III. Riemannsche Geometrie

III.1. Levi–Civita Konnexion und Riemannkrümmung. Unter einer *Riemannschen Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Euklidische Metrik auf dem Tangentialbündle, $g \in \Gamma(S^2T^*M)$, vgl. Abschnitt II.5. Eine Riemannsche Metrik spezifiziert also ein positiv definites symmetrisches inneres Produkt auf jedem Tangentialraum T_xM, $x \in M$, und erlaubt es daher Längen und Winkel von Tangentialvektoren zu messen. Unter einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g. Auf einer orientierten Riemannschen n-Mannigfaltigkeit erhalten wir eine kanonische Volumsform, $\mathrm{vol} \in \Omega^n(M)$, in dem wir $\mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n) = 1$ für eine (und dann jede) positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM fordern, $x \in M$.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten besitzen eine ausgezeichnete lineare Konnexion, die sogenannte *Levi–Civita Konnexion,* auf ihrem Tangentialbündel. Um die Bedingung, die diese Konnexion charakterisiert zu formulieren benötigen wir den Begriff der Torsion einer linearen Konnexion auf dem Tangentialbündel. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf TM, so definiert

$$\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) \tag{III.1}$$

einen Schnitt $\mathrm{Tor}^\nabla \in \Omega^2(M; TM)$, denn der Ausdruck (III.1) ist offensichtlich schiefsymmetrisch und $C^\infty(M)$ linear in X und Y. Dieses Tensorfeld wird als *Torsion* der Konnexion ∇ bezeichnet. Eine lineare Konnexion auf TM wird *torsionsfrei* genannt, wenn der Torsionstensor verschwindet, dh. $\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) = 0$ für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

III.1.1. Proposition (Levi–Civita Konnexion). *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert genau eine torsionsfreie mit g kompatible lineare Konnexion ∇ auf TM, dh.* $\mathrm{Tor} = 0$ *und* $\nabla g = 0$. *Diese Konnexion wird die* Levi–Civita Konnexion *der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) genannt. Sie ist daher durch die Bedingungen*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{III.2}$$

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{III.3}$$

für je drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, eindeutig charakterisiert.

Beweis. Wir schreiben die Bedingung $\nabla g = 0$, siehe (III.3), drei mal an:

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla_X g)(Y, Z) &= X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
0 = (\nabla_Y g)(Z, X) &= Y \cdot g(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) \\
0 = -(\nabla_Z g)(X, Y) &= -Z \cdot g(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

Da g symmetrisch ist, erhalten wir durch Aufaddieren dieser drei Gleichungen unter Verwendung von (III.2)

$$\begin{aligned}0 &= X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) \\ &\qquad - g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \\ &= X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) - 2g(\nabla_X Y, Z) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(&X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\Big).\end{aligned} \tag{III.4}$$

Da g nichtdegeneriert ist, sehen wir daraus bereits, dass es höchstens eine torsionsfreie mit g kompatible Konnexion auf TM geben kann. Um auch die Existenz einzusehen, versuchen wir $\nabla_X Y$ durch (III.4) zu definieren. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die rechte Seite dieser Gleichung $C^\infty(M)$ linear in Z ist. Wegen der Nichtdegeneriertheit von g definiert (III.4) also eine, offensichtlich bilineare Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$. Analoge Rechnungen zeigen, dass $\nabla_X Y$ auch $C^\infty(M)$ linear in X ist, und die Leibnitz Regel $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Z$ gilt. Zusammenfassend sehen wir also, dass (III.4) eine lineare Konnexion ∇ auf TM definiert. Es bleibt also noch zu zeigen, dass diese Konnexion ∇ tatsächlich torsionsfrei und mit g kompatibel ist. Aus (III.4) erhalten wir sofort

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y],Z),$$

also $g(\mathrm{Tor}(X,Y),Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],Z) = 0$ für jedes $Z \in \mathfrak{X}(M)$, und daher $\mathrm{Tor}(X,Y) = 0$. Schließlich folgt aus (III.4) auch

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = X \cdot g(Y,Z),$$

also $(\nabla_X g)(Y,Z) = X \cdot g(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, und somit $\nabla g = 0$. □

Unter dem *Riemannschen Krümmungstensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir die Krümmung, siehe Proposition II.4.2, der Levi–Civita Konnexion, dh.

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{III.5}$$

III.1.2. Proposition. *Der Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt folgende Symmetrien, $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$:*

(a) $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$
(b) $g(R_{X,Y}Z, W) = -g(R_{X,Y}W, Z)$
(c) $g(R_{X,Y}Z, W) = g(R_{Z,W}X, Y)$
(d) $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$ *(algebraische Bianchi Identität)*

(e) $0 = d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R \in \Omega^3(M; \mathrm{end}(TM))$, *dh.*

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z} \tag{III.6}$$

oder äquivalent

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z). \tag{III.7}$$

Diese Relation wird zweite oder differentielle Bianchi Identität genannt.

