Differentialgeometrie

Stefan Haller

Dies ist ein Skriptum zu einer Vorlesung über Differentialgeometrie, die ich 2010 und 2011 an der Universität Wien gehalten habe. Es ist unter

`http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGIII2011.html`

erhältlich.

Inhaltsverzeichnis

I. De Rham Kohomologie

Wir werden in diesem Kapitel einige grundlegende Resultate zur de Rham Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten behandeln: Homotopieinvarianz, Mayer–Vietoris Sequenz, Künneth Theorem und Poincaré Dualität. Wir beschränken uns dabei auf randlose Mannigfaltigkeiten, alles lässt sich jedoch leicht auf den berandenten Fall verallgemeinern. Der Aufbau dieses Kapitels folgt in groben Zügen der Darstellung in [**1**, Chapter I], siehe aber etwa auch [**6**] oder [**10**].

I.1. Definition und elementare Eigenschaften. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Wir erinnern uns, siehe [**3**, Abschnitt 4.4], dass das *de Rham Differential,* auch *äußere Ableitung*,

$$d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M),$$

folgende Eigenchaften besitzt:

(a) d ist linear.
(b) $d^2 = 0$, dh. $dd\alpha = 0$ für jedes $\alpha \in \Omega^q(M)$.
(c) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$.
(d) $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$, für jede glatte Abbildung $f : M \to N$ und alle $\alpha \in \Omega^q(N)$.

Die Relation $d^2 = 0$ besagt gerade

$$\operatorname{img}\bigl(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\bigr) \subseteq \ker\bigl(\Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\bigr),$$

dh. jede *exakte* Differentialform, $\alpha = d\beta$, ist auch *geschlossen,* $d\alpha = 0$. I.A. müssen geschlossene Formen aber nicht unbedingt exakt sein.

I.1.1. Definition. Unter der q-ten *de Rham Kohomologie* einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir den reellen Vektorraum

$$H^q(M) := \frac{\ker\bigl(\Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\bigr)}{\operatorname{img}\bigl(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\bigr)}.$$

Ist $\alpha \in \Omega^q(M)$ geschlossen, dann bezeichnen wir mit $[\alpha] \in H^q(M)$ die von α repräsentierte *Kohomologieklasse.* Ist $H^q(M)$ endlich dimensional, dann wird $b^q(M) := \dim H^q(M)$ die *q-te Betti Zahl* von M genannt. Wir sagen M hat *endlich dimensionale Kohomologie* wenn $H^*(M) := \bigoplus_q H^q(M)$ endlich dimensional ist. In diesem Fall wird

$$\chi(M) := \textstyle\sum_q (-1)^q b^q(M)$$

als *Euler Charakteristik* von M bezeichnet.

Wegen der Leibniz-Regel $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ erhalten wir wohldefinierte bilineare Abbildungen

$$H^p(M) \times H^q(M) \xrightarrow{\wedge} H^{p+q}(M), \qquad [\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]. \tag{I.1}$$

Sind nämlich α und β geschlossen, so folgt $d(\alpha \wedge \beta) = 0$, also definiert $\alpha \wedge \beta$ tatsächlich eine Kohomologieklasse $[\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}(M)$. Für $\gamma \in \Omega^{q-1}(M)$ folgt weiters $(\alpha + d\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta)$, und daher $[(\alpha + d\gamma) \wedge \beta] = [\alpha \wedge \beta]$, dh. die Klasse $[\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}(M)$ hängt nicht vom Repräsentanten der Klasse $[\alpha]$ ab. Analog lässt sich zeigen, dass die Kohomologieklasse $[\alpha \wedge \beta]$ auch unabhängig vom Repräsentanten der Klasse $[\beta]$ ist.

Aus den entsprechenden Eigenschaften des Hackproduktes, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ und $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$, $\gamma \in \Omega^r(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 4.3], folgt sofort, dass (I.1) *assotiativ* und *graduiert kommutativ* ist. Genauer, für $a \in H^p(M)$, $b \in H^q(M)$ und $c \in H^r(M)$ gilt

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad \text{sowie} \quad a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a. \tag{I.2}$$

Daher ist $H^*(M) = \bigoplus_q H^q(M)$ eine *assotiative und graduiert kommutative* $\mathbb{R}$-*Algebra.* Ist $M \neq \emptyset$, dann besitzt diese Algebra ein (eindeutiges) *Einselement,* nämlich die von der konstanten Funktion $1 \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ repräsentierte Kohomologieklasse $[1] \in H^0(M)$.

Sei nun $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Wegen der Natürlichkeit des de Rham Differentials, $d \circ f^* = f^* \circ d$, induziert f lineare Abbildungen

$$f^* : H^q(N) \to H^q(M), \qquad f^*([\alpha]) := [f^*\alpha].$$

Für geschlossenes $\alpha \in \Omega^q(N)$ folgt nämlich $df^*\alpha = f^*d\alpha = 0$, also repräsentiert $f^*\alpha$ tatsächlich eine Kohomologieklasse $[f^*\alpha] \in H^q(M)$. Weiters erhalten wir für jedes $\gamma \in \Omega^{q-1}(N)$ sofort $f^*(\alpha + d\gamma) = f^*\alpha + df^*\gamma$, folglich ist die Kohomologieklasse $[f^*\alpha] \in H^q(M)$ unabhängig vom Repräsentanten der Klasse $[\alpha]$. Da $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ ist $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ ein Algebrahomomorphismus,

$$f^*(a \wedge b) = f^*a \wedge f^*b \tag{I.3}$$

für $a \in H^p(N)$ und $b \in H^q(N)$. Weiters gilt offensichtlich

$$\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^q(M)} : H^q(M) \to H^q(M) \tag{I.4}$$

sowie

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^q(P) \to H^q(M) \tag{I.5}$$

für je zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$.

Wir fassen diese Beobachtungen in folgendem Resultat zusammen.

I.1.2. Proposition. *Die de Rham Kohomologie ordnet jeder glatten Mannigfaltigkeit M eine assotiative graduiert kommutative $\mathbb{R}$-Algebra $H^*(M)$, und jeder glatten Abbildung $f : M \to N$ einen Algebrahomomorphismus $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ zu. Diese Zuordnung ist* funktoriell, *dh.* $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^*(M)}$ *und* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ *für je zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$.*

I.1.3. Bemerkung. Da $\Omega^q(M)$ nur für $0 \leq q \leq \dim(M)$ nicht-trivial ist, gilt offenbar $H^q(M) = 0$ falls $q < 0$ oder $q > \dim(M)$.

I.1.4. Bemerkung. Für die 0-te Kohomologie erhalten wir
$$H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) \mid f \text{ ist lokal konstant}\},$$
sie kann daher als ein Maß für die Anzahl der Zuammenhangskomponenten von M verstanden werden. Ist $M \neq \emptyset$ zusammenhängend, dann folgt $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, denn im zusammenhängenden Fall sind lokal konstante Funktionen schon konstant.

I.1.5. Beispiel. Aus obigen Bemerkungen erhalten wir für die einpunktige Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^0$ sofort $H^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R}$ und $H^q(\mathbb{R}^0) = 0$ falls $q \neq 0$. Für die zweipunktige Mannigfaltigkeit $S^0 = \{-1, 1\}$ folgt $H^0(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^q(S^0) = 0$ falls $q \neq 0$.

I.1.6. Bemerkung. Ist M eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension n, dann faktorisiert das Integral $\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ zu einer linearen Abbildung
$$\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\alpha] \mapsto \int_M \alpha, \tag{I.6}$$
denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt $\int_M d\beta = 0$ für jedes $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$. Ist $M \neq \emptyset$ dann lässt sich leicht ein $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\int_M \alpha \neq 0$ konstruieren. Aus Dimensionsgründen ist jedes solche α automatisch geschlossen und repräsentiert daher eine Kohomologieklasse in $[\alpha] \in H^n(M)$. Nach Konstruktion ist $\int_M [\alpha] \neq 0$, und (I.6) daher surjektiv. Für orientierbare geschlossene n-Mannigfaltigkeiten erhalten wir somit $H^n(M) \neq 0$.

I.1.7. Bemerkung. Ist $M = M_1 \sqcup M_2$ die disjunkte Vereinigung zweier glatter Mannigfaltigkeiten, dann induzieren die kanonischen Inklusionen $\iota_1 : M_1 \to M$ und $\iota_2 : M_2 \to M$ für jedes q einen Isomorphismus
$$(\iota_1^*, \iota_2^*) : H^q(M) \xrightarrow{\cong} H^q(M_1) \times H^q(M_2),$$
denn $(\iota_1^*, \iota_2^*) : \Omega^q(M) \to \Omega^q(M_1) \times \Omega^q(M_2)$ sind Isomorphismen die mit den de Rham Differentialen verträglich sind. Diese Bemerkung bleibt offenbar für beliebig viele Summanden richtig, dh. die Inklusionen induzieren natürliche Isomorphismen $H^q(\bigsqcup_i M_i) \cong \prod_i H^q(M_i)$ für i aus einer beliebigen Indexmenge.

I.2. Homotopieinvarianz.

I.2.1. Definition. Zwei glatte Abbildungen $f, g : M \to N$ werden (glatt) *homotop* genannt, falls eine glatte Abbildung $h : M \times I \to N$ existiert, sodass $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$, für alle $x \in M$. In diesem Fall schreiben wir $f \simeq g$. Jedes solche h wird eine glatte *Homotopie* von f nach g genannt.

I.2.2. Bemerkung. Glatt homotop zu sein definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Abbildungen $M \to N$, vgl. Aufgabe 3.

I.2.3. Bemerkung. Sind $f_0 \simeq f_1 : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen und $g_0 \simeq g_1 : N \to P$ zwei weitere glatt homotope Abbildungen, dann ist auch $g_0 \circ f_0$ glatt homotop zu $g_1 \circ f_1$, vgl. Aufgabe 4.

I.2.4. Bemerkung. Sind $f, g : M \to N$ zwei glatte Abbildungen und existiert eine *stetige* Abbildung $h : M \times I \to N$ mit $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$, dann existiert auch eine glatte Homotopie von f nach g, siehe etwa [**4**] oder [**2**, Satz 14.8].

I.2.5. Satz (Homotopieinvarianz)**.** *Sind $f \simeq g : M \to N$ zwei homotope glatte Abbildungen, dann gilt $f^* = g^* : H^q(N) \to H^q(M)$, für alle q.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $h : M \times I \to N$ mit $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = g(x)$, $x \in M$. Betrachte nun die linearen Abbildungen, vgl. Aufgabe 5,

$$k : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M), \qquad k(\alpha) := \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt$$

wobei $\partial_t \in \mathfrak{X}(M \times I)$, $\partial_t(x,t) := \frac{d}{ds}|_{s=t}(x,s)$, und $\iota_t : M \to M \times I$, $\iota_t(x) := (x,t)$. Dann gilt

$$d \circ k + k \circ d = g^* - f^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(M), \tag{I.7}$$

denn für jede Differentialform $\alpha \in \Omega^q(N)$ folgt, vgl. [**3**, Abschnitt 4.9],

$$\begin{aligned} d(k(\alpha)) + k(d\alpha) &= d \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt + \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* d\alpha \, dt \\ &= \int_0^1 \iota_t^* (d i_{\partial t} + i_{\partial_t} d) h^* \alpha \, dt = \int_0^1 \iota_t^* L_{\partial t} h^* \alpha \, dt = \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t} \iota_t^* h^* \alpha \, dt \\ &= \iota_1^* h^* \alpha - \iota_0^* h^* \alpha = (h \circ \iota_1)^* \alpha - (h \circ \iota_0)^* \alpha = g^* \alpha - f^* \alpha. \end{aligned}$$

Für jede geschlossene Differentialform $\alpha \in \Omega^q(N)$ erhalten wir aus (I.7) nun $g^*\alpha = f^*\alpha + d(k(\alpha))$, also $g^*([\alpha]) = f^*([\alpha]) \in H^q(M)$. □

I.2.6. Definition. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird (glatte) *Homotopieäquivalenz* genannt, falls eine glatte Abbildung $g : N \to M$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$. In diesem Fall heißen M und N (glatt) *homotopieäquivalent* und wir schreiben $M \simeq N$. Eine Mannigfaltigkeit wird (glatt) *kontrahierbar* genannt wenn sie homotopieäquivalent zur einpunktigen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^0$ ist.

I.2.7. Bemerkung. Jeder Diffeomorphismus ist offenbar eine glatte Homotopieäquivalenz, diffeomorphe Mannigfaltigkeiten sind daher auch homotopieäquivalent.

I.2.8. Bemerkung. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei glatte Homotopieäquivalenzen, dann ist auch $g \circ f : M \to P$ eine glatte Homotopieäquivalenz. Dies folgt aus Bemerkung I.2.3. Mit $M \simeq N$ und $N \simeq P$ gilt daher auch $M \simeq P$.

I.2.9. Beispiel. Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist die kanonische Projektion $p : M \times \mathbb{R}^k \to M$ eine Homotopieäquivalenz. Betrachte dazu die glatte Abbildung

$\sigma : M \to M \times \mathbb{R}^k$, $\sigma(x) := (x, 0)$. Offensichtlich ist $p \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, es gilt aber auch $\sigma \circ p \simeq \mathrm{id}_{M\times\mathbb{R}^k}$, denn

$$h : (M \times \mathbb{R}^k) \times I \to M \times \mathbb{R}^k, \qquad h(x, v, t) := (x, tv),$$

definiert eine glatte Homotopie von $\sigma \circ p$ zur identischen Abbildung $\mathrm{id}_{M\times\mathbb{R}^k}$.

