapitel II.

30. Aufgabe. Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Zeige, dass die Inversion $\nu : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, $\nu(A) := A^{-1}$, glatt ist. *Hinweis:* Da $V \cong \mathbb{R}^k$ genügt es zu zeigen, dass die Inversion in $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ glatt ist.

31. Aufgabe. Zeige, dass für jedes Linienbündel L die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) L ist orientierbar.
(ii) L ist trivialisierbar.
(iii) L besitzt einen irgendwo verschwindenden Schnitt.

32. Aufgabe. Führe die Details in Bemerkung II.1.7 aus. *Hinweis:* Verwende die kanonischen Vektorbündelhomomorphismen $\pi_1 : E \times F \to E$ über p_1 und $\pi_2 : E \times F \to F$ über p_2, wobei $p_1, p_2 : M \times M \to M$ die beiden kanonischen Projektionen bezeichnen, $i = 1, 2$.

33. Aufgabe. Es sei W ein Teilraum in einem endlich dimensionalen Vektorraum V. Zeige, dass $\mathrm{GL}(V; W) := \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid A(W) = W\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(V)$ ist. Zeige weiters, dass die natürliche Abbildung $p : \mathrm{GL}(V; W) \to \mathrm{GL}(V/W)$ glatt ist. Zeige auch, dass glatte Abbildungen $s : \mathrm{GL}(V/W) \to \mathrm{GL}(V; W)$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(V/W)}$ existieren. Zeige schließlich, dass p und s zueinander inverse Homotopieäquivalenzen sind.

34. Aufgabe. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit. Zeige, dass TS ein Teilbündel von $TM|_S$ ist, ohne dabei auf Proposition II.1.10 zurückzugreifen, vgl. Beispiel II.1.11.

35. Aufgabe. Es sei W ein Teilraum eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Sind zwei der drei Vektorräume V, W, V/W orientiert, dann erbt der dritte in kanonischer Weise eine Orientierung.

36. Aufgabe. Es sei $0 \to F \to E \to G \to 0$ eine kurze exakte Seqeunz von Vektorbündeln über M. Sind zwei dieser Vektorbündel oreintiert, dann existiert auf dem dritten genau eine Orientierung, sodass der kanonische Isomorphismus $E/F = G$ orientierungsbewahrend ist.

37. Aufgabe. Zeige, dass das tautologische Linienbündel über $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ keinen nirgendwo verschwindenden Schnitt besitzt und daher nicht orientierbar

und auch nicht trivialisierbar sein kann. Schließe daraus, dass auch das tautologische Linienbündel über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$, nicht orientierbar und nicht trivialisierbar ist. Zeige weiters, dass der Totalraum des tautologischen Linienbündels über $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ diffeomorph zum Möbiusband ist.

38. Aufgabe. Zeige $T\,\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \hom(\gamma, \gamma^\perp)$, siehe Beispiel II.1.22.

39. Aufgabe. Verifiziere die Details in Bemerkung II.1.24. Zeige weiters auch $T\,\mathrm{Gr}_{k,n} \cong \hom(\gamma^k, (\gamma^k)^\perp)$.

40. Aufgabe. Es seinen V und W zwei endlich dimensionale Vektorräume und M eine Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine Abbildung $f : M \to L(V, W)$ genau dann glatt ist, wenn für jedes $v \in V$ die Abbildung $M \to W$, $x \mapsto f(x) \cdot v$ glatt ist.

41. Aufgabe. Zeige $\Lambda^k(E \oplus F) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p E \otimes \Lambda^q F$ für je zwei Vektorbündel E und F über M.

42. Aufgabe. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M, $s \in \Gamma(E)$, $x \in M$ und $X \in T_xM$. Weiters sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Zeige

$$\nabla_X s = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}\big(\mathrm{pt}^c_{0,t}(s(c(t))) - s(x)\big),$$

vgl. Bemerkung II.3.15.

43. Aufgabe. Betrachte $\alpha := x dy + dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ und das Teilbündel $H := \ker(\alpha) \subseteq T\mathbb{R}^3$. Zeige, dass H nicht integrabel ist, vgl. Satz II.4.5.

44. Aufgabe. Es sei E ein Vektorbündel über M, das k punktweise linear unabhängige Schnitte besitzt. Zeige, dass ein Teilbündel $F \subseteq E$ mit $E \cong F \oplus \xi^k$ existiert, wobei $\xi^k = M \times \mathbb{R}^k$ das triviale Vektorbündel bezeichnet.