Beweis. Die erste Symmetrie (a) ist offensichtlich. Aus Proposition II.5.6(b) erhalten wir (b), denn $\nabla g = 0$. Die Bianchi Identität $d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R = 0$ haben wir allgemeiner in Proposition II.4.2(a) gezeigt, die Reformulierung (III.6) erhalten wir sofort mittels (II.27). Nach Abschnitt II.3 gilt

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y,Z} - R_{Y,\nabla_X Z}$$

und wegen der Torsionsfreiheit, $\nabla_X Z = \nabla_Z X - [Z,X]$, daher

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y,Z} + R_{\nabla_Z X,Y} - R_{[Z,X],Y}.$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefert

$$\sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z},$$

somit folgt (III.7) aus (III.6). Um (d) einzusehen, verwenden wir die Torsionsfreiheit und schreiben R in folgender Form an:

$$\begin{aligned} R_{X,Y} Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X,Y] - [[X,Y],Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_Z \nabla_Y X - [[X,Y],Z] \end{aligned}$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefern nun

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = - \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} [[X,Y],Z] = 0,$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Jacobi Identität verwendet haben. Um (c) einzusehen, schreiben wir (d) viermal an:

$$\begin{aligned} 0 &= g(R_{X,Y} Z, W) + g(R_{Y,Z} X, W) + g(R_{Z,X} Y, W) \\ 0 &= g(R_{Y,Z} W, X) + g(R_{Z,W} Y, X) + g(R_{W,Y} Z, X) \\ 0 &= -g(R_{Z,W} X, Y) - g(R_{W,X} Z, Y) - g(R_{X,Z} W, Y) \\ 0 &= -g(R_{W,X} Y, Z) - g(R_{X,Y} W, Z) - g(R_{Y,W} X, Z) \end{aligned}$$

Aufaddieren liefert, unter Verwendung von (a) und (b),

$$0 = 2g(R_{X,Y} Z, W) - 2g(R_{Z,W} X, Y)$$

und somit (c). $\square$

III.1.3. Satz. *Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sind äquivalent:*
(a) $R = 0$, dh. die Levi–Civita Konnexion ist flach.
(b) Lokal um jeden Punkt existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$g = du^1 \otimes du^1 + \cdots + du^n \otimes du^n, \tag{III.8}$$

dh. (M, g) ist lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.
In diesem Fall wird die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) flach genannt.

Beweis. Die Implikation (b)⇒(a) ist trivial, siehe Beispiel III.1.10. Für die umgekehrten Implikation (a)⇒(b) fixieren wir $x \in M$. Nach Satz II.4.6 existiert eine offene Umgebung U von x und ein lokaler Rahmen $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ paralleler Vektorfelder, $\nabla X_i = 0$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $X_1(x), \ldots, X_n(x)$ eine Orthonormalbasis von T_xM bilden. Aus $\nabla g = 0$ folgt

$$Y \cdot g(X_i, X_j) = g(\nabla_Y X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_Y X_j) = 0 + 0 = 0,$$

für jedes $Y \in \mathfrak{X}(U)$, also ist $g(X_i, X_j)$ lokal konstant. Durch Verkleinern von U können wir also $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ erreichen, dh. $X_1, \ldots, X_n$ bilden einen lokalen Orthonormalrahmen. Aus der Torsionsfreiheit der Levi–Civita Konnexion erhalten wir $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 - 0 = 0$, also kommutieren die Flüsse der Vektorfelder X_i, dh. $\mathrm{Fl}_t^{X_i} \circ \mathrm{Fl}_s^{X_j} = \mathrm{Fl}_s^{X_j} \circ \mathrm{Fl}_t^{X_i}$ für hinreichend kleine s und t. Somit liefert

$$u^{-1}(t_1, \ldots, t_n) := (\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}_{t_n}^{X_n})(x)$$

eine lokal um x definierte Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenvektorfeldern $\frac{\partial}{\partial u^i} = X_i$, vgl. den Beweis von Satz II.4.5. Insbesondere bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ einen lokalen Orthonormalrahmen, folglich ist g durch (III.8) gegeben. □

Unter der *Ricci Krümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verstehen wir folgende Kontraktion des Riemannschen Krümmungstensors

$$\mathrm{Ric} = -\operatorname{tr}_{24} R, \qquad \mathrm{Ric}(X, Y) := -\sum_{i=1}^n g(R_{X,e_i} Y, e_i), \quad X, Y \in T_xM,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, nach Proposition III.1.2(c) symmetrisch,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X), \qquad X, Y \in T_xM,$$

und definiert daher ein Tensorfeld, $\mathrm{Ric} \in \Gamma(S^2T^*M)$, vom selben Typ wie die Metrik g. Eine weitere Kontraktion führt zur sogenannten *Skalarkrümmung,* $r \in C^\infty(M)$,

$$r := \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric}, \qquad r(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i, e_i), \quad x \in M,$$

wobei dies wieder unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. Die sogenannte *Schnittkrümmung* ist eine Abbildung, die jedem zwei dimensionalen Teilraum $\xi \subseteq T_xM$, $x \in M$, die Zahl

$$K(\xi) := -g(R_{X,Y}X, Y)$$

zuordnet, wobei X, Y eine Orthonormalbasis von ξ bildet. Dies ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Orthonormalbasis, für eine beliebige Basis X, Y von ξ erhalten wir, vgl. Aufgabe 47,

$$K(\xi) = -\frac{g(R_{X,Y}X, Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \qquad X, Y \text{ Basis von } \xi \subseteq T_xM. \tag{III.9}$$

Der *Einstein Tensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch

$$G := \mathrm{Ric} - \tfrac{r}{2}g \in \Gamma(S^2T^*M)$$

definiert, dh. $G(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y)$. Beachte, $G(X,Y) = G(Y,X)$.

III.1.4. Lemma. *Der Riemannsche Krümmungstensor R ist durch die Schnittkrümmung K vollständig bestimmt. Ist die Schnittkrümmung bei einem Punkt $x \in M$ konstant, dh. existiert eine Konstante c_x, sodass $K(\xi) = c_x$ für jede Ebene $\xi \subseteq T_xM$, dann gilt schon*

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -c_x\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big), \quad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

und somit auch $\mathrm{Ric}_x = (n-1)c_xg_x$ *und* $r(x) = n(n-1)c_x$.