I.2.10. Korollar. *Jede glatte Homotopieäquivalenz $f : M \to N$ induziert Isomorphismen $f^* : H^q(N) \xrightarrow{\cong} H^q(M)$, für alle q.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$. Aus Satz I.2.5, (I.4) und (I.5) folgt daher $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^*(M)}$ sowie $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{id}_N^* = \mathrm{id}_{H^*(N)}$. Folglich sind $f^* : H^q(N) \to H^q(M)$ und $g^* : H^q(M) \to H^q(N)$ zueinander inverse Isomorphismen. □

I.2.11. Bemerkung. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, und sind die graduierten Algebren $H^*(M)$ und $H^*(N)$ nicht isomorph, dann können M und N nicht homotopieäquivalent (und daher auch nicht diffeomorph) sein. Dies folgt sofort aus Korollar I.2.10.

I.2.12. Korollar. *Für jede kontrahierbare Mannigfaltigkeit M, gilt $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ und $H^q(M) = 0$ falls $q \neq 0$. Insbesondere daher $\chi(M) = 1$. Auf einer kontrahierbaren Mannigfaltigkeit ist also jede geschlossene q-Form, $q \geq 1$, auch exakt.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar I.2.10 und Beispiel I.1.5. □

I.2.13. Beispiel. Jede nicht-leere *konvexe Teilmannigfaltigkeit* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar. Seien dazu $P \in M$, $\iota : \mathbb{R}^0 \to M$, $\iota(0) := P$, und $r : M \to \mathbb{R}^0$, $r(x) := 0$, die konstante Abbildung. Offensichtlich gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^0}$. Wegen der Konvexität von M ist

$$h : M \times I \to M, \qquad h(x, t) := tx + (1 - t)P,$$

eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_M, also $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_M$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und auch die offenen Bälle $B^n_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ kontrahierbar. Auf diesen Mannigfaltigkeiten ist daher jede geschlossene q-Form, $q \geq 1$, auch exakt.

I.2.14. Korollar (Poincaré Lemma)**.** *Für die Kohomologie des Euklidischen Raums gilt*

$$H^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{anderfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar I.2.12, denn $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar. □

I.2.15. Beispiel. Die kanonische Inklusion $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine Homotopieäquivalenz, $n \geq 1$. Bezeichnet nämlich $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ die (glatte) radiale Retraktion, $r(x) := x/|x|$, dann gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$, denn

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad h(x, t) := tx + (1 - t)x/|x|,$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Nach Korollar I.2.10 induziert die Inklusion daher Isomorphismen $H^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^q(S^{n-1})$, für jedes q.

I.2.16. Beispiel. Ist $N \in S^n$ dann liefert die stereographische Projektion einen Diffeomorphismus

$$N^\perp \cong S^n \setminus \{N\}, \qquad x \mapsto N + \frac{2}{|x-N|^2}(x-N),$$

wobei $N^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp N\} \cong \mathbb{R}^n$. Mit $\mathbb{R}^n$ ist daher auch $S^n \setminus \{N\}$ kontrahierbar. Sei nun $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ und $n \geq 1$. Dann ist die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to S^n \setminus \{N, -N\}$, $x \mapsto (x, 0)$, eine Homotopieäquivalenz. Dies folgt aus Beispiel I.2.15, denn die stereographische Projektion schränkt sich zu einem Diffeomorphismus $S^n \setminus \{N, -N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein, und dieser führt die Inklusion $S^{n-1} \to S^n \setminus \{N, -N\}$ in die Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ über.

I.2.17. Beispiel. Wir erinnern uns an den reellen projektiven Raum, siehe [**3**, Abschnitt 2.5],

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \big\{\text{1-dimensionale lineare Teilräume in } \mathbb{R}^{n+1}\big\},$$

eine zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension n. Die offenen Teilmengen $U_i := \{[x^1 : \cdots : x^{n+1}] \mid x^i \neq 0\}$, $1 \leq i \leq n+1$, überdecken $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, und

$$u_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad u_i([x^1 : \cdots : x^{n+1}]) := \big(\tfrac{x^1}{x^i}, \dots, \tfrac{x^{i-1}}{x^i}, \tfrac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \tfrac{x^{n+1}}{x^i}\big)$$

bildet einen glatten Atlas von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Beachte auch, dass die kanonische Abbildung $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, vgl. Aufgabe 7. Offensichtlich besteht $\mathbb{R}\mathrm{P}^0$ nur aus einem Punkt, und wir haben einen Diffeomorphismus $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$, siehe Aufgabe 8.

Sei nun $n \geq 1$. Die Inklusion $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ erlaubt es $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aufzufassen, $[x^1 : \cdots : x^n] \mapsto [x^1 : \cdots : x^n : 0]$. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} = U_{n+1}$ sowie $V := \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{N\}$, wobei $N := [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Da $N \notin \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, haben wir

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = U \cup V.$$

Die Karte u_{n+1} liefert einen Diffeomorphismus $U \cong \mathbb{R}^n$, also ist U kontrahierbar. Die Einschränkung dieser Karte liefert einen Diffeomorphismus $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es gilt daher $U \cap V \simeq S^{n-1}$ nach Beispiel I.2.15. Schließlich ist die kanonische (glatte) Inklusion $\iota : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \to V$ eine Homotopieäquivalenz, denn für die glatte Abbildung

$$r : V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}, \qquad r([x^1 : \cdots : x^{n+1}]) := [x^1 : \cdots : x^n]$$

gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}}$ aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_V$, denn

$$h : V \times I \to V, \qquad h\big([x^1 : \cdots : x^{n+1}], t\big) := [x^1 : \cdots : x^n : tx^{n+1}],$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_V.

I.2.18. Beispiel. Unter dem *komplexen projektiven Raum* verstehen wir

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \big\{1\text{-dimensionale komplexe Teilräume von } \mathbb{C}^{n+1}\big\}.$$

Ist $(z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, dann bezeichnen wir mit $[z^1 : \dots : z^{n+1}] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ den von $(z^1, \dots, z^{n+1})$ aufgespannten 1-dimensionalen komplexen Teilraum. Dies liefert eine surjektive Abbildung

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \qquad \pi(z^1, \dots, z^{n+1}) := [z^1 : \dots : z^{n+1}].$$

Wir versehen $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie, dh. mit der feinsten Topologie für die π noch stetig ist. Einschränken von π auf

$$S^{2n+1} = \big\{(z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z^1|^2 + \dots + |z^{n+1}|^2 = 1\big\}$$

liefert eine stetige surjektive Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die als *Hopf Abbildung* bezeichnet wird. Unter Verwendung der radialen Retraktion $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^{2n+1}$, vgl. Beispiel I.2.15, lässt sich leicht zeigen, dass die Topologie auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich p übereinstimmt. Daraus folgt nun leicht, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ein zusammenhängender kompakter Hausdorffraum ist. Die Teilmengen $U_i := \{[z^1 : \dots : z^{n+1}] : z^i \neq 0\}$, $1 \leq i \leq n+1$, sind offen in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, und wir haben Homöomorphismen

$$u_i : U_i \to \mathbb{C}^n, \qquad u_i([z^1 : \dots : z^{n+1}]) := \big(\tfrac{z^1}{z^i}, \dots, \tfrac{z^{i-1}}{z^i}, \tfrac{z^{i+1}}{z^i}, \dots, \tfrac{z^{n+1}}{z^i}\big),$$

mit Umkehrabbildungen

$$u_i^{-1} : \mathbb{C}^n \to U_i, \qquad u_i^{-1}(w^1, \dots, w^n) := [w^1 : \dots : w^{i-1} : 1 : w^i : \dots : w^n].$$

Die Kartenwechselabbildungen,

$$(u_j \circ u_i^{-1})(w^1, \dots, w^n)$$
$$= \begin{cases} \big(\frac{w^1}{w^{j-1}}, \dots, \frac{w^{i-1}}{w^{j-1}}, \frac{1}{w^{j-1}}, \frac{w^i}{w^{j-1}}, \dots, \frac{w^{j-2}}{w^{j-1}}, \frac{w^j}{w^{j-1}}, \dots, \frac{w^n}{w^{j-1}}\big) & \text{falls } i < j \\ (w^1, \dots, w^n) & \text{falls } i = j \\ \big(\frac{w^1}{w^j}, \dots, \frac{w^{j-1}}{w^j}, \frac{w^{j+1}}{w^j}, \dots, \frac{w^{i-1}}{w^j}, \frac{1}{w^j}, \frac{w^i}{w^j}, \dots, \frac{w^n}{w^j}\big) & \text{falls } i > j \end{cases}$$

sind offensichtlich glatt (sogar holomorph) und orientierungsbewahrend. Also bilden die Karten (U_i, u_i), $1 \leq i \leq n+1$, einen orientierten glatten Atlas von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dadurch wird $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zu einer orientierten zusammenhängenden geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Beachte auch, dass die Hopf Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ glatt ist, vgl. Aufgabe 10. Offensichtlich ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ einpunktig. Weiters existiert ein Diffeomorphismus $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$, vgl. Aufgabe 11.

Sei nun $n \geq 1$. Die Inklusion $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ erlaubt es $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ aufzufassen, $[z^1 : \dots : z^n] \mapsto [z^1 : \dots : z^n : 0]$. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} = U_{n+1}$ sowie $V := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{N\}$, wobei $N := [0 : \dots : 0 : 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Da $N \notin \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ haben wir

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V.$$

Die Karte u_{n+1} liefert einen Diffeomorphismus $U \cong \mathbb{C}^n$, also ist U kontrahierbar. Die Einschränkung dieser Karte liefert einen Diffeomorphismus $U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, es gilt daher $U \cap V \cong S^{2n-1}$ nach Beispiel I.2.15. Schließlich ist die kanonische (glatte) Inklusion $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to V$ eine Homotopieäquivalenz, denn für die glatte Abbildung

$$r : V \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}, \qquad r([z^1 : \cdots : z^{n+1}]) := [z^1 : \cdots : z^n]$$

gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}}$ aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_V$, denn

$$h : V \times I \to V, \qquad h\big([z^1 : \cdots : z^{n+1}], t\big) := [z^1 : \cdots : z^n : tz^{n+1}],$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_V.

I.2.19. Beispiel. Die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine glatte Homotopieäquivalenz, vgl. Aufgabe 12. Auch die Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine glatte Homotopieäquivalenz, vgl. Aufgabe 13.

I.3. Mayer–Vietoris Sequenz. Ist $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen, dann liefert die Mayer–Vietoris Sequenz einen Zusammenhang zwischen der de Rham Kohomologie von U, V, $U \cap V$ und M, siehe Satz I.3.12 unten. Zusammen mit der Homotopieinvarianz ermöglicht dies die Berechnung der de Rham Kohomologie vieler Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen mit einigen algebraischen Vorbereitungen.

Eine Sequenz linearer Abbildungen $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ heißt *exakt bei* V_2, falls $\mathrm{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. Eine Sequenz linearer Abbildungen

$$\cdots \to V_{q-1} \xrightarrow{\varphi_{q-1}} V_q \xrightarrow{\varphi_q} V_{q+1} \xrightarrow{\varphi_{q+1}} V_{q+2} \to \cdots$$

wird *exakt* genannt wenn sie bei jedem V_q exakt ist, dh. wenn $\mathrm{img}(\varphi_{q-1}) = \ker(\varphi_q)$ für jedes q gilt. Unter einer *kurzen exakten Sequenz* linearer Abbildungen verstehen wir eine exakte Sequenz der Form $0 \to V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3 \to 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn ι injektiv ist, π surjektiv ist, und $\mathrm{img}(\iota) = \ker(\pi)$ gilt. In diesem Fall können wir V_1 via ι als Teilraum von V_2 auffassen, und π induziert einen Isomorphismus $\pi : V_2/\iota(V_1) \cong V_3$.

I.3.1. Beispiel. Es sei V ein Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Bezeichnen $\iota : W \to V$ die kanonische Inklusion und $\pi : V \to V/W$ die kanonische Projektion auf den Quotientenraum, dann ist $0 \to W \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} V/W \to 0$ eine kurze exakte Sequenz.

I.3.2. Bemerkung. Eine Sequenz linearer Abbildungen $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \to 0$ ist genau dann exakt, wenn φ ein Isomorphismus ist, denn Exaktheit bei V besagt, dass φ injektiv ist, und Exaktheit bei W bedeutet, dass φ surjektiv ist.

I.3.3. Bemerkung. Ist $\cdots \to V_q \xrightarrow{\varphi_q} V_{q+1} \xrightarrow{\varphi_{q+1}} V_{q+2} \to \cdots$ eine exakte Sequenz endlich dimensionaler Vektorräume, und $V_q = 0$ für fast alle q, dann gilt

$$\textstyle\sum_q (-1)^q \dim V_q = 0.$$

Wegen der Exaktheit haben wir nämlich Isomorphismen $V_q/\ker\varphi_q \cong \operatorname{img}\varphi_q = \ker\varphi_{q+1}$, also $\dim V_q = \dim\ker\varphi_q + \dim\ker\varphi_{q+1}$. Aufaddieren dieser Gleichungen liefert nun

$$\textstyle\sum_q (-1)^q \dim V_q = \sum_q (-1)^q \dim\ker\varphi_q + \sum_q (-1)^q \dim\ker\varphi_{q+1} = 0,$$

denn die Dimensionen der Kerne kürzen sich teleskopartig.

I.3.4. Bemerkung. Sind $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ und $W_1 \xrightarrow{\psi_1} W_2 \xrightarrow{\psi_2} W_3$ exakte Sequenzen linearer Abbildugen, dann ist offensichtlich auch

$$V_1 \oplus W_1 \xrightarrow{\varphi_1\oplus\psi_1} V_2 \oplus W_2 \xrightarrow{\varphi_2\oplus\psi_2} V_3 \oplus W_3$$

exakt, denn $\operatorname{img}(\varphi_1\oplus\psi_1) = \operatorname{img}(\varphi_1)\oplus\operatorname{img}(\psi_1) = \ker(\varphi_2)\oplus\ker(\psi_2) = \ker(\varphi_2\oplus\psi_2)$.

I.3.5. Bemerkung. Es sei $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine Sequenz linearer Abbildungen und $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, dh. $\operatorname{img}(\varphi_1) \subseteq \ker(\varphi_2)$. In dieser Situation sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Die Sequenz ist exakt, dh. $\operatorname{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$.
(b) Es existieren lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$, sodass $\mathrm{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$.

Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial, für $v_2 \in \ker(\varphi_2)$ folgt $v_2 = \varphi_1 h_1 v_2 + h_2\varphi_2 v_2 = \varphi_1 h_1 v_2$, dh. $v_2 \in \operatorname{img}(\varphi_1)$. Nun zur umgekehrten Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Da $\varphi_1 : V_1 \to \operatorname{img}(\varphi_1)$ surjektiv ist, existiert eine lineare Abbildung $\bar h_1 : \operatorname{img}(\varphi_1) \to V_1$ mit $\varphi_1 \circ \bar h_1 = \mathrm{id}_{\operatorname{img}(\varphi_1)}$. Wir dehnen $\bar h_1$ zu einer linearen Abbildung $h_1 : V_2 \to V_1$ aus, nach Konstruktion verschwindet daher $\mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1 : V_2 \to V_2$ auf dem Teilraum $\operatorname{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2) \subseteq V_2$. Diese Differenz faktorisiert daher zu einer linearen Abbildung $\bar h_2 : \operatorname{img}(\varphi_2) = V_2/\ker(\varphi_2) \to V_2$, dh. $\bar h_2 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1$. Setzen wir nun $\bar h_2$ zu einer linearen Abbildung $h_2 : V_3 \to V_2$ fort, dann gilt die gewünschte Relation $h_2 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1$.

I.3.6. Bemerkung. Ist $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen und W ein weiterer Vektorraum, dann ist auch die Sequenz

$$V_1 \otimes W \xrightarrow{\varphi_1\otimes\mathrm{id}_W} V_2 \otimes W \xrightarrow{\varphi_2\otimes\mathrm{id}_W} V_3 \otimes W \tag{I.8}$$

exakt. Es gilt nämlich $(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \otimes \mathrm{id}_W = 0 \otimes \mathrm{id}_W = 0$, also $\operatorname{img}(\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) \subseteq \ker(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W)$. Für die umgekehrte Inklusion wählen wir lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$ mit $\mathrm{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$, siehe Bemerkung I.3.5. Tensorieren mit W liefert lineare Abbildungen $h_1 \otimes \mathrm{id}_W : V_2 \otimes W \to V_1 \otimes W$ und $h_2 \otimes \mathrm{id}_W : V_3 \otimes W \to V_2 \otimes W$ und diese erfüllen

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{V_2\otimes W} = \mathrm{id}_{V_2} \otimes \mathrm{id}_W &= (\varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2) \otimes \mathrm{id}_W \\ &= (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (h_1 \otimes \mathrm{id}_W) + (h_2 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W).\end{aligned}$$

Aus Bemerkung I.3.5 folgt daher, dass (I.8) exakt ist.

I.3.7. Bemerkung. Ist $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen, dann ist auch die duale Seqeunz

$$V_1' \xleftarrow{\varphi_1'} V_2' \xleftarrow{\varphi_2'} V_3' \tag{I.9}$$

exakt. Dabei bezeichnen $V_q' = L(V_q, \mathbb{R})$ die Dualräume und φ_q' die dualen Abbildungen. Zunächst gilt nämlich $\varphi_1' \circ \varphi_2' = (\varphi_2 \circ \varphi_1)' = 0$, also $\operatorname{img}(\varphi_2') \subseteq \ker(\varphi_1')$. Um auch die umgekehrte Inklusion $\operatorname{img}(\varphi_2') \supseteq \ker(\varphi_1')$ einzusehen, wählen wir lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$ mit $\mathrm{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$, siehe Bemerkung I.3.5. Dualisieren liefert lineare Abbildungen $h_1' : V_1' \to V_2'$ und $h_2' : V_2' \to V_3'$ mit $\mathrm{id}_{V_2'} = \mathrm{id}_{V_2}' = (\varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2)' = h_1' \circ \varphi_1' + \varphi_2' \circ h_2'$, aus Bemerkung I.3.5 folgt daher, dass (I.9) exakt ist.

I.3.8. Lemma (Fünferlemma)**.** *Es sei*

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "\psi_1"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_5 \\
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[u, "\cong"', "\lambda_1"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, "\cong"', "\lambda_2"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[u, "\lambda_3"] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[u, "\cong"', "\lambda_4"] & V_5 \arrow[u, "\cong"', "\lambda_5"]
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm[1] *linearer Abbildungen mit exakten Zeilen. Sind in dieser Situation λ_1, λ_2, λ_4 und λ_5 Isomorphismen, dann ist auch λ_3 ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass λ_3 injektiv ist. Sei dazu $v_3 \in V_3$ mit $\lambda_3 v_3 = 0$. Es folg $\lambda_4\varphi_3 v_3 = \psi_3\lambda_3 v_3 = 0$, also $\varphi_3 v_3 = 0$ aufgrund der Injektivität von λ_4. Wegen der Exaktheit bei V_3 existiert also $v_2 \in V_2$ mit $\varphi_2 v_2 = v_3$. Es folgt $\psi_2\lambda_2 v_2 = \lambda_3\varphi_2 v_2 = \lambda_3 v_3 = 0$, wegen der Exaktheit bei W_2 finden wir daher $w_1 \in W_1$ mit $\psi_1 w_1 = \lambda_2 v_2$. Da λ_1 surjektiv ist existiert $v_1 \in V_1$ mit $\lambda_1 v_1 = w_1$. Wir erhalten $\lambda_2\varphi_1 v_1 = \psi_1\lambda_1 v_1 = \psi_1 w_1 = \lambda_2 v_2$, also $\varphi_1 v_1 = v_2$ aufgrund der Injektivität von λ_2. Dies impliziert nun $v_3 = \varphi_2 v_2 = \varphi_2\varphi_1 v_1 = 0$, denn $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ wegen der Exaktheit bei V_2. Also ist λ_3 injektiv.

Es bleibt noch die Surjektivität von λ_3 zu zeigen. Sei dazu $w_3 \in W_3$. Da λ_4 surjektiv ist, existiert $v_4 \in V_4$ mit $\psi_3 w_3 = \lambda_4 v_4$. Es folgt $\lambda_5\varphi_4 v_4 = \psi_4\lambda_4 v_4 = \psi_4\psi_3 w_3 = 0$, denn $\psi_4 \circ \psi_3 = 0$ wegen der Exaktheit bei W_4. Da λ_5 injektiv ist, schließen wir $\varphi_4 v_4 = 0$. Aufgrund der Exaktheit bei V_4 existiert daher $v_3 \in V_3$ mit $\varphi_3 v_3 = v_4$. Wir erhalten nun $\psi_3(w_3 - \lambda_3 v_3) = \psi_3 w_3 - \lambda_4\varphi_3 v_3 = \lambda_4 v_4 - \lambda_4 v_4 = 0$. Wegen der Exaktheit bei W_3 existiert daher $w_2 \in W_2$ mit $\psi_2 w_2 = w_3 - \lambda_3 v_3$. Da λ_2 surjektiv ist, finden wir $v_2 \in V_2$ mit $\lambda_2 v_2 = w_2$. Es folgt nun $\lambda_3(v_3 + \varphi_2 v_2) = \lambda_3 v_3 + \psi_2\lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \psi_2 w_2 = w_3$. Daher ist λ_3 auch surjektiv, und der Beweis vollständig. □

I.3.9. Bemerkung. Ist $0 \to V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz linearer Abbildungen, dann gilt $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$ und daher insbesondere $\dim V_2 =$

[1] Dh. $\psi_i \circ \lambda_i = \lambda_{i+1} \circ \varphi_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

$\dim V_1 + \dim V_3$. Wegen der Surjektivität von π existiert nämlich eine lineare Abbildung $\sigma : V_3 \to V_2$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{V_3}$, und wir erhalten eine lineare Abbildung $\iota + \sigma : V_1 \oplus V_3 \to V_2$, $(v_1, v_3) \mapsto \iota v_1 + \sigma v_3$. Offenbar kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & V_2 \arrow[r, "\pi"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "i"] & V_1 \oplus V_3 \arrow[r, "p"] \arrow[u, "\iota+\sigma"'] & V_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei $i : V_1 \to V_1 \oplus V_3$, $i(v_1) := (v_1, 0)$ und $p : V_1 \oplus V_3 \to V_3$, $p(v_1, v_3) := v_3$. Beachte, dass in diesem Diagramm auch die zweite Zeile exakt ist, nach Lemma I.3.8 ist also $\iota + \sigma$ der gesuchte Isomorphismus.

I.3.10. Bemerkung. Es sei $V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen. Sind in dieser Situation V_1 und V_3 endlich dimensional, dann ist auch V_2 endlich dimensional. Dies folgt aus Bemerkung I.3.9, denn $0 \to V_1/\ker(\iota) \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{img}(\pi) \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz.

Unter einem *Kokettenkomplex* Ω^* verstehen wir eine Familie von Vektorräumen Ω^q, $q \in \mathbb{Z}$, zusammen mit linearen Abbildungen $d^q : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$ sodass $d^{q+1} \circ d^q = 0$, für alle q. Das an dieser Stelle wichtigeste Beispiel ist der de Rham Komplex einer glatten Mannigfaltigkeit M, dh. $\Omega^*(M)$ mit der äußeren Ableitung, wir werden später aber auch einige Variationen davon betrachten. Jedem Kokettenkomplex können wir seine Kohomologie $H^q(\Omega) = \ker(d^q)/\,\mathrm{img}(d^{q-1})$ zuordnen. Für den de Rham Komplex $\Omega^*(M)$ erhalten wir natürlich die de Rham Kohomologie $H^*(M)$.

Unter einer Komplexabbildung $\varphi : \Omega^* \to \tilde{\Omega}^*$ zwischen Kokettenkompelxen Ω^* und $\tilde{\Omega}^*$ verstehen wir eine Familie linearer Abbildungen $\varphi^q : \Omega^q \to \tilde{\Omega}^q$, $q \in \mathbb{Z}$, sodass $\varphi^{q+1} \circ d^q = \tilde{d}^q \circ \varphi^q$, für alle q. Jede solche Komplexabbildung induziert lineare Abbildungen in der Kohomologie, $\varphi : H^q(\Omega) \to H^q(\tilde{\Omega})$. Ist $f : M \to N$ glatt, dann liefert der Pullback von Differentialformen eine Komplexabbildung $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$, die induzierten Abbildungen in der Kohomologie sind genau die in Abschnitt I.1 behandelten.

Unter einer *kurzen exakten Sequenz von Kokettenkomplexen* verstehen wir eine Sequenz von Komplexabbildungen $0 \to \Omega_1^* \xrightarrow{\iota} \Omega_2^* \xrightarrow{\pi} \Omega_3^* \to 0$, sodass $0 \to \Omega_1^q \xrightarrow{\iota} \Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q \to 0$ für jedes q exakt ist.

I.3.11. Satz. *Ist* $0 \to \Omega_1^* \xrightarrow{\iota} \Omega_2^* \xrightarrow{\pi} \Omega_3^* \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen, dann existiert eine natürliche* lange exakte Sequenz *der Form*

$$\cdots \xrightarrow{\pi} H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} \cdots$$

Die lineare Abbildung ∂ wird dabei als Einhängungshomomorphismus *bezeichnet.*

Beweis. Wir beginnen mit der Exaktheit bei $H^q(\Omega_2)$. Nach Voraussetzung ist $\pi \circ \iota = 0 : \Omega_1^q \to \Omega_3^q$, für die induzierten Abbildungen in der Kohomologie gilt daher ebenfalls $\pi \circ \iota = 0 : H^q(\Omega_1) \to H^q(\Omega_3)$, dh.

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr). \tag{I.10}$$

Um auch die umgekehrte Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \tag{I.11}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_2)$, $\alpha \in \Omega_2^q$, $d\alpha = 0$, sodass $\pi([\alpha]) = 0$. Es existiert daher $\beta \in \Omega_3^{q-1}$ mit $\pi\alpha = d\beta$. Da $\pi : \Omega_2^{q-1} \to \Omega_3^{q-1}$ surjektiv ist, existiert $\gamma \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\pi\gamma = \beta$. Es folgt nun $\pi(\alpha - d\gamma) = \pi\alpha - d\pi\gamma = \pi\alpha - d\beta = 0$, dh. $\alpha - d\gamma \in \ker(\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q)$. Nach Voraussetzung existiert daher $\delta \in \Omega_1^q$ mit $\iota\delta = \alpha - d\gamma$. Es folgt $\iota d\delta = d\iota\delta = d(\alpha - d\gamma) = 0$, und wegen der Injektivität von $\Omega_1^{q+1} \xrightarrow{\iota} \Omega_2^{q+1}$ also $d\delta = 0$, dh. δ repräsentiert eine Kohomologieklasse $[\delta] \in H^q(\Omega_1)$. Nach Konstruktion gilt $\iota([\delta]) = [\iota\delta] = [\alpha - d\gamma] = [\alpha]$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)$, womit (I.11) gezeigt wäre. Zusammen besagen (I.10) und (I.11), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_2)$ exakt ist.