Beweis. Da dies ein punktweises Problem ist, fixieren wir $x \in M$. Aufgrund von (III.9) bestimmt die Schnittkrümmung K alle Ausdrücke der Form

$$\rho(X,Y) := g(R_{X,Y}X, Y), \qquad X, Y \in T_xM.$$

Mit Hilfe der Symemtrien (a) bis (d) von R in Proposition III.1.2 erhalten wir durch direkte (langwierige) Rechnung [**7**, Lemma 3.3.3]

$$\begin{aligned}
-6g(R_{X,Y}Z, W) = \rho(X+W, Y+Z) &- \rho(X+W, Y) - \rho(X+W, Z) \\
&- \rho(X, Y+Z) - \rho(W, Y+Z) + \rho(X,Z) + \rho(W,Y) \\
&- \rho(Y+W, X+Z) + \rho(Y+W, X) + \rho(Y+W, Z) \\
&+ \rho(Y, X+Z) + \rho(W, X+Z) - \rho(Y,Z) - \rho(W,X)
\end{aligned}$$

Folglich ist R durch ρ und daher auch durch K bestimmt. Beachte, dass auch R^0,

$$R^0(X,Y,Z,W) := g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z), \qquad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

alle Symmetrien von R besitzt, dh. (a) bis (d) in Proposition III.1.2 gelten auch für R^0. Für $\rho^0(X,Y) := R^0(X,Y,X,Y)$ erhalten wir

$$\rho^0(X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2,$$

die mit R^0 assozierte "Schnittkrümmung" ist daher konstant, $K^0 = -1$, siehe (III.9). Daraus folgt nun sofort die zweite Behauptung des Lemmas. □

III.1.5. Bemerkung (Riemannsche Flächen). Für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist der Krümmungstensor R also völlig durch die Skalarkrümmung r bestimmt. Genauer folgt aus Lemma III.1.4, $r = 2K$, $\mathrm{Ric} = Kg$, $G = 0$ und

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -K\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big).$$

Beachte, dass dieses K mit der Gaußkrümmung übereinstimmt, siehe [**3**, Abschnitt 3.7]. Aus Satz II.5.8 erhalten wir den klassischen Satz von Gauß und Bonnet für geschlossene, orientierbare 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K \,\mathrm{vol} = \chi(M), \tag{III.10}$$

denn für die Euler Form gilt in diesem Fall $e(TM, g, \nabla) = \frac{1}{2\pi}K\,\mathrm{vol}$, siehe (II.49).

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $A \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$, so definieren wir die *Divergenz,* $\operatorname{div} A \in \Gamma(\otimes^k T^*M)$, durch $\operatorname{div} A := \mathrm{tr}^g_{12}(\nabla A)$, dh

$$(\operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) := \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k), \quad X_i \in T_xM,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis und erfüllt folgende Rechenregeln.

III.1.6. Lemma. *Für $A, B \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:*

(a) $\operatorname{div}(A + B) = \operatorname{div} A + \operatorname{div} B$
(b) $\operatorname{div}(fA) = f \operatorname{div} A + \mathrm{tr}^g_{12}(df \otimes A)$
(c) $\operatorname{div}(fg) = df$.
(d) $\operatorname{div}(a)\,\mathrm{vol} = di_{\sharp a}\,\mathrm{vol} = L_{\sharp\alpha}\,\mathrm{vol}$, *für* $a \in \Omega^1(M)$.
(e) $\int_M \operatorname{div}(a)\,\mathrm{vol} = 0$, *für* $a \in \Omega^1_c(M)$.

Beweis. Die erste Behauptung (a) ist trivial. Um die zweite Relation einzusehen, sei $X_i \in T_xM$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(fA))(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(fA))(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k) + (e_i \cdot f)A(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f \operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^n (df \otimes A)(e_i, e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f \operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) + (\mathrm{tr}^g_{12}(df \otimes A))(X_1, \dots, X_k)
\end{aligned}$$

und somit (b). Aus $\nabla g = 0$ erhalten wir $\operatorname{div}(g) = 0$ und mittels (b) daher $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{tr}^g_{12}(df \otimes g) = df$, also (c). Für (d) verwenden wir Aufgabe 46 sowie $\nabla \operatorname{vol} = 0$, und erhalten

$$L_{\sharp a} \operatorname{vol} = d i_{\sharp a} \operatorname{vol} = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{\sharp a} \operatorname{vol}) = \sum_{i=1}^n e^i \wedge (i_{\nabla_{e_i} \sharp a} \operatorname{vol})$$

$$= \sum_{i=1}^n e^i(\nabla_{e_i} \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\nabla \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\sharp_2 \nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}^g(\nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{div}(a) \operatorname{vol}.$$

Die letzte Behauptung folgt aus (d) und dem Satz von Stokes. □

III.1.7. Proposition (Kontrahierte Bianchi Identität). *Der Einstein Tensor einer Riemannsche Mannigfaltigkeit erfüllt*

$$\operatorname{div} G = 0, \qquad \textit{dh. es gilt} \qquad \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \tfrac{1}{2} dr.$$

Beweis. Es sei $e_1, \ldots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen. Die Bianchi Identität (III.7) besagt

$$(\nabla_{e_i} R)(e_j, X) + (\nabla_{e_j} R)(X, e_i) + (\nabla_X R)(e_i, e_j) = 0$$

also

$$g\big((\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0$$

und mittels der Symmetrien aus Proposition III.1.2

$$-g\big((\nabla_{e_i} R)(e_i, e_j)X, e_j\big) - g\big((\nabla_{e_j} R)(e_j, e_i)X, e_i\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0.$$

Summation über i und j liefert

$$-\sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_i} R)(e_i, X) - \sum_j (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_j} R)(e_j, X) + \sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_X R)(e_i, e_i) = 0$$