Widmen wir uns nun der Konstruktion des Einhängungshomomorphismus $\partial : H^q(\Omega_3) \to H^{q+1}(\Omega_1)$. Sei also $a = [\alpha] \in H^q(\Omega_3)$, $\alpha \in \Omega_3^q$, $d\alpha = 0$. Da $\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q$ surjektiv ist, finden wir $\beta \in \Omega_2^q$ mit $\pi\beta = \alpha$. Es folgt $\pi d\beta = d\pi\beta = d\alpha = 0$, also $d\beta \in \ker(\Omega_2^{q+1} \xrightarrow{\pi} \Omega_3^{q+1})$. Nach Voraussetzung existiert daher $\gamma \in \Omega_1^{q+1}$ mit $\iota\gamma = d\beta$. Es folgt $\iota d\gamma = d\iota\gamma = dd\beta = 0$ und wegen der Injektivität von $\Omega_1^{q+2} \xrightarrow{\iota} \Omega_2^{q+2}$ also $d\gamma = 0$. Wir zeigen nun, dass die von γ repräsentierte Kohomologieklasse $[\gamma] \in H^{q+1}(\Omega_1)$ unabhängig von der Wahl von α, β und γ ist, und wir daher den Einhängungshomomorphismus durch $\partial a := [\gamma]$ definieren können. Seien dazu $a = [\tilde\alpha]$, $\tilde\alpha \in \Omega_3^q$, $d\tilde\alpha = 0$, $\tilde\beta \in \Omega_2^q$, $\pi\tilde\beta = \tilde\alpha$ und $\tilde\gamma \in \Omega_1^{q+1}$, $\iota\tilde\gamma = d\tilde\beta$ andere solche Wahlen. Da $[\tilde\alpha] = a = [\alpha]$, existiert $\delta \in \Omega_3^{q-1}$ mit $\tilde\alpha = \alpha + d\delta$. Aufgrund der Surjektivität von $\Omega_2^{q-1} \xrightarrow{\pi} \Omega_3^{q-1}$ finden wir $\varepsilon \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\pi\varepsilon = \delta$. Es folgt $\pi d\varepsilon = d\pi\varepsilon = d\delta = \tilde\alpha - \alpha = \pi\tilde\beta - \pi\beta$, also liegt $\tilde\beta - \beta - d\varepsilon$ im Kern von $\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q$. Es existiert daher $\eta \in \Omega_1^q$ mit $\iota\eta = \tilde\beta - \beta - d\varepsilon$. Es folgt $\iota d\eta = d\iota\eta = d\tilde\beta - d\beta = \iota\tilde\gamma - \iota\gamma$, und wegen der Injektivität von $\Omega_1^q \xrightarrow{\iota} \Omega_3^q$ erhalten wir daraus $d\eta = \tilde\gamma - \gamma$. Daher gilt $[\tilde\gamma] = [\gamma] \in H^{q+1}(\Omega_1)$, der Einhängungshomomorphismus ∂ ist also durch $\partial a := [\gamma]$ wohldefiniert. Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass ∂ linear ist, siehe Aufgabe 14.

Kommen wir nun zur Exaktheit bei $H^q(\Omega_3)$. Die Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1)\bigr) \tag{I.12}$$

folgt sofort aus der Definition von ∂. Um auch die umgekehrte Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1)\bigr) \tag{I.13}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_3)$, $\alpha \in \Omega_q^3$, $d\alpha = 0$, sodass $\partial([\alpha]) = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus ∂ existieren daher $\beta \in \Omega_2^q$, $\gamma \in \Omega_1^{q+1}$ und $\delta \in \Omega_1^q$, sodass $\pi\beta = \alpha$, $\iota\gamma = d\beta$ und $\gamma = d\delta$. Es folgt $d(\beta - \iota\delta) = d\beta - \iota d\delta = d\beta - \iota\gamma = 0$, also repräsentiert $\beta - \iota\delta$ eine Kohomologieklasse $[\beta - \iota\delta] \in H^q(\Omega_2)$.

Nach Konstruktion gilt $\pi(\beta - \iota\delta) = \pi\beta - \pi\iota\delta = \alpha$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $\iota : H^q(\Omega_2) \to H^q(\Omega_3)$. Dies zeigt (I.13). Zusammen besagen (I.12) und (I.13), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_3)$ exakt ist.

Es bleibt noch die Exaktheit bei $H^q(\Omega_1)$ zu zeigen. Die Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \tag{I.14}$$

folgt sofort aus der Definition des Einhängungshomomorphismus ∂. Um die umgekehrte Inkusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \tag{I.15}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_1)$, $\alpha \in \Omega_1^q$, $d\alpha = 0$, sodass $\iota([\alpha]) = 0 \in H^q(\Omega_2)$. Es existiert daher $\beta \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\iota\alpha = d\beta$. Es folgt $d\pi\beta = \pi d\beta = \pi\iota\alpha = 0$, also repräsentiert $\pi\beta$ eine Kohomologieklasse $[\pi\beta] \in H^{q-1}(\Omega_3)$. Nach Konstruktion gilt $\partial([\pi\beta]) = [\alpha]$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $\partial : H^{q-1}(\Omega_3) \to H^q(\Omega_1)$. Dies zeigt die Inklusion (I.15). Zusammen besagen (I.14) und (I.15), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_1)$ exakt ist. Damit ist der Beweis vollständig. □

I.3.12. Satz (Mayer–Vietoris Sequenz)**.** *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\cdots \to H^q(M) \xrightarrow{(\iota_U^*, \iota_V^*)} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^q(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(M) \to \cdots$$

wobei $\iota_U : U \to M$, $\iota_V : V \to M$, $j_U : U \cap V \to U$ und $j_V : U \cap V \to V$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen. Die lineare Abbildung ∂ wird Einhängungshomomorphismus *genannt. Ist $\lambda \in C^\infty(M)$ mit* $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1 - \lambda) \subseteq V$ *und $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ geschlossen, dann lässt sich $d\lambda \wedge \alpha$ durch Null zu einer geschlossene $(q + 1)$-Form auf M fortsetzen, und es gilt $\partial[\alpha] = -[d\lambda \wedge \alpha]$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Sequenz

$$0 \to \Omega^q(M) \xrightarrow{(\iota_U^*, \iota_V^*)} \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^q(U \cap V) \to 0 \tag{I.16}$$

exakt ist, für jedes q. Die Exaktheit bei $\Omega^q(M)$ ist offensichtlich, ist nämlich $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\iota_U^*\alpha = 0 = \iota_V^*\alpha$, dann verschwindet α auf den offenen Teilmengen U und V, und da $M = U \cup V$, folgt $\alpha = 0$. Dies zeigt, dass die Abbldung (ι_U^*, ι_V^*) injektiv, die Sequenz (I.16) daher bei $\Omega^q(M)$ exakt ist. Für $\alpha \in \Omega^q(M)$ gilt weiters

$$\begin{aligned}(j_U^* - j_V^*)\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)(\alpha)\bigr) &= (j_U^* - j_V^*)\bigl((\iota_U^*\alpha, \iota_V^*\alpha)\bigr) \\ &= j_U^*\iota_U^*\alpha - j_V^*\iota_V^*\alpha = (\iota_U \circ j_U)^*\alpha - (\iota_V \circ j_V)^*\alpha = 0,\end{aligned}$$

denn $\iota_U \circ j_U = \iota_V \circ j_V$. Dies zeigt $\operatorname{img}\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)\bigr) \subseteq \ker(j_U^* - j_V^*)$. Für die Exaktheit bei $\Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ bleibt daher noch $\ker(j_U^* - j_V^*) \subseteq \operatorname{img}\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)\bigr)$ zu zeigen. Seien dazu $\alpha_U \in \Omega^q(U)$ und $\alpha_V \in \Omega^q(V)$ mit $j_U^*\alpha = j_V^*\alpha$. Diese Gleichung besagt genau, dass die beiden Formen α_U und α_V auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsgebiete $U \cap V$ übereinstimmen. Zusammen definieren sie daher eine glatte Form $\alpha \in \Omega^q(M)$ für die offensichtlich $(\iota_U^*, \iota_V^*)(\alpha) = (\iota_U^*\alpha, \iota_V^*\alpha) = (\alpha_U, \alpha_V)$ gilt. Folglich ist sie Sequenz (I.16) auch bei $\Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ exakt.

Der interssante Punkt ist nun die Exaktheit bei $\Omega^q(U \cap V)$, dh. die Surjektivität der Abbildung $j_U^* - j_V^*$. Um diese einzusehen, wählen wir eine der Überdeckung $M = U \cup V$ untergeordnete Partition der Eins $\lambda_U + \lambda_V = 1$, $\lambda_U, \lambda_V \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_U) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\lambda_V) \subseteq V$, siehe [**3**, Abschnitt 2.6]. Sei nun $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$. Dann ist $\lambda_V\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ und $\operatorname{supp}(\lambda_V\alpha) \subseteq V$. Die Form $\lambda_V\alpha$ läßt sich daher (durch Null) zu einer q-Form auf U ausdehnen, wir bezeichnen diese Ausdehnung mit $\tilde\alpha_U \in \Omega^q(U)$, nach Konstruktion gilt daher $j_U^*\tilde\alpha_U = \lambda_V\alpha$. Analog lässt sich $\lambda_U\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ zu einer Form $\tilde\alpha_V \in \Omega^q(V)$ ausdehnen, für die daher $j_V^*\tilde\alpha_V = \lambda_U\alpha$ gilt. Setzen wir $\beta := (\tilde\alpha_U, -\tilde\alpha_V) \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$, so gilt $(j_U^* - j_V^*)\beta = j_U^*\tilde\alpha_U - j_V^*(-\tilde\alpha_U) = \lambda_V\alpha + \lambda_U\alpha = \alpha$, folglich ist $j_U^* - j_V^*$ surjektiv, die Sequenz (I.16) daher exakt. Aus Satz I.3.11 erhalten wir nun die Existenz der langen exakten Sequenz. Für geschlossenes α gilt weiters $d\beta = (d\tilde\alpha_U, -d\tilde\alpha_V) = (d\lambda_V \wedge \alpha, -d\lambda_U \wedge \alpha) = (\iota_U^*, \iota_V^*)(-d\lambda_U \wedge \alpha)$, denn $d\lambda_U + d\lambda_V = d1 = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus, siehe Beweis von Satz I.3.11, gilt daher $\partial[\alpha] = -[d\lambda_U \wedge \alpha]$. □

I.3.13. Korollar. *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Haben U, V und $U \cap V$ endlich dimensionale de Rham Kohomologie, dann hat auch M endlich dimensionale de Rham Kohomologie und es gilt die Relation*

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Beweis. Betrachten wir folgendes Stück der exakten Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12, $H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^q(M) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$, so sehen wir, dass $H^q(M)$ endlich dimensional ist, siehe Bemerkung I.3.10, denn nach Voraussetzung sind $H^{q-1}(U \cap V)$, $H^q(U)$ und $H^q(V)$ endlich dimensional. Aus Bemerkung I.3.3 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M) - \sum_q (-1)^q \dim(H^q(U) \oplus H^q(V)) \\
&\quad + \sum_q (-1)^q \dim H^q(U \cap V) \\
&= \sum_q (-1)^q b^q(M) - \sum_q (-1)^q b^q(U) - \sum_q (-1)^q b^q(V) + \sum_q (-1)^q b^q(U \cap V) \\
&= \chi(M) - \chi(U) - \chi(V) + \chi(U \cap V),
\end{aligned}$$

was zur gewünschten Gleichung äquivalent ist. □

I.3.14. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der Sphären gilt

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n. \tag{I.17}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, vgl. Beispiel I.1.5. Sei nun $n \geq 1$. Betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{-N\}$, wobei $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$.

Offensichtlich gilt $S^n = U \cup V$. Nach Beispiel I.2.16 sind U und V kontrahierbar, und die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to U \cap V$ ist eine Homotopieäquivalenz. Es gilt daher $\chi(U) = 1 = \chi(V)$ und $\chi(U \cap V) = \chi(S^{n-1})$. Aus Korollar I.3.13 folgt somit $\chi(S^n) = 2 - \chi(S^{n-1})$ und mittels Induktion dann (I.17).

I.3.15. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der reellen projektiven Räume gilt

$$\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \tfrac{1}{2}\big(1 + (-1)^n\big) = \tfrac{1}{2}\,\chi(S^n). \tag{I.18}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{R}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig, also $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^0) = 1$. Sei nun $n \geq 1$. Nach Beispiel I.2.17 existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U kontrahierbar, $V \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ und $U \cap V \simeq S^{n-1}$. Es gilt somit $\chi(U) = 1$ und $\chi(V) = \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ und $\chi(U \cap V) = 1+(-1)^{n-1}$, siehe Beispiel I.3.14. Aus Korollar I.3.13 erhalten wir nun $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) + (-1)^n$ und mittels Induktion dann (I.18). Insbesondere sind $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ und S^{2n} nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht diffeomorph.

I.3.16. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der komplexen projektiven Räume gilt

$$\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = n + 1. \tag{I.19}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig, also $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^0) = 1$. Sei nun $n \geq 1$. Nach Beispiel I.2.18 existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U kontrahierbar, $V \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ und $U \cap V \simeq S^{2n-1}$. Es gilt somit $\chi(U) = 1$ und $\chi(V) = \chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ und $\chi(U \cap V) = 0$, siehe Beispiel I.3.14. Aus Korollar I.3.13 erhalten wir nun $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = \chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) + 1$, und induktiv dann (I.19). Insbesondere sind also $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und S^{2n} nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht diffeomorph, $n \geq 2$.

I.3.17. Beispiel. Für die Euler Charakteristik des Torus gilt $\chi(T^2) = 0$. Sei dazu $N \in S^1$ und betrachte $U := S^1 \times (S^1 \setminus \{N\})$ sowie $V := S^1 \times (S^1 \setminus \{-N\})$. Dann gilt $T^2 \cong S^1 \times S^1 = U \cup V$, $U \simeq S^1 \simeq V$, $U \cap V \simeq S^1 \sqcup S^1$, also $\chi(U) = 0 = \chi(V)$ und $\chi(U \cap V) = 0$ nach Beispiel I.3.14. Mittels Korollar I.3.13 erhalten wir $\chi(T^2) = 0$. Insbesondere sind S^2 und T^2 nicht homotopieäquivalent und daher nicht diffeomorph.