Da $\operatorname{tr}_{24}(\nabla_Y R) = \nabla_Y(\operatorname{tr}_{24} R) = -\nabla_Y \operatorname{Ric}$, erhalten wir

$$\sum_i (\nabla_{e_i} \operatorname{Ric})(e_i, X) + \sum_j (\nabla_{e_j} \operatorname{Ric})(e_j, X) - \sum_i (\nabla_X \operatorname{Ric})(e_i, e_i) = 0,$$

also

$$2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})(X) = \operatorname{tr}^g(\nabla_X \operatorname{Ric}) = \nabla_X(\operatorname{tr}^g \operatorname{Ric}) = \nabla_X r = X \cdot r = (dr)(X).$$

Dies zeigt die zweite Gleichung, $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr$. Zusammen mit Lemma III.1.6 folgt nun sofort $\operatorname{div} G = 0$. □

III.1.8. Satz (Schur). *Ist (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche n-Mannigfaltigkeit, dann gilt:*
(a) Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $G = fg$, dann ist f konstant.
Ist darüberhinaus $n \neq 2$, so gilt weiters:[8]

[8] Beachte jedoch, dass (a) für $n = 2$ trivialerweise erfüllt ist, da in diesem Fall ohnenhin stets $G = 0$ gilt, siehe Bemerkung III.1.5.

(b) Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ric} = fg$*, dann ist f konstant.*
(c) Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $K_x(\xi) = f(x)$ für alle Ebenen $\xi \subseteq T_xM$, dann ist f konstant. In anderen Worten: ist die Schnittkrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.[9]

Beweis. Ad (a): Aus $G = fg$ erhalten wir durch Kontraktion $\operatorname{tr} G = nf$, insbesondere muss f also glatt sein. Mit der kontrahierten Bianchi Identität in Proposition III.1.7 und Lemma III.1.6(c) folgt nun $0 = \operatorname{div} G = \operatorname{div}(fg) = df$, und somit muss f konstant sein. Ad (b): Aus $\mathrm{Ric} = fg$ folgt $G = (f - \frac{r}{2})g$ und mittels (a) sehen wir, dass $f - \frac{r}{2}$ konstant sein muss. Kontraktion liefert weiters $r = \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric} = \operatorname{tr}^g(fg) = nf$. Da $n \neq 2$ vorausgesetzt wurde, impliziert dies, dass auch f konstant ist. Ad (c): Mittels Lemma III.1.4 erhalten wir in diesem Fall $\mathrm{Ric} = (n-1)fg$, die Behauptung folgt daher aus (b). □

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi–Civita Konnexion ∇ und Riemannschen Krümmungstensor R. Weiters bezeichne $S \subseteq M$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Mittels $g|_S \in \Gamma(S^2T^*M|_S)$ erhalten wir eine orthogonale Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$. Die Einschränkung von $g|_S$ auf TS liefert eine Riemannsche Metrik $g_S \in \Gamma(S^2T^*S)$ auf S. Die Einschränkung von $g|_S$ auf $T^\perp S$ liefert eine Euklidische Metrik $g^\perp \in \Gamma(S^2(T^\perp S)^*)$ auf dem Normalenbündel $T^\perp S$. Wir bezeichnen die assozierten Orthogonalprojektionen mit $P : TM|_S \to TS$ und $Q : TM|_S \to T^\perp S$. Betrachte folgende die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\nabla^S_X Y &:= P(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\mathrm{II}(X, Y) &:= Q(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\nabla^\perp_X \xi &:= Q(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)\\
B_X(\xi) &:= -P(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)
\end{aligned}$$

Dabei wird II als *zweite Fundamentalform* bezeichnet, und B heißt *Weingartenabbildung.*

III.1.9. Satz. *Für $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ und $\xi, \eta \in \Gamma(T^\perp S)$ gilt:*
(a) ∇^S ist eine torsionsfreie mit g_S kompatible lineare Konnexion auf TS und stimmt daher mit der Levi–Civita Konnexion von (S, g_S) überein.
(b) $\nabla^\perp$ ist eine mit $g^\perp$ kompatible lineare Konnexion auf $T^\perp S$.
(c) Die zweite Fundamentalform II *bildet ein Tensorfeld auf S, genauer haben wir* $\mathrm{II} \in \Gamma(S^2T^*S \otimes T^\perp S)$*, insbesondere also* $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X)$*.*

[9] Auch die ersten beiden Aussagen lassen sich ähnlich interpretieren. Etwa können wir die Ricci Krümmung äquivalent als eine Abbildung auffassen, die jeder Geraden $\xi \subseteq T_xM$ die Zahl $\mathrm{Ric}(X, X)/g(X, X)$ zuordnet, wobei X eine Basis des 1-dimensionalen Teilraums ξ bildet. Dies ist offensichtlich unabhängig vom verwendeten Basisvektor und enthält die volle Information über den Riccitensor, da dieser symmetrisch ist (Polarisieren). Behauptung (b) lässt sich daher auch wie folgt formulieren: ist die Riccikrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.

(d) Die Weingartenabbildung B bildet ein Tensorfeld auf S, genauer haben wir $B \in \Gamma(T^*S \otimes (T^\perp S)^* \otimes TS)$, und es gilt die sogenannte Weingarten Gleichung $g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) = g_S(Y, B_X\xi)$.

(e) Bezeichnet R^S die Riemannkrümmung von (S, g_S), dann gilt die sogenannte Gauß Gleichung, *vgl.* [**3**, Abschnitt 3.7],

$$g(R_{X,Y}Z,W) = g_S(R^S_{X,Y}Z,W) \\ + g^\perp\big(\mathrm{II}(X,Z),\mathrm{II}(Y,W)\big) - g^\perp\big(\mathrm{II}(Y,Z),\mathrm{II}(X,W)\big).$$

(f) Bezeichnet $R^\perp$ die Krümmung der Konnexion $\nabla^\perp$ auf $T^\perp S$, dann gilt

$$g(R_{X,Y}\xi,\eta) = g^\perp(R^\perp_{X,Y}\xi,\eta) - g_S(B_Y\xi, B_X\eta) + g_S(B_X\xi, B_Y\eta).$$

(g) Es gilt die Codazzi–Mainardi Gleichung,

$$g(R_{X,Y}Z,\xi) = g^\perp\big((\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z),\xi\big) - g^\perp\big((\tilde\nabla_Y \mathrm{II})(X,Z),\xi\big)$$

wobei $\tilde\nabla$ die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $S^2T^*S \otimes T^\perp S$ induziert Konnexion bezeichnet, dh. $(\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z) = \nabla^\perp_X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(\nabla^S_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, \nabla^S_X Z)$.

Beweis. Offensichtlich sind alle vier Ausdrücke $C^\infty(M)$ linear in X. Wenden wir auf die Gleichung $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X\cdot f)Y$ die Projektion P and so erhalten wir $\nabla^S_X(fY) = f\nabla^S_X Y + (X\cdot f)Y$, denn $P(Y) = Y$. Anwenden von Q liefert $\mathrm{II}(X,fY) = f\,\mathrm{II}(X,Y)$, denn $Q(Y) = 0$. Analog erhalten wir aus $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X\xi + (X\cdot f)\xi$ durch Anwenden von Q bzw. P die Gleichungen $\nabla^\perp_X(f\xi) = f\nabla^\perp_X\xi + (X\cdot f)\xi$ und $B_X(f\xi) = fB_X(\xi)$, denn $Q(\xi) = \xi$ und $P(\xi) = 0$. Wir schließen daraus, dass ∇^S und $\nabla^\perp$ lineare Konnexionen darstellen, und II und B Tensorfelder sind.

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$. Wenden wir darauf P folgt $\nabla^S_X Y - \nabla^S_Y X - [X,Y] = 0$, denn $P([X,Y]) = [X,Y]$. Somit ist auch ∇^S torsionsfrei. Wenden wir auf die selbe Gleichung Q an, so erhalten wir $\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = 0$, denn $Q([X,Y]) = 0$, also ist $\mathrm{II}(X,Y)$ symmetrisch in X und Y.

Wegen $\nabla g = 0$ gilt $Z\cdot g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ und somit auch $Z\cdot g_S(X,Y) = g_S(\nabla^S_Z X, Y) + g_S(X, \nabla^S_Z Y)$, also ist ∇^S mit g_S verträglich. Analog folgt aus $Z\cdot g(\xi,\eta) = g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta)$, dass $\nabla^\perp$ mit $g^\perp$ kompatibel ist. Schließlich erhalten wir aus $0 = X\cdot g(Y,\xi) = g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)$ auch $0 = g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) - g(Y, B_X\xi)$.

Damit sind (a) bis (d) gezeigt. Darüberhinaus gilt bezüglich der orthogonalen Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$,

$$\nabla^{TM|_S} = \nabla^S \oplus \nabla^\perp + \begin{pmatrix} 0 & -B \\ \mathrm{II} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Matrix als Element in $\Omega^1\big(S;\mathrm{end}(TS\oplus T^\perp S)\big)$ auffassen. Aus Proposition II.4.2(c)&(d) erhalten wir daraus

$$R^{TM|_S} = \begin{pmatrix} R^S & 0 \\ 0 & R^\perp \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d^{\nabla''}B \\ d^{\nabla'}\mathrm{II} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B\wedge \mathrm{II} & 0 \\ 0 & \mathrm{II}\wedge B \end{pmatrix} \tag{III.11}$$

wobei ∇' bzw. ∇'' die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $\hom(TS,T^\perp S)$ bzw. $\hom(T^\perp S,TS)$ induzierten Konnexionen bezeichnen. Die beiden Gleichungen für die Diagonaleinträge liefern zusammen mit der Weingartengleichung (d) sofort (e) und (f). Wegen der Torsionsfreiheit gilt weiters $(d^{\nabla'}\mathrm{II})(X,Y,Z) = (\tilde\nabla_X\mathrm{II})(Y,Z) - (\tilde\nabla_Y\mathrm{II})(X,Z)$, folglich liefert der linke untere Eintrag in (III.11) die Codazzi–Mainardi Gleichung (g). □

Unter einer (lokalen) *Isometrie* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir einen (lokalen) Diffeomorphismus $f\in\mathrm{Diff}(M)$ mit $f^*g=g$. Offensichtlich bildet die Menge aller Isometrien eine Untergruppe von $\mathrm{Diff}(M)$, die wir mit $\mathrm{Isom}(M,g)$ bezeichnen. Für jede Isometrie f gilt $f^*\nabla=\nabla$, denn die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ ist mit g kompatibel, $(f^*\nabla)g=(f^*\nabla)(f^*g)=f^*(\nabla g)=f^*0=0$, und torsionsfrei, $\mathrm{Tor}^{f^*\nabla}(f^*X,f^*Y)=(f^*\nabla)_{f^*X}(f^*Y)-(f^*\nabla)_{f^*Y}(f^*X)-[f^*X,f^*Y]=f^*(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y])=f^*\mathrm{Tor}^\nabla(X,Y)=f^*0=0$, und muss daher wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 mit der Levi–Civita Konnexion übereinstimmen, dh. $f^*\nabla=\nabla$. Für die Krümmung folgt $f^*R=R$, $f^*\mathrm{Ric}=\mathrm{Ric}$, $f^*r=r$ und $f^*K=K$, genauer $K(T_xf\cdot\xi)=K(\xi)$, für jede Ebene $\xi\subseteq T_xM$.