I.3.18. Satz. *Für die de Rham Kohomologie der Sphäre S^n, $n \geq 1$, gilt*

$$H^q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q = n, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Für die 0-dimensionale Sphäre $S^0 = \{-1, 1\}$ ist $H^0(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^q(S^0) = 0$ falls $q \neq 0$. Insbesondere erhalten wir (erneut) $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, $n \geq 0$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, vgl. Bemerkung I.1.5. Sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Setze $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$, $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{-N\}$. Dann gilt offensichtlich $S^n = U \cup V$. Nach Beispiel I.2.16 sind U und V kontrahierbar, und die Inklusion $S^{n-1} \to U \cap V$ ist eine Homotopieäquivalez. Wir betrachten nun folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12:

$$H^{q-1}(U) \oplus H^{q-1}(V) \to \underbrace{H^{q-1}(U \cap V)}_{\cong H^{q-1}(S^{n-1})} \xrightarrow{\partial} H^q(S^n) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$$

Da $H^q(U) = 0 = H^q(V)$ für $q \neq 0$, erhalten wir aus der Exaktheit dieser Sequenz

$$H^q(S^n) \cong H^{q-1}(S^{n-1}), \qquad q \neq 0, 1. \tag{I.20}$$

Aufgrund des Zusammenhangs von S^n, gilt weiters

$$H^0(S^n) \cong \mathbb{R}. \tag{I.21}$$

Um auch die erste Kohomologie zu berechnen betrachten wir den Beginn der Mayer–Vietoris Sequenz:

$$0 \to \underbrace{H^0(S^n)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H^0(U) \oplus H^0(V)}_{\cong \mathbb{R}^2} \to \underbrace{H^0(U \cap V)}_{\cong H^0(S^{n-1})} \xrightarrow{\partial} H^1(S^n) \to \underbrace{H^1(U) \oplus H^1(V)}_{=0}$$

Mittels Bemerkung I.3.3 folgt $b^1(S^n) = b^0(S^{n-1}) - 1$, also

$$H^1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } n = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{I.22}$$

Aus (I.20), (I.21) und (I.22) lässt sich die Kohomologie von S^n nun mittels Induktion nach n bestimmen. $\square$

I.3.19. Bemerkung. Nach Satz I.3.18 ist also jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(S^n)$, $0 < q < n$, auch exakt. Für $n \geq 1$ ist $H^n(S^n)$ eindimensional, also liefert das Integral einen Isomorphismus $\int_M : H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$, siehe auch Bemerkung I.1.6. Eine Form $\alpha \in \Omega^n(S^n)$, $n \geq 1$, ist daher genau dann exakt, wenn $\int_{S^n} \alpha = 0$.

I.3.20. Beispiel. Da die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 1$, eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiel I.2.15, gilt $H^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^q(S^{n-1})$ für alle q. Nach Satz I.3.18 ist daher jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $q \neq 0, n-1$, auch exakt. Eine geschlossene Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $n \geq 2$, ist genau dann exakt, wenn $\int_{S^{n-1}} \alpha = 0$.

I.3.21. Beispiel. Betrachte $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k = (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^k$, $0 \leq k \leq n-2$. Da die Inklusion $S^{n-k-1} \to \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiele I.2.15 und I.2.9, folgt aus Satz I.3.18

$$H^q(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q = n-k-1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k)$, $q \neq 0, n-k-1$, ist daher exakt. Eine Form $\alpha \in \Omega^{n-k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k)$ ist genau dann exakt, wenn $\int_{S^{n-k-1}} \alpha = 0$.

I.3.22. Satz. *Für die Kohomologie des reellen projektiven Raums gilt, $n \geq 0$,*

$$H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{falls } q = 0, \\ \mathbb{R} & \textit{falls } q = n \textit{ ungerade,} \\ 0 & \textit{andernfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Wir werden unten zeigen, dass die von der kanonischen Projektion $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induzierte Abbildung

$$p^* : H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to H^q(S^n) \tag{I.23}$$

injektiv ist, für jedes q. Zusammen mit Satz I.3.18 folgt $H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ für alle $q \neq 0, n$. Da $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ zusammenhängend ist gilt weiters $H^0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$. Aus diesen Überlegungen erhalten wir auch $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 1 + (-1)^n b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$. Zusammen mit $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$, siehe Beispiel I.3.15, folgt nun $b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ falls n gerade, und $b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 1$, falls n ungerade ist.

Es bleibt daher die Injektivität von (I.23) zu zeigen. Sei dazu $[\alpha] \in H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ im Kern von p^*. Es existiert daher $\beta \in \Omega^{q-1}(S^n)$ mit $p^*\alpha = d\beta$. Es bezeichne $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, die Antipodalabbildung. Auch die Form $\bar\beta := \frac{1}{2}(\beta + A^*\beta) \in \Omega^{q-1}(S^n)$ erfüllt $d\bar\beta = p^*\alpha$, denn $d\bar\beta = \frac{1}{2}(d\beta + A^*d\beta) = \frac{1}{2}(p^*\alpha + A^*p^*\alpha) = \frac{1}{2}(p^*\alpha + p^*\alpha) = p^*\alpha$, wobei wir $p \circ A = p$ verwendet haben. Für diese Form $\bar\beta$ gilt jedoch weiters $A^*\bar\beta = \bar\beta$, denn mittels $A \circ A = \mathrm{id}_{S^n}$ erhalten wir $A^*\bar\beta = \frac{1}{2}(A^*\beta + (A \circ A)^*\beta) = \frac{1}{2}(A^*\beta + \beta) = \bar\beta$. Da p ein lokaler Diffeomorphismus ist, und weil $A^*\bar\beta = \bar\beta$, existiert $\gamma \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ mit $p^*\gamma = \bar\beta$, also $p^*d\gamma = p^*\alpha$. Es folgt $d\gamma = \alpha$, denn $p^* : \Omega^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \Omega^q(S^n)$ ist injektiv, wieder weil p ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dies zeigt, dass die Abbildung $p^* : H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to H^q(S^n)$ trivialen Kern hat und somit injektiv ist. □

I.3.23. Satz. *Für die de Rham Kohomologie des komplexen projektiven Raums $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 0$, gilt*

$$H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{falls } q = 0, 2, 4, \dots, 2n, \textit{ und} \\ 0 & \textit{andernfalls.} \end{cases}$$

Insbesondere folgt $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = n + 1$. Zudem induziert die kanonische Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$, Isomorphismen $H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ für alle $q \neq 2n$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig. Sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Da $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zusammenhängend ist, induziert die Inklusion offensichtlich einen Isomorphismus $H^0(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^0(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$, vgl. Bemerkung I.1.4. Es sei nun $N := [0 : \dots : 0 : 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $U := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ und $V := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{N\}$. Nach Beispiel I.2.18 gilt $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U ist kontrahierbar, $U \cap V \simeq S^{2n-1}$, und die kanonische Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to V$ ist eine Homotopieäquivalenz. Wir betrachten nun folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12, $1 \leq q \neq 2n$:

$$\underbrace{H^{q-1}(U \cap V)}_{\cong H^{q-1}(S^{2n-1})} \xrightarrow{\partial = 0} H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \xrightarrow{\cong} \underbrace{H^q(U)}_{=0} \oplus \underbrace{H^q(V)}_{\cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})} \xrightarrow{0} \underbrace{H^q(U \cap V)}_{\cong H^q(S^{2n-1})}$$

Mittels Satz I.3.18 sehen wir, dass die Abbildung ganz rechts stets verschwindet, denn aus Dimensionsgründen gilt $H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$, vgl. Bemerkung I.1.3. Aber auch der Einhängungshomomorphismus ganz links verschwindet. Für $1 < q$ folgt dies wieder aus Satz I.3.18, und im Fall $q = 1$ aus der Surjektivität von $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ und der Exaktheit der Mayer–Vietoris Sequenz bei $H^0(U \cap V)$. Aus der Exaktheit obiger Sequenz schließen wir daher, dass der mittlere Pfeil ein Isomorphismus ist, $1 \leq q \neq 2n$. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass die Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ Isomorphismen

$$H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}), \qquad q \neq 2n, \tag{I.24}$$

induziert. Um auch $H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ zu berechnen, betrachten wir folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz:

$$\underbrace{H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V)}_{=0} \to \underbrace{H^{2n-1}(U \cap V)}_{\cong H^{2n-1}(S^{2n-1}) \cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\partial} H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to \underbrace{H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V)}_{=0}$$

Dabei ist wieder aus Dimensionsgründen $H^{2n-1}(V) \cong H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$ und $H^{2n}(V) \cong H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$. Aus der Exaktheit obiger Sequenz erhalten wir somit $H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$. Zusammen mit (I.24) erlaubt dies nun die Kohomologie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mittels Induktion nach n zu bestimmen. □

I.3.24. Definition (Gute Überdeckung)**.** Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ einer glatten Mannigfaltigkeit wird *gut* genannt, falls jeder nicht-leere endliche Durchschnitt $U_1 \cap \cdots \cap U_k$, $U_i \in \mathcal{U}$, diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, vgl. [**1**, Chapter I§5].

Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt gute Überdeckungen, mit Hilfe der Geometrie von Geodäten werden wir später folgendes Resultat zeigen.

I.3.25. Satz (Existenz guter Überdeckungen)**.** *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von M, dann existiert eine gute Verfeinerung $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$, dh. $\mathcal{U}$ ist eine gute Überdeckung von M und zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existiert $V \in \mathcal{V}$ mit $U \subseteq V$.*

I.3.26. Korollar. *Besitzt eine glatte Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung, dann hat sie endlich dimensionale Kohomologie. Insbesondere haben geschlossene Mannigfaltigkeiten stets endlich dimensionale Kohomologie.*

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung einer glatten Mannigfaltigkeit M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Induktionsbeginn $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Nach Korollar I.2.12 hat $V \cong \mathbb{R}^n$ endlich dimensionale Kohomologie. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, hat U nach Induktionsvoraussetzung endlich dimensionale Kohomologie. Schließlich ist $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$ also hat auch $U \cap V$ endlich dimensionale Kohomologie, wieder aufgrund der Induktionsvoraussetzung. Betrachten wir nun die mit $M = U \cup V$ assozierte Mayer–Vietoris

Sequenz $H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^q(M) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$, so sehen wir, dass auch M endlich dimensionale Kohomologie hat, vgl. Bemerkung I.3.10. Dies zeigt den ersten Teil des Korollars. Aus Satz I.3.25 folgt sofort, dass jede geschlossene Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung besitzt, der zweite Teil des Korollars ist daher eine Konsequenz des ersten. □

I.4. Künneth Theorem. Wir wollen in diesem Abschnitt die de Rham Kohomologie eines Produktes glatter Mannigfaltigkeiten $H^*(M \times N)$ bestimmen, siehe Satz I.4.1 unten. Wir bezeichnen dazu die beiden kanonischen Projektionen mit $p_1 : M \times N \to M$ und $p_2 : M \times N \to N$. Für jedes p und q erhalten wir eine lineare Abbildung

$$K^{p,q}_{M,N} : H^p(M) \otimes H^q(N) \to H^{p+q}(M \times N), \qquad K^{p,q}_{M,N}(a \otimes b) := p_1^* a \wedge p_2^* b,$$

und dann, für jedes k, eine lineare Abbildung

$$K^k_{M,N} : \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \to H^k(M \times N), \quad K^k_{M,N} := \sum_{p+q=k} K^{p,q}_{M,N}. \tag{I.25}$$

I.4.1. Satz (Künneth Theorem)**.** *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und hat eine von beiden endlich dimensionale Kohomologie, dann ist* (I.25) *ein Isomorphismus, dh. für jedes k gilt*

$$H^k(M \times N) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N).$$

Wir beginnen den Beweis dieses Satzes mit einigen Lemmata.

I.4.2. Lemma (Der Fall $M = \mathbb{R}^n$)**.** *Für jede glatte Mannigfaltigkeit N und jedes k ist $K^k_{\mathbb{R}^n,N}$ ein Isomorphismus, siehe* (I.25)*.*

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist, gilt $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ und $H^q(\mathbb{R}^n) = 0$ für $q \neq 0$, folglich $\bigoplus_{p+q=k} H^p(\mathbb{R}^n) \otimes H^q(N) = H^k(N)$. Unter dieser Identifikation wird die Künneth Abbildung $K^k_{\mathbb{R}^n,N}$ zu $p_2^* : H^k(N) \to H^k(\mathbb{R}^n \times N)$ und ist daher ein Isomorphismus, siehe Beispiel I.2.9. □

I.4.3. Lemma (Natürlichkeit)**.** *Ist $f : W \to M$ glatt und N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit, dann kommutiert folgendes Diagramm für alle p und q:*

$$\begin{tikzcd} H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[r, "f^* \otimes \mathrm{id}_{H^q(N)}"] \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] & H^p(W) \otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{W,N}"] \\ H^{p+q}(M \times N) \arrow[r, "(f \times \mathrm{id}_N)^*"] & H^{p+q}(W \times N) \end{tikzcd}$$

Beweis. Mittels (I.3), (I.4) und (I.5) folgt für $a \in H^p(M)$ und $b \in H^q(N)$,

$$\begin{aligned}(f \times \mathrm{id}_N)^*\big(K^{p,q}_{M,N}(a \otimes b)\big) &= (f \times \mathrm{id}_N)^*(p_1^*a \wedge p_2^*b)\\ &= ((f \times \mathrm{id}_N)^*p_1^*a) \wedge ((f \times \mathrm{id}_N)^*p_2^*b)\\ &= (p_1 \circ (f \times \mathrm{id}_N))^*a \wedge (p_2 \circ (f \times \mathrm{id}_N))^*b\\ &= (f \circ p_1)^*a \wedge p_2^*b\\ &= p_1^*f^*a \wedge p_2^*b = K^{p,q}_{W,N}(f^*a \otimes b),\end{aligned}$$

denn $p_1 \circ (f \times \mathrm{id}_N) = f \circ p_1$ und $p_2 \circ (f \times \mathrm{id}_N) = p_2$. □

I.4.4. Lemma (Kompatibilität mit Einhängungshomomorphismus)**.** *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, $U, V \subseteq M$ offen und $M = U \cup V$, dann kommutiert folgendes Diagramm für alle p und q:*

$$\begin{tikzcd} H^{p-1}(U \cap V) \otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial\otimes\mathrm{id}_{H^q(N)}"] \arrow[d, "K^{p-1,q}_{U\cap V,N}"] & H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] \\ H^{p+q-1}((U \cap V) \times N) \arrow[r, "\partial"] & H^{p+q}(M \times N) \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet ∂ in der oberen Zeile den Einhängungshomomorphismus der mit $M = U \cup V$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz, und ∂ in der unteren Zeile den Einhängungshomomorphismus der mit $M \times N = (U \times N) \cup (V \times N)$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz, siehe Satz I.3.12.