Der Fluss eines Vektorfeldes X ist genau dann eine (lokale) Isometrie, wenn $L_Xg=0$ gilt, denn $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Fl}_t^X)^*g=(\mathrm{Fl}_t^X)^*(L_Xg)$. Solche Vektorfelder werden *Killing Vektorfelder,* genannt sie können als *infinitesimale Isometrien* interpretiert werden. Eine einache Rechnung, vgl. Aufgabe 50, zeigt

$$L_Xg = 2\mathrm{sym}\nabla X, \quad \text{dh.} \quad (L_Xg)(Y,Z) = g(\nabla_YX,Z)+g(\nabla_ZX,Y). \tag{III.12}$$

Killing Vektorfelder sind daher durch die Gleichung $\mathrm{sym}\nabla X=0$ charakterisiert. Insbesondere ist jedes parallele Vektorfeld $\nabla X=0$ auch ein Killing Vektorfeld.

III.1.10. Beispiel (Euklidische Geometrie, $K=0$). Betrachte den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Riemannschen Metrik

$$g = dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^n\otimes dx^n.$$

Die triviale Konnexion auf $T\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich mit g kompatibel und torsionsfrei. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 sehen wir daher, dass die Levi–Civita Konnexion von $(\mathbb{R}^n,g)$ mit der trivialen Konnexion übereinstimmt. Insbesondere sind die Koordinatenvektorfelder parallel, dh. $\nabla\frac{\partial}{\partial x^i}=0$, und daher $R=0$. Der flache Euklidische Raum hat daher konstante Schnittkrümmung $K=0$. Beachte, dass jede affine Abbildung $f(x)=Ax+b$ mit $A\in\mathrm{O}_n$ und $b\in\mathbb{R}^n$, eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n,g)$ ist.

Analog sieht man, dass der sogenannte *flache Torus,* $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ mit Riemannscher Metrik $g := \theta^1 \otimes \theta^1 + \cdots + \theta^n \otimes \theta^n$, eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K = 0$ darstellt. Hier ist $\theta^i := p_i^* \theta \in \Omega^1(T^n)$, wobei $p_i : T^n \to S^1$ die Projektion auf die i-te Koordinate und $\theta \in \Omega^1(S^1)$ die standard Winkelform bezeichnen. Beachte, dass die glatte Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$ eine lokale Isometrie bildet.

III.1.11. Beispiel (Sphärische Geometrie, $K > 0$). Es sei $r > 0$ und es bezeichne $S := S^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre mit Radius r. Wir versehen S^n_r mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $g = \sum_{i=0}^n dx^i \otimes dx^i$ induzierten Riemannschen Metrik g_S. Betrachte das radiale Vektorfeld $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, $N(x) := x = \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Beachte, dass N normal auf S steht, und $g^\perp(N, N) = r^2$ gilt. Aus $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ folgt $\nabla N = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$, und mit Hilfe der Weingartengleichung, siehe Proposition III.1.9(d), daher $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$. Zusammen mit der Gauß Gleichung aus Proposition III.1.9(e), liefert dies

$$0 = g_S(R^S_{X,Y} X, Y) + \tfrac{1}{r^2} g_S(X, X) g_S(Y, Y) - \tfrac{1}{r^2} g_S(X, Y) g_S(X, Y).$$

Daraus folgt nun, dass S^n_r konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, dass jedes $A \in \mathrm{O}_{n+1}$ eine Isometrie von S^n_r darstellt, dh. $\mathrm{O}_{n+1} \subseteq \mathrm{Isom}(S^n_r)$. Wir werden später sehen, dass jede Isometrie der Sphäre von dieser Form ist, dh. $\mathrm{O}_{n+1} = \mathrm{Isom}(S^n_r)$.

III.1.12. Beispiel (Hyperbolische Geometrie, $K < 0$). Betrachte wieder $\mathbb{R}^{n+1}$, nun aber mit der pseudo Riemannschen Metrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$. Für $r > 0$ bildet das Hyperboloid $S = H^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x, x) = -r^2\}$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit und g induziert eine (positiv definite) Riemannsche Metrik g_S auf H^n_r. Wie im vorangehenden Beispiel folgt $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$, jedoch gilt nun $g^\perp(N, N) = -r^2$, denn $g^\perp$ ist negativ definit. Aus der Gauß Gleichung folgt dann wie zuvor, dass H^n_r konstante Schnittkrümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, $\mathrm{O}(1, n) \subseteq \mathrm{Isom}(H^n_r)$, tatsächlich gilt auch hier wieder Gleichheit.

III.1.13. Proposition (Variationsformeln). *Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Volumsform* vol*, Levi–Civita Konnexion ∇, und assozierten Krümmungstensoren R,* Ric *und r. Weiters sei g_t, $t \in \mathbb{R}$, eine glatte Familie von Riemannmetriken auf M mit $g_0 = g$, und es bezeichne $\dot{g} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2 T^* M)$. Schließlich definieren wir auf $S^2 T^* M$ eine Euklidische Metrik*

$$\langle h, k \rangle := \operatorname{tr} \operatorname{tr}_{13}(h \otimes k) = \sum_{i,j=1}^n h(e_i, e_j) k(e_i, e_j), \qquad h, k \in S^2 T^*_x M,$$

wobei dies unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. In dieser Situation gelten die folgenden Variationsformeln, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $\dot{\mathrm{vol}} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \mathrm{vol}^{g_t} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \dot{g} = \frac{1}{2} \langle g, \dot{g} \rangle$.

(b) Mit $\dot\nabla := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \nabla^{g_t} \in \Gamma(S^2T^*M \otimes TM)$ *gilt*

$$g(\dot\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z \dot g)(X,Y)\Big).$$

und daher auch $\operatorname{tr}_{23} \dot\nabla = \frac{1}{2} d \operatorname{tr}(\dot g)$ *und* $\operatorname{tr}_{12} \dot\nabla = \operatorname{div} \dot g - \frac{1}{2} d \operatorname{tr}(\dot g)$.