Beweis. Seien $\alpha \in \Omega^{p-1}(U \cap V)$ und $\beta \in \Omega^q(N)$ geschlossen. Wähle $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq U$ und $\mathrm{supp}(1-\lambda) \subseteq V$. Nach Satz I.3.12 gilt daher $\partial[\alpha] = -[d\lambda \wedge \alpha] \in H^q(M)$ und somit

$$\begin{aligned}K^{p,q}_{M,N}\big((\partial \otimes \mathrm{id}_{H^q(N)})([\alpha] \otimes [\beta])\big) &= -K^{p,q}_{M,N}\big([d\lambda \wedge \alpha] \otimes [\beta]\big)\\ &= -[p_1^*(d\lambda \wedge \alpha) \wedge p_2^*\beta] = -[d\tilde\lambda \wedge p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta] \quad \text{(I.26)}\end{aligned}$$

wobei $\tilde\lambda := p_1^*\lambda = \lambda \circ p_1 \in C^\infty(M \times N)$. Da $\mathrm{supp}(\tilde\lambda) \subseteq U \times N$ und $\mathrm{supp}(1-\tilde\lambda) \subseteq V \times N$ gilt weiters

$$\partial\big(K^{p-1,q}_{U\cap V,N}([\alpha] \otimes [\beta])\big) = \partial\big([p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta]\big) = -[d\tilde\lambda \wedge p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta]. \quad \text{(I.27)}$$

Aus (I.26) und (I.27) folgt nun die Aussage des Lemmas. □

I.4.5. Lemma (Mayer–Vietoris Argument)**.** *Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, $U, V \subseteq M$ offen und $M = U \cup V$. Sind in dieser Situation $K^k_{U,N}$, $K^k_{V,N}$ und $K^k_{U\cap V,N}$ Isomorphismen für jedes k, dann ist auch $K^k_{M,N}$ für jedes k ein Isomorphismus, siehe* (I.25).

Beweis. Berachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\begin{matrix}H^{p-1}(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ H^{p-1}(V)\otimes H^q(N)\end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "K^{p-1,q}_{U,N}\oplus K^{p-1,q}_{V,N}"] & H^{p-1}(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "K^{p-1.q}_{U\cap V,N}"] & H^p(M)\otimes H^q(N) \arrow[r] \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] & \begin{matrix}H^{p}(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ H^{p}(V)\otimes H^q(N)\end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "K^{p,q}_{U,N}\oplus K^{p,q}_{V,N}"] & H^p(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{U\cap V,N}"] \\
\begin{matrix}H^{p+q-1}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{p+q-1}(V\times N)\end{matrix} \arrow[r] & H^{p+q-1}((U\cap V)\times N) \arrow[r, "\partial"] & H^k(M\times N) \arrow[r] & \begin{matrix}H^{p+q}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{p+q}(V\times N)\end{matrix} \arrow[r] & H^{p+q}((U\cap V)\times N)
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist ein Stück der mit $M \times N = (U \times N) \cup (V \times N)$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz und daher exakt, siehe Satz I.3.12. Die obere Zeile entsteht aus der mit $M = U \cup V$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz durch Tensorieren mit $H^q(N)$, sie ist daher ebenfalls exakt, siehe Bemerkung I.3.6. Nach Lemma I.4.3 und Lemma I.4.4 kommutiert das Diagramm. Summieren über alle $p + q = k$ liefert daher ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, siehe Bemerkung I.3.4:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\begin{matrix}\bigoplus_{p+q=k-1}H^{p}(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ \bigoplus_{p+q=k-1}H^{p}(V)\otimes H^q(N)\end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "K^{k-1}_{U,N}\oplus K^{k-1}_{V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k-1}H^{p}(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "K^{k}_{U\cap V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k}H^p(M)\otimes H^q(N) \arrow[r] \arrow[d, "K^{k}_{M,N}"] & \begin{matrix}\bigoplus_{p+q=k}H^{p}(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ \bigoplus_{p+q=k}H^{p}(V)\otimes H^q(N)\end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "K^{k}_{U,N}\oplus K^{k}_{V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k}H^p(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{k}_{U\cap V,N}", "\cong"'] \\
\begin{matrix}H^{k-1}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{k-1}(V\times N)\end{matrix} \arrow[r] & H^{k-1}((U\cap V)\times N) \arrow[r, "\partial"] & H^k(M\times N) \arrow[r] & \begin{matrix}H^{k}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{k}(V\times N)\end{matrix} \arrow[r] & H^{k}((U\cap V)\times N)
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung sind die vier äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Aus dem Fünferlemma I.3.8 folgt nun, dass auch der mittlere vertikale Pfeil ein Isomorphismus ist. □

I.4.6. Lemma (Der Fall M besitzt endliche gute Überdeckung)**.** *Sind M und N zwei glatte Manigfaltigkeiten und besitzt M eine endliche gute Überdeckung, dann ist $K^k_{M,N}$ für jedes k ein Isomorphismus, siehe* (I.25)*.*

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung von M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Offensichtlich gilt $M = U \cup V$. Nach Lemma I.4.2 ist $K^k_{V,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, ist nach Induktionsvoraussetzung $K^k_{U,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Schließlich ist auch $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$, nach Induktionsvoraussetzung daher $K^k_{U\cap V,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Aus Lemma I.4.5 folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. □

Damit ist der Beweis von Satz I.4.1 im Fall, dass einer der beiden Faktoren kompakt ist bereits vollständig, denn jede kompakte Mannigfaltigkeit besitzt nach Satz I.3.25 eine endliche gute Überdeckung. Für den allgemeinen Fall sind noch zwei weitere Überlegungen notwendig.

I.4.7. Lemma (Disjunkte Vereinigung)**.** *Es sei $M = \bigsqcup_i M_i$ eine disjunkte Vereinigung glatter Mannigfaltigkeiten, i aus einer beliebigen Indexmenge. Weiters sei N eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie und $K^k_{M_i,N}$ sei ein Isomorphismus für jedes i und k. Dann ist auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus für jedes k, siehe* (I.25)*.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt auch $M \times N = \bigsqcup_i (M_i \times N)$. Betrachte nun das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[rr, "K^k_{M,N}"] \arrow[d, equal] & & H^k(M \times N) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p\big(\bigsqcup_i M_i\big) \otimes H^q(N) \arrow[d, "\bigoplus_{p+q=k}(\iota_i^*)_i"', "\cong"] & & H^k\big(\bigsqcup_i (M_i \times N)\big) \arrow[d, "\cong"', "((\iota_i \times \mathrm{id}_N)^*)_i"] \\
\bigoplus_{p+q=k} \Big(\prod_i H^p(M_i)\Big) \otimes H^q(N) \arrow[d, "\cong"] & & \prod_i H^k(M_i \times N) \\
\bigoplus_{p+q=k} \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[d, equal] & & \prod_i \bigoplus_{p+q=k} \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[u, "\cong"', "\prod_i K^k_{M_i,N}"] \arrow[d, equal] \\
\prod_{p+q=k} \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[rr, equal] & & \prod_i \prod_{p+q=k} \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big)
\end{tikzcd}$$

wobei die beiden vertikalen Isomorphismen in der zweiten Zeile von den kanonischen Inklusionen $\iota_i : M_i \to M$ bzw. $\iota_i \times \mathrm{id}_N : M_i \times N \to M \times N$ induziert werden, vgl. Bemerkung I.1.7. Nach Voraussetzung ist auch der mit $\prod_i K^k_{M_i,N}$ beschriftete Pfeil rechts unten ein Isomorphismus. Auch der linke untere vertikale Pfeil, die direkte Summe der kanonischen Abbildunge $\big(\prod_i H^p(M_i)\big) \otimes H^q(N) \to \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big)$, ist ein Isomorphismus, da $H^q(N)$ endlich dimensional vorausgesetzt wurde. Der Übergang von direkten Summen zu Produkten im unteren Teil des Diagramms ist zulässig, da es nur endlich viele Paare (p, q) mit $p, q \geq 0$ und $p + q = k$ gibt. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. $\square$

I.4.8. Lemma. *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ mit $M = U \cup V$, sodass U, V und $U \cap V$ jeweils disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen sind, die jede eine endliche gute Überdeckung besitzen.*

Beweis. O.B.d.A. sei $M \neq \emptyset$ und zusammenhängend. Mittels Satz I.3.25 lässt sich leicht eine lokal endliche gute Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von M konstruieren, sodass $U_\lambda \neq \emptyset$ und $\bar{U}_\lambda$ kompakt ist für jedes $\lambda \in \Lambda$. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$. Wir setzen $\Lambda_0 := \{\lambda_0\}$, $V_0 := U_{\lambda_0}$ und definieren induktiv

$$\Lambda_{k+1} := \big\{\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V_k \neq \emptyset\big\} \quad \text{sowie} \quad V_{k+1} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_{k+1}} U_\lambda.$$

Offensichtlich gilt $\Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+1}$. Weiters ist jedes Λ_k endlich und $\bar{V}_k$ kompakt. Um dies einzusehen nehmen wir induktiv $\bar{V}_k$ als kompakt an. Da die Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ lokal endlich ist schneidet $\bar{V}_k$ nur endlich viele dieser Überdeckungsmengen U_λ, also ist Λ_{k+1} endlich und dann auch $\bar{V}_{k+1}$ kompakt, da die $\bar{U}_\lambda$ kompakt sind. Schließlich haben wir $\bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k = \Lambda$. Betrachte dazu $\Lambda' := \bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k$ und $\Lambda'' := \Lambda \setminus \Lambda'$, sowie $V' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$ und $V'' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda''} U_\lambda$. Als Vereinigungen offener Teilmengen sind V' und V'' beide offen in M. Klarerweise gilt $M = V' \cup V''$, beachte aber auch $V' \cap V'' = \emptyset$. Aus dem Zusammenhang von M folgt nun $V'' = \emptyset$, also $\Lambda'' = \emptyset$, und somit $\Lambda = \Lambda' = \bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k$ wie behauptet. Betrachte nun die offenen Teilmengen

$$W_0 := V_0, \qquad W_k := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\lambda, \quad k \geq 1.$$

Nach Konstruktion besitzt also jedes W_k eine endliche gute Überdeckung. Beachte, dass auch $W_k \cap W_l$ eine endliche gute Überdeckung besitzt, denn

$$W_k \cap W_l = \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\lambda\Big) \cap \Big(\bigcup_{\mu\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\mu\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} \bigcup_{\mu\in\Lambda_l\setminus\Lambda_{l-1}} (U_\lambda \cap U_\mu).$$

Zudem gilt $W_k \cap W_l = \emptyset$, falls $k + 2 \leq l$, also haben wir disjunkte Vereinigungen

$$U := \bigsqcup_{k \text{ gerade}} W_k, \qquad V := \bigsqcup_{k \text{ ungerade}} W_k, \qquad U \cap V = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} W_{k+1} \cap W_k.$$

Weiters ist $M = U \cup V$, also haben U und V die gewünschten Eigenschaften. □

Beweis von Satz I.4.1. Wähle offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ wie in Lemma I.4.8. Nach Lemma I.4.6 und Lemma I.4.7 sind daher $K^k_{U,N}$, $K^k_{V,N}$ und $K^k_{U\cap V,N}$ Isomorphismen für jedes k. Aus Lemma I.4.5 folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. Damit ist der Beweis von Satz I.4.1 vollständig. □

I.4.9. Korollar. *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann hat auch $M \times N$ endlich dimensionale Kohomologie und es gilt*

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N). \tag{I.28}$$

Beweis. Nach Satz I.4.1 ist $H^k(M \times N) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N)$, insbesondere hat $M \times N$ endlich dimensionale Kohomologie. Für die Betti Zahlen von $M \times N$ erhalten wir daraus

$$b^k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b^p(M) \cdot b^q(N). \tag{I.29}$$

Für die Euler Charakteristik von $M \times N$ folgt nun

$$\begin{aligned}\chi(M \times N) &= \sum_k (-1)^k b^k(M \times N) = \sum_k (-1)^k \sum_{p+q=k} b^p(M) \cdot b^q(N) \\ &= \sum_k \sum_{p+q=k} (-1)^p b^p(M) \cdot (-1)^q b^q(N) = \sum_{i,j} (-1)^i b^i(M) \cdot (-1)^j b^j(N) \\ &= \Big(\sum_i (-1)^i b^i(M)\Big) \cdot \Big(\sum_j (-1)^j b^j(N)\Big) = \chi(M) \cdot \chi(N),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

I.4.10. Beispiel. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann folgt aus Korollar I.4.9 sofort $\chi(M \times S^1) = 0$, denn $\chi(S^1) = 0$.

I.4.11. Bemerkung. Die Voraussetzung in Satz I.4.1, dass eine der beiden Faktoren endlich dimensionale Kohomologie hat ist tatsächlich notwendig, für die 0-dimensionale Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{Z}$ sind beispielsweise $H^0(M \times M)$ und $H^0(M) \otimes H^0(M)$ nicht isomorph.

Hat M endlich dimensionale Kohomologie, dann wird

$$p_M(t) := \textstyle\sum_q b^q(M) t^q$$

das *Poincaré Polynom* von M genannt. Beachte $p_M(-1) = \chi(M)$, $p_M(0) = b^0(M)$ und $p_M(1) = \dim H^*(M)$. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann folgt aus (I.29) wie im Beweis von Korollar I.4.9

$$p_{M \times N}(t) = p_M(t) \cdot p_N(t), \tag{I.30}$$

vgl. Aufgabe 20. Setzen wir $t = -1$ so erhalten wir (I.28) zurück.

I.4.12. Beispiel. Nach Satz I.3.18 ist das Poincaré Polynom des Kreises $p_{S^1}(t) = 1 + t$. Für den Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ folgt mittels (I.30) nun

$$p_{T^n}(t) = p_{S^1}(t)^n = (1+t)^n = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} t^q,$$

und somit $b^q(T^n) = \binom{n}{q}$.

I.4.13. Beispiel. Nach Satz I.3.18 gilt für das Poincaré Polynom der Sphäre $p_{S^n}(t) = 1 + t^n$. Mit (I.30) erhalten wir

$$p_{S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1 + t^{n_i}).$$

Folglich sind die Mannigfaltigkeiten $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ und $S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_l}$ genau dann homotopieäquivalent (diffeomorph) sind, wenn die Zahlen n_i und m_i bis auf Umnummerierung übereinstimmen.

I.4.14. Beispiel. Nach Satz I.3.23 gilt für das Poincaré Polynom des komplexen projektiven Raums $p_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = (1 - t^{2n+1})/(1 - t)$. Mit (I.30) erhalten wir

$$p_{\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_k}}(t) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1 - t^{2n_i+1}}{1 - t}.$$

Es folgt nun, dass die Mannigfaltigkeiten $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_k}$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{m_l}$ genau dann homotopieäquivalent (diffeomorph) sind, wenn die Zahlen n_i und m_i bis auf Umnummerierung übereinstimmen.

In der Situation von Satz I.4.1 gilt also $H^*(M \times N) \cong H^*(M) \otimes H^*(N)$, dh. die graduierte $\mathbb{R}$-Algebra $H^*(M\times N)$ ist in natürlicher Weise zum Tensorprodukt der graduierten $\mathbb{R}$-Algebren $H^*(M)$ und $H^*(N)$ isomorph.

Ein Element aus $a \in H^*(M) = \bigoplus_q H^q(M)$ wird *homogen vom Grad* q genannt wenn es in $H^q(M)$ liegt, wir schreiben in diesem Fall $|a| := q$ für den Grad von a. Ein Element von $H^*(M)$ wird *homogen* genannt, falls es homogen vom Grad q für ein q ist. Unter einer graduierten Basis von $H^*(M)$ verstehen wir eine Basis aus homogenen Elementen. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $\{a_i\}_{i\in I}$, bzw. $\{b_j\}_{j\in J}$, graduierte Basen von $H^*(M)$ bzw. $H^*(N)$, dann folgt aus Satz I.4.1, dass $\{p_1^*a_i\wedge p_2^*b_j\}_{(i,j)\in I\times J}$, eine graduierte Basis von $H^*(M\times N)$ bildet, $|p_1^*a_i \wedge p_2^*b_j| = |a_i| + |b_j|$, wobei wir wieder voraussetzen, dass einer der beiden Faktoren endlich dimensionale Kohomologie hat.

I.4.15. Beispiel. Betrachte $S^n \times S^m$, $n, m \geq 1$. Nach Satz I.4.1 und Satz I.3.18 existiert eine graduierte Basis $\{1, a, b, a \wedge b\}$ von $H^*(S^n \times S^m)$ und es gelten die Relationen $a \wedge a = 0 = b \wedge b$.

I.4.16. Bemerkung. Ist M eine orientierte glatte m-Mannigfaltigkeit und N eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann liefern die Tangentialabbildungen der kanonischen Projektionen $p_1 : M \times N \to M$ und $p_2 : M \times N \to N$ lineare Isomorphismen $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$. Wir versehen nun $T_{(x,y)}(M \times N)$ mit der Produktorientierung, dh. ist $X_1, \dots, X_m$ eine positiv orientierte Basis von T_xM und $Y_1, \dots, Y_n$ eine positiv orientierte Basis von T_yN, dann ist $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(x,y)}(M \times N)$. Dies definiert eine Orientierung von $M \times N$, die als *Produktorientierung* bezeichnet wird. Beachte, dass es hier auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, denn der Diffeomorphismus $M \times N \cong N \times M$ ist i.A. nicht orientierungsbewahrend. Bezüglich der Produktorientierung auf $M \times N$ gilt nun folgende Version des Satzes von Fubini, vgl. Aufgabe 21,

$$\int_{M\times N} p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta = \int_M \alpha \cdot \int_N \beta, \qquad \alpha \in \Omega_c^m(M),\ \beta \in \Omega_c^n(N).$$

Sind darüber hinaus M und N geschlossen, dann erhalten wir daraus

$$\textstyle\int_{M\times N} p_1^*a \wedge p_2^*b = \int_M a \cdot \int_N b, \qquad a \in H^m(M),\ b \in H^n(N). \tag{I.31}$$

I.5. Poincaré Dualität. Diese Dualität liefert, für geschlossene orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeiten M, einen Zusammenhang zwischen $H^q(M)$ und $H^{n-q}(M)$, siehe Korollar I.5.18, insbesondere folgt $b^q(M) = b^{n-q}(M)$ für jedes q. Wir werden dies als Korollar eines allgemeineren Resultats für nicht notwendigerweise kompakte Mannigfaltigkeiten erhalten, siehe Satz I.5.9 unten, selbst wenn wir nur an geschlossenen Mannigfaltigkeiten interessiert wären, treten beim Beweis den wir unten geben werden unweigerlich nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten auf. Wir werden zunächst die notwendigen Eigenschaften der de Rham Kohomologie mit kompakten Trägern herleiten: Mayer–Vietoris Sequenz mit kompakten Trägern, siehe Satz I.5.6, und die Berechnung von $H_c^q(\mathbb{R}^n)$, siehe Korollar I.5.8.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen die Menge aller glatten q-Formen deren Träger kompakt ist mit $\Omega_c^q(M)$. Beachte, dass das de Rham Differential einer Form mit kompakten Träger wieder kompakten Träger hat, dh. $d : \Omega_c^q(M) \to \Omega_c^{q+1}(M)$. Der reelle Vektorraum

$$H_c^q(M) := \frac{\ker\bigl(\Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M)\bigr)}{\operatorname{img}\bigl(\Omega_c^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^q(M)\bigr)}$$

wird als q-te *de Rham Kohomologie mit kompakten Trägern* bezeichnet.

I.5.1. Bemerkung. Für kompaktes M haben wir offensichtlich $H_c^q(M) = H^q(M)$, denn $\Omega_c^q(M) = \Omega^q(M)$, für jedes q.

I.5.2. Bemerkung. Offenbar gilt $H_c^q(M) = 0$ falls $q < 0$ oder $q > \dim(M)$, vgl. Bemerkung I.1.3.

I.5.3. Bemerkung. Ist M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann haben wir eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$\textstyle\int_M : H_c^n(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\alpha] \mapsto \int_M \alpha,$$

denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt $\int_M d\beta = 0$, für alle $\beta \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Für $M \neq \emptyset$ ist diese surjektiv und somit $H_c^n(M) \neq 0$.

I.5.4. Bemerkung. Ist M eine zusammenhängende nicht-kompakte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann gilt $H_c^0(M) = 0$, denn in diesem Fall muss jede lokal konstante Funktion mit kompakten Träger auf M schon verschwinden, dh. der Kern von $d : \Omega_c^0(M) \to \Omega_c^1(M)$ ist trivial.

Ist $U \subseteq M$ offen und $\alpha \in \Omega^q_c(U)$, dann können wir α durch Null zu einer glatten q-Form auf M ausdehnen, und diese Ausdehnung hat kompakten Träger in M. Bezeichnet $\iota : U \to M$ die kanonische Inklusion, so schreiben wir $\iota_*\alpha \in \Omega^q_c(M)$ für die oben konstruierte Ausdehnung, dh. $\iota_* : \Omega^q_c(U) \to \Omega^q_c(M)$. Offensichtlich gilt $d \circ \iota_* = \iota_* \circ d$, also induziert ι eine lineare Abbildung $\iota_* : H^q_c(U) \to H^q_c(M)$.

I.5.5. Bemerkung. Ist $M = M_1 \sqcup M_2$ eine disjunkte Vereinigung glatter Mannigfaltigkeiten, dann induzieren die kanonischen Inklusionen $\iota^1 : M_1 \to M$ und $\iota^2 : M_2 \to M$ für jedes q einen Isomorphismus

$$\iota^1_* + \iota^2_* : H^q_c(M_1) \oplus H^q_c(M_2) \xrightarrow{\cong} H^q_c(M),$$

denn $\iota^1_* + \iota^2_* : \Omega^q_c(M_1) \oplus \Omega^q_c(M_2) \xrightarrow{\cong} \Omega^q_c(M)$ sind Isomorphismen die mit den de Rham Differentialen verträglich ist. Diese Bemerkung bleibt offenbar für beliebige disjunkte Vereinigungen richtig, dh. die Inklusionen induzieren für jedes q einen natürliche Isomorphismus $\bigoplus_i H^q_c(M_i) \cong H^q_c(\bigsqcup_i M_i)$, wobei i nun durch eine beliebige Indexmenge läuft. Beachte, dass hier eine direkte Summe auftritt, wohingegen wir in Bemerkung I.1.7 ein Produkt angetroffen haben.

I.5.6. Satz (Mayer–Vietoris Sequenz)**.** *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $U, V \subseteq M$ offen. Dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\cdots \to H^q_c(U \cap V) \xrightarrow{(j^U_*, -j^V_*)} H^q_c(U) \oplus H^q_c(V) \xrightarrow{\iota^U_* + \iota^V_*} H^q_c(M) \xrightarrow{\partial_c} H^{q+1}_c(U \cap V) \to \cdots$$

wobei $\iota^U : U \to M$, $\iota^V : V \to M$, $j^U : U \cap V \to U$ und $j^V : U \cap V \to V$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen. Die lineare Abbildung ∂_c wird als Einhängungshomomorphismus *bezeichnet. Ist $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1-\lambda) \subseteq V$ und $\alpha \in \Omega^q_c(M)$ geschlossen, dann definiert $d\lambda \wedge \alpha$ eine geschlossene $(q+1)$-Form mit kompakten Träger in $U \cap V$, und es gilt $\partial_c[\alpha] = [d\lambda \wedge \alpha]$.*

Beweis. Es lässt sich leicht einsehen, dass die Sequenz

$$0 \to \Omega^q_c(U \cap V) \xrightarrow{(j^U_*, -j^V_*)} \Omega^q_c(U) \oplus \Omega^q_c(V) \xrightarrow{\iota^U_* + \iota^V_*} \Omega^q_c(M) \to 0 \tag{I.32}$$

bei $\Omega^q_c(U \cap V)$ und $\Omega^q_c(U) \oplus \Omega^q_c(V)$ exakt ist. Wir zeigen nun, dass sie auch bei $\Omega^q_c(M)$ exakt ist. Dazu wählen wir eine der Überdeckung $M = U \cup V$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_U, \lambda_V \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_U) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\lambda_V) \subseteq V$ und $\lambda_U + \lambda_V = 1$, siehe [**3**, Abschnitt 2.6]. Ist nun $\alpha \in \Omega^q_c(M)$, dann folgt $\lambda_U \alpha|_U \in \Omega^q_c(U)$ sowie $\lambda_V \alpha|_V \in \Omega^q_c(V)$. Nach Konstruktion gilt $(\iota^U_* + \iota^V_*)(\lambda_U\alpha|_U, \lambda_V\alpha|_V) = \lambda_U\alpha + \lambda_V\alpha = \alpha$, also ist $\iota^U_* + \iota^V_*$ surjektiv, die Sequenz (I.32) daher exakt. Die Existenz der langen exakten Sequenz folgt nun aus Satz I.3.11. Ist α geschlossen, dann gilt weiters $d(\lambda_U\alpha|_U, \lambda_V\alpha|_V) = (d\lambda_U \wedge \alpha|_U, d\lambda_V \wedge \alpha|_V) = (d\lambda_U \wedge \alpha|_U, -d\lambda_U \wedge \alpha|_V) = (j^U_*, -j^V_*)(d\lambda_U \wedge \alpha|_{U \cap V})$, denn $d\lambda_U + d\lambda_V = d1 = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus, siehe Beweis von Satz I.3.11, gilt daher $\partial_c[\alpha] = [d\lambda_U \wedge \alpha]$, wobei wir $d\lambda_U \wedge \alpha \in \Omega^{q+1}_c(U \cap V)$ auffassen. $\square$

I.5.7. Satz. *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann induziert*

$$\pi : \Omega^q_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}_c(M), \qquad \pi(\alpha) := (-1)^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t} \alpha \, dt,$$

für jedes q einen Isomorphismus $H^q_c(M \times \mathbb{R}) \cong H^{q-1}_c(M)$. Dabei bezeichnet $\iota_t : M \to M \times I$, $\iota_t(x) := (x,t)$, und $\partial_t \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$, $\partial_t(x,t) := \frac{d}{ds}|_{s=t}(x,s)$.