(c) Mit $\dot R := \frac{\partial}{\partial t}|_0 R^{g_t}$ *gilt* $\dot R_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot\nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y \dot\nabla)(X,Z)$.

(d) Mit $\dot r := \frac{\partial}{\partial t}|_0 r^{g_t}$ *gilt*

$$\dot r = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12} \dot\nabla) - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23} \dot\nabla) = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}\operatorname{div} \dot g + \Delta \operatorname{tr}(\dot g),$$

wobei wird der Laplace Operator auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ *durch* $\Delta f := -\operatorname{div} df = -\operatorname{tr} \nabla\nabla f$ *definiert ist.*

Beweis. Es sei $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte orthonormale Basis von T_xM bezüglich $g = g_0$, und es bezeichnet $e^1, \dots, e^n \in T_x^*M$ die duale Basis, $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Für beliebiges t gilt dann

$$\operatorname{vol}_x^{g_t} = \sqrt{\det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big)}\, e^1 \wedge \dots \wedge e^n. \tag{III.13}$$

Zusammen mit $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}\big(\dot g(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}(\dot g) = \langle g, \dot g\rangle$ folgt nun (a). Ableiten von (III.4) liefert

$$\begin{aligned} g(\dot\nabla_X Y, Z) + \dot g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\Big(X\cdot \dot g(Y,Z) + Y \cdot \dot g(Z,X) - Z\cdot \dot g(X,Y) \\ &\qquad + \dot g([X,Y],Z) - \dot g([Y,Z],X) + \dot g([Z,X],Y)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z \dot g)(X,Y) \\ &\qquad + 2\dot g(\nabla_X Y, Z)\Big) \end{aligned}$$

und damit (b). Aus Proposition II.4.2(c) erhalten wir $\dot R = d^\nabla \dot\nabla$, dh.

$$\dot R_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot\nabla_Y)Z - (\nabla_Y \dot\nabla_X)Z - \dot\nabla_{[X,Y]} Z.$$

Kombinieren wir dies mit $(\nabla_X \dot\nabla)(Y,Z) = (\nabla_X \dot\nabla_Y)Z - \dot\nabla_{\nabla_X Y} Z$ und $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ so folgt (c). Da $\operatorname{Ric}^{g_t} = -\operatorname{tr}_{24} R^{g_t}$ gilt $\dot{\operatorname{Ric}} = -\operatorname{tr}_{24} \dot R$. Weiters haben wir $r^{g_t} = \operatorname{tr}^{g_t} \operatorname{Ric}^{g_t} = \operatorname{tr}(\sharp_2^{g_t} \operatorname{Ric}^{g_t})$ und somit

$$\dot r = \operatorname{tr}(\dot\sharp_2 \operatorname{Ric}) + \operatorname{tr}(\sharp_2 \dot{\operatorname{Ric}}) = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{tr} \dot{\operatorname{Ric}} = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle - \operatorname{tr}\operatorname{tr}_{24} \dot R.$$

Kombinieren wir dies mit (c) so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot r &= -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle - \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_i} \dot\nabla)(e_j,e_i), e_j\big) + \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_j} \dot\nabla)(e_i,e_i), e_j\big), \\ &= -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23} \dot\nabla) + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12} \dot\nabla), \end{aligned}$$

denn die Levi–Civita Konnexion vertauscht mit Kontraktionen. □

III.1.14. Beispiel (Einstein–Hilbert Wirkung). Es sei M eine orientierte (geschlossene) Mannigfaltigkeit. Zu jeder Riemannschen Metrik g auf M betrachte

$$E(g) := \int_M r \operatorname{vol}, \tag{III.14}$$

wobei r und vol die Skalarkrümmung und Volumsform von g bezeichnen. Wir wollen nun die kritischen Punkte dieser Wirkung bestimmen. Dazu betrachten wir eine beliebige glatte 1-parameter Familie Riemannscher Metriken g_t (Variation der Metrik) mit $g_0 = g$. Setzen wir $\dot g = \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2T^*M)$, so erhalten wir mit Hilfe von Proposition III.1.13(a)&(d) und Lemma III.1.6(e),

$$\begin{aligned}\dot E := \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 E(g_t) &= \int_M \dot r \operatorname{vol} + r\dot{\operatorname{vol}} \\ &= -\int_M \langle \operatorname{Ric} - \tfrac{r}{2} g, \dot g\rangle \operatorname{vol} + \int_M \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12} \dot\nabla - \operatorname{tr}_{23} \dot\nabla) \operatorname{vol} = -\int_M \langle G, \dot g\rangle \operatorname{vol},\end{aligned}$$

wobei $G = \operatorname{Ric} - \frac{r}{2} g$ den Einsteintensor von g bezeichnet. Ist g kritisch, so muss $\dot E$, für jede solche Variation der Metrik verschwinden. Insbesondere können wir $g_t := g + tG$ betrachten, und erhalten aus obiger Formel $\int_M \langle G, G\rangle \operatorname{vol} = 0$, also $G = 0$. Wir sehen daher, dass die kritischen Punkte der Einstein–Hilbert Wirkung (III.14) genau die Riemannschen Metriken g mit verschwindendem Einsteintensor sind, $G = 0$. Für $\dim M \neq 2$ ist die Gleichung $G = 0$ zu $\operatorname{Ric} = 0$ äquivalent, denn $\operatorname{tr} G = (1 - \frac{n}{2}) r$. Beachte, dass nach dem Satz von Gauß–Bonnet, siehe (III.10), die Wirkung $E(g)$ im 2-dimensionalen Fall unabhängig von g ist. Dies ist mit obiger Rechnung verträglich, denn im 2-dimensionalen Fall gilt ja stets $G = 0$, vgl. Bemerkung III.1.5.

III.1.15. Beispiel (Minimalflächen). Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder (geschlossenen) orientierten Teilmannigfaltigkeit S ordnen wir ihr induziertes Volumen zu,

$$V(S) := \int_S \operatorname{vol}_S^g, \tag{III.15}$$

wobei vol_S^g die Volumsform der auf S von g induzierten Riemannschen Metrik g_S bezeichnet. Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Variation der Teilmannigfaltigkeit $S_t := \operatorname{Fl}_t^X(S)$, definiert für hinreichend kleines t. Mit Hilfe von (III.12) und Proposition III.1.13(a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_{S_t} \operatorname{vol}_{S_t}^g = \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_S \operatorname{vol}_S^{(\operatorname{Fl}_t^X)^* g} \\ &= \frac{1}{2}\int_S \operatorname{tr}_S\big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 (\operatorname{Fl}_t^X)^* g\big) \operatorname{vol}_S^g = \frac{1}{2}\int_S \operatorname{tr}_S(L_X g) \operatorname{vol}_S^g = \int_S \operatorname{tr}_S(\nabla X) \operatorname{vol}_S^g .\end{aligned}$$

Zerlegen wir nun X längs S in Tangential- und Normalteil, $X|_S = PX + QX$, dann folgt aus der Weingartengleichung $\operatorname{tr}_S(\nabla X) = \operatorname{tr}_S(\nabla(PX)) + \operatorname{tr}_S(\nabla(QX)) =$

$\mathrm{div}_S(X) - g^\perp(\mathrm{tr}\,\mathrm{II}, QX)$ und somit

$$\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) = \int_S \mathrm{div}(PX)\,\mathrm{vol}_S^g - \int_S g^\perp(\mathrm{tr}\,\mathrm{II}, QX)\,\mathrm{vol}_S^g = -\int_S g^\perp(\mathrm{tr}\,\mathrm{II}, QX)\,\mathrm{vol}_S^g\,.$$

Die kritischen Punkte von (III.15) sind daher genau jene Teilmannigfaltigkeiten S, deren *mittlere Krümmung* $H := \mathrm{tr}\,\mathrm{II} \in \Gamma(T^\perp S)$ verschwindet.

III.1.16. Bemerkung (Kartendarstellungen). Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann existieren $g_{ij} \in C^\infty(U)$ mit

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Für jedes $x \in U$ bildet daher $g_{ij}(x)$ eine symmetrische positiv definite Matrix, $g_{ij} = g_{ji}$. Unter den mit der Karte u assozierten *Christoffel Symbolen* verstehen wir die durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \tfrac{\partial}{\partial u^j} =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial u^k}$$

eindeutig bestimmten lokal definierten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Aus der Formel für die Levi–Civita Konnexion (III.4) erhalten wir sofort

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial u^j} g_{li} - \tfrac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} \Big) \tag{III.16}$$

wobei $g^{kl}(x)$ die zu $g_{ij}(x)$ inverse Matrix bezeichnet, $x \in U$, dh. $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Da die Levi–Civita Konexion torsionsfrei ist, gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Kartendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors $R_{ijk}^l \in C^\infty(U)$

$$R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k} =: \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \tfrac{\partial}{\partial u^l},$$

Aus (III.5) erhalten wir sofort

$$R_{kij}^l = \tfrac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{jk}^l - \tfrac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \Big(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \Big) \tag{III.17}$$

was, zusammen mit (III.16) die Berechung von R erlaubt, wenn die Koordinatendarstellung g_{ij} der Metrik bekannt ist. Beachte, dass die Riemannkrümmung R in nicht linearer Weise von Ableitungen bis zweiter Ordnung der Metrik g abhängt. Mit

$$R_{lkij} := g\big(R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k}, \tfrac{\partial}{\partial u^l}\big) = \sum_{m=1}^n R_{kij}^m g_{ml}$$

lassen sich die Symmetrien in Proposition III.1.2 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} R_{lkij} &= -R_{lkji} \\ R_{lkij} &= -R_{klij} \\ R_{lkij} &= R_{ijlk} \\ 0 &= R_{lkij} + R_{lijk} + R_{ljki} \end{aligned}$$

III.2. Aufgaben zu Kapitel III.

45. Aufgabe. Es sei ∇ eine torsionsfreie Konnexion auf TM. Zeige

$$(d\alpha)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\nabla_{X_i}^{\Lambda^k T^*M} \alpha)(X_0, \ldots, \hat{i}, \ldots, X_k)$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, wobei $\nabla^{\Lambda^k T^*M}$ die induzierte Konnexion auf $\Lambda^k T^*M$ bezeichnet. Daher ist $d\alpha \in \Omega^k(M)$ gerade die Schiefsymmetrisierung von $\nabla\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$.

46. Aufgabe. Ist $e_1, \ldots, e_n$ ein lokaler Rahmen, und bezeichnet $e^1, \ldots, e^n$ den dualen Korahmen, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, dann gilt für jedes $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha.$$

47. Aufgabe. Verifiziere, dass die rechte Seite von (III.9) unabhängig von der Basis X, Y von $\xi \subseteq T_xM$ ist.

48. Aufgabe. Verifiziere (III.13).

49. Aufgabe. Zeige, dass auf S^2 keine Riemannsche Metrik mit $K \leq 0$ existiert. Zeige weiters, dass auf $T^2 = S^1 \times S^1$ keine Riemannsche Metrik mit $K < 0$ und auch keine mit $K > 0$ existiert. *Hinweis:* Verwende die Formel von Gauß–Bonnet, siehe (III.10).

50. Aufgabe. Verifiziere (III.12). *Hinweis: Verwende*

$$(L_X g)(Y, Z) = (X \cdot g)(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]),$$

$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *sowie* $X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.