Beweis. Für jedes $\alpha \in \Omega^q_c(M \times \mathbb{R})$ gilt zunächst, vgl. [**3**, Abschnitt 4.9],

$$\begin{aligned} d(\pi(\alpha)) - \pi(d\alpha) &= (-1)^{q-1} d \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t} \alpha \, dt - (-1)^q \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t} d\alpha \, dt \\ &= (-1)^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* (d i_{\partial t} + i_{\partial_t} d) \alpha \, dt \\ &= (-1)^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* L_{\partial t} \alpha \, dt = (-1)^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\partial}{\partial t} \iota_t^* \alpha \, dt = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt dieser Rechnung haben wir verwendet, dass $\iota_t^* \alpha$ für hinreichend große und hinreichend kleine t verschwindet, denn α hat kompakten Träger. Somit gilt $d \circ \pi = \pi \circ d$, also induziert π eine lineare Abbildung in der Kohomologie,

$$\pi : H^q_c(M \times \mathbb{R}) \to H^{q-1}_c(M), \qquad \pi([\alpha]) := [\pi(\alpha)].$$

Sei nun $\phi_0 \in \Omega^1_c(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 1$, setze $\phi := p_2^* \phi_0 \in \Omega^1(M \times \mathbb{R})$ und betrachte

$$e : \Omega^{q-1}_c(M) \to \Omega^q_c(M \times \mathbb{R}), \qquad e(\beta) := p_1^* \beta \wedge \phi.$$

Da $d\phi = dp_2^* \phi_0 = p_2^* d\phi_0 = 0$ gilt offenbar $d \circ e = e \circ d$, also induziert e eine Abbildung in der Kohomologie,

$$e : H^{q-1}_c(M) \to H^q_c(M \times \mathbb{R}), \qquad e([\beta]) := [e(\beta)] = [p_1^* \beta \wedge \phi].$$

Für $\beta \in \Omega^{q-1}_c(M)$ folgt

$$\begin{aligned} \pi(e(\beta)) = (-1)^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t}(p_1^* \beta \wedge \phi) \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* p_1^* \beta \wedge \iota_t^* i_{\partial t} \phi \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta \wedge \iota_t^* i_{\partial t} \phi \, dt = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t} \phi \, dt = \beta \int_{\mathbb{R}} \phi_0 = \beta, \end{aligned}$$

wobei wir $i_{\partial_t}(p_1^* \beta \wedge \phi) = (-1)^{q-1} p_1^* \beta \wedge i_{\partial_t} \phi$ und $p_1 \circ \iota_t = \mathrm{id}_M$ verwendet haben. Insbesondere folgt

$$\pi \circ e = \mathrm{id}_{H^{q-1}_c(M)}.$$

Es bleibt daher noch

$$e \circ \pi = \mathrm{id}_{H^q_c(M \times \mathbb{R})} \tag{I.33}$$

zu zeigen. Betrachte dazu

$$h : \Omega^q_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}_c(M \times \mathbb{R}), \qquad h(\alpha) :=$$

Wir werden unten die Relation

$$d \circ h - h \circ d = \mathrm{id} - e \circ \pi : \Omega^q_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^q_c(M \times \mathbb{R}) \tag{I.34}$$

herleiten. Für geschlossene $\alpha \in \Omega^q(M \times \mathbb{R})$ erhalten wir daraus $\alpha - e(\pi(\alpha)) = d(h(\alpha))$, also $[\alpha] = [e(\pi(\alpha))] = e(\pi([\alpha]))$ und somit (I.33). Kommen wir schließlich zu (I.34). . . . ☐

I.5.8. Korollar. *Das Integral liefert einen Isomorphismus $H^n_c(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \alpha$. Darüber hinaus gilt $H^q_c(\mathbb{R}^n) = 0$ für alle $q \neq n$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz I.5.7 mittels Induktion nach n. ☐

Sei nun M eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir haben eine wohldefinierte bilineare Paarung

$$H^q(M) \times H^{n-q}_c(M) \to \mathbb{R}, \qquad ([\alpha],[\beta])_M := \int_M \alpha \wedge \beta, \tag{I.35}$$

denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt

$$\int_M d\gamma \wedge \beta = \int_M d(\gamma \wedge \beta) = 0, \qquad \gamma \in \Omega^{q-1}(M),\ \beta \in \Omega^{n-q}_c(M),\ d\beta = 0,$$

sowie

$$\int_M \alpha \wedge d\delta = (-1)^q \int_M d(\alpha \wedge \delta) = 0, \qquad \alpha \in \Omega^q(M),\ d\alpha = 0,\ \delta \in \Omega^{n-q-1}_c(M).$$

Die Paarung (I.35) induziert eine lineare Abbildung

$$D^q_M : H^q(M) \to H^{n-q}_c(M)', \qquad D^q_M(a)(b) := (a,b)_M = \int_M a \wedge b, \tag{I.36}$$

wobei $H^{n-q}_c(M)'$ den Dualraum von $H^{n-q}_c(M)$ bezeichnet.

I.5.9. Satz (Poincaré Dualität)**.** *Für jede orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit M ist* (I.36) *ein Isomorphismus, dh. $H^q(M) \cong H^{n-q}_c(M)'$ für alle q.*

Wir beginnen den Beweis dieses Satzes mit einigen Lemmata.

I.5.10. Lemma (Der Fall $M = \mathbb{R}^n$)**.** *$D^q_{\mathbb{R}^n}$ ist ein Isomorphismus, für jedes q.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar I.5.8 und Beispiel I.2.13. ☐

I.5.11. Lemma (Natürlichkeit)**.** *Bezeichnet $\iota : U \to M$ die Inklusion einer offenen Teilmenge in einer orientierten glatten n-Mannigfaltigkeit, dann haben wir $(\iota^* a, b)_U = (a, \iota_* b)_M$ für alle $a \in H^q(M)$ und $b \in H^{n-q}_c(U)$. Für jedes q kommutiert daher das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H^q(M) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "D^q_M"] & H^q(U) \arrow[d, "D^q_U"] \\ H^{n-q}_c(M)' \arrow[r, "\iota'_*"] & H^{n-q}_c(U)' \end{tikzcd}$$

wobei ι'_* die zu $\iota_* : H^{n-q}_c(U) \to H^{n-q}_c(M)$ duale Abbildung bezeichnet.

Beweis. Für $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\beta \in \Omega^{n-q}_c(U)$ gilt $(a, \iota_* b)_M = \int_M \alpha \wedge \iota_* \beta = \int_U \iota^* \alpha \wedge \beta = (\iota^* a, b)_U$, denn die Form $\alpha \wedge \iota_* \beta$ hat kompakten Träger in U und stimmt dort mit der Form $\iota^* \alpha \wedge \beta$ überein. ☐

I.5.12. Lemma (Kompatibilität mit Einhängungshomomorphismen). *Ist $M = U \cup V$ eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen, dann gilt $(\partial a, b)_M = (-1)^{q+1}(a, \partial_c b)_{U\cap V}$, für alle $a \in H^q(U \cap V)$ und $b \in H_c^{n-q-1}(M)$. Für jedes q kommutiert daher das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H^q(U\cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "D^q_{U\cap V}"] & H^{q+1}(M) \arrow[d, "D^{q+1}_M"] \\ H_c^{n-q}(U\cap V)' \arrow[r, "\partial_c'"] & H_c^{n-q-1}(M)' \end{tikzcd}$$

bis auf ein Vorzeichen. Dabei bezeichnet ∂ in der oberen Zeile den Einhängungshomomorphismus der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12 und ∂_c' in der unteren Zeile die zum Einhängungshomomorphismus $\partial_c : H_c^{n-q-1}(M) \to H_c^{n-q}(U\cap V)$ duale Abbildung, siehe Satz I.5.6.

Beweis. Seien dazu $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1-\lambda) \subseteq V$, $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$, $d\alpha = 0$, und $\beta \in \Omega_c^{n-q-1}(M)$, $d\beta = 0$. Aus der Beschreibung des Einhängungshomomorphismus in Satz I.3.12 folgt

$$(\partial[\alpha], [\beta])_M = (-[d\lambda \wedge \alpha], [\beta])_M = -\int_M d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta = -\int_{U\cap V} d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta,$$

denn die Form $d\lambda\wedge\alpha$ hat Träger in $U\cap V$. Aus der Beschreibung des Einhängungshomomorphismus in Satz I.5.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}([\alpha], \partial_c[\beta])_{U\cap V} &= ([\alpha], [d\lambda \wedge \beta])_{U\cap V} \\ &= \int_{U\cap V} \alpha \wedge d\lambda \wedge \beta = (-1)^q \int_{U\cap V} d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta,\end{aligned}$$

also $([\alpha], \partial_c[\beta])_{U\cap V} = (-1)^{q+1}(\partial[\alpha], [\beta])_M$. □

I.5.13. Lemma (Mayer–Vietoris Argument). *Es sei $M = U\cup V$ eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Sind D_U^q, D_V^q und $D_{U\cap V}^q$ Isomorphismen für jedes q, dann ist auch D_M^q für jedes q ein Isomorphismus.*

Beweis. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H^{q-1}(U)\oplus H^{q-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U^{q-1}\oplus D_V^{q-1}", "\cong"'] & H^{q-1}(U\cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "D_{U\cap V}^{q-1}", "\cong"'] & H^q(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M^q"] & H^q(U)\oplus H^q(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U^q\oplus D_V^q", "\cong"'] & H^q(U\cap V) \arrow[d, "D^q_{U\cap V}", "\cong"'] \\ H_c^{n-q+1}(U)'\oplus H_c^{n-q+1}(V)' \arrow[r] & H^{n-q+1}(U\cap V)' \arrow[r, "\partial_c'"] & H_c^{n-q}(M)' \arrow[r] & H_c^{n-q}(U)'\oplus H_c^{n-q}(V)' \arrow[r] & H_c^{n-q}(U\cap V)' \end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist ein Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12 und daher exakt. Die untere Zeile entsteht aus der Mayer–Vietoris Sequenz in Satz I.5.6 durch Übergang zu den Dualräumen, sie ist daher ebenfalls exakt, vgl. Bemerkung I.3.7. Nach Voraussetzung sind die vier äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Nach Lemma I.5.11 und Lemma I.5.12 kommutiert das Diagramm bis auf Vorzeichen. Aus dem Fünferlemma I.3.8 folgt nun, vgl. Aufgabe 15, dass auch D_M^q ein Isomorphismus ist, für jedes q. □

I.5.14. Lemma (Der Fall mit endlicher guter Überdeckung)**.** *Ist M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit die eine endliche gute Überdeckung besitzt, siehe Definition I.3.24, dann ist D^q_M ein Isomorphismus, für jedes q.*

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung von M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Offensichtlich gilt $M = U \cup V$. Nach Lemma I.5.10 ist D^q_V ein Isomorphismus, für jedes q. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, ist nach Induktionsvoraussetzung D^q_U ein Isomorphismus, für jedes q. Schließlich ist auch $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$, nach Induktionsvoraussetzung daher $D^q_{U\cap V}$ ein Isomorphismus, für jedes q. Aus Lemma I.5.13 folgt nun, dass auch D^q_M ein Isomorphismus ist, für jedes q. □

Damit ist der Beweis von Satz I.5.9 im kompakten Fall bereits vollständig, denn nach Satz I.3.25 besitzt jede geschlossene Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung. Für den allgemeinen Fall benötigen wir noch folgendes

I.5.15. Lemma (Disjunkte Vereinigung)**.** *Ist $M = \bigsqcup_i M_i$ eine disjunkte Vereinigung orientierter glatter n-Mannigfaltigkeiten, i aus einer beliebigen Indexmenge, und ist $D^q_{M_i}$ für jedes i und q ein Isomorphismus, dann ist auch D^q_M für jedes q ein Isomorphismus.*

Beweis. Betrachte das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q(M) \arrow[r, "D^q_M"] \arrow[d, equal] & H^{n-q}_c(M)' \arrow[r, equal] & H^{n-q}_c\big(\bigsqcup_i M_i\big)' \arrow[d, equal] \\
H^q\big(\bigsqcup_i M_i\big) \arrow[d, equal] & & \Big(\bigoplus_i H^{n-q}_c(M_i)\Big)' \arrow[d, equal] \\
\prod_i H^q(M_i) \arrow[rr, "\prod_i D^q_{M_i}", "\cong"'] & & \prod_i\big(H^{n-q}_c(M_i)'\big)
\end{tikzcd}$$

wobei wir die von den kanonischen Inklusionen $\iota_i : M_i \to M$ induzierten Isomorphismen aus Bemerkung I.1.7 und Bemerkung I.5.5 verwenden. Nach Voraussetzung ist der untere horizontale Pfeil ein Isomorphismus. Für die rechte untere vertikale Gleichheit beachte, dass der Dualraum einer direkten Summe $(\bigoplus_i V_i)'$ kanonisch mit dem Produkt der Dualräume $\prod_i V_i'$ identifiziert werden kann. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt nun, dass auch D^q_M ein Isomorphismus ist, für jedes q. □

Beweis von Satz I.5.9. Wir wählen offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ wie in Lemma I.4.8, dh. U, V und $U \cap V$ sind jeweils disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen die jede eine endliche gute Überdeckung besitzen, und es gilt $M =$

$U \cup V$. Nach Lemma I.5.14 und Lemma I.5.15 sind daher D^q_U, D^q_V und $D^q_{U\cap V}$ Isomorphismen, für jedes q. Aus Lemma I.5.13 folgt nun, dass auch D^q_M für jedes q ein Isomorphismus ist. Damit ist der Beweis von Satz I.5.9 vollständig. ☐

I.5.16. Korollar. *Ist $M \neq \emptyset$ eine zusammenhängende orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann induziert das Integral einen Isomorphismus $H^n_c(M) \cong \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_M \alpha$. Ist darüber hinaus M geschlossen, so erhalten wir einen Isomorphismus $H^n(M) \cong \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_M \alpha$.*

Beweis. Da $M \neq \emptyset$ zusammenhängend ist, repräsentiert $1 \in \Omega^0(M)$ eine Basis von $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, siehe Bemerkung I.1.4. Der erste Teil des Korollars folgt daher aus Satz I.5.9. Im geschlossenen Fall gilt $H^n(M) = H^n_c(M)$, die zweite Aussage ist somit eine Konsequenz der ersten. ☐

I.5.17. Bemerkung. Für jede zusammenhängende glatte n-Mannigfaltigkeit M gilt, vgl. Korollar I.5.16,

$$H^n_c(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ orientierbar, und} \\ 0 & \text{falls } M \text{ nicht orientierbar ist.} \end{cases}$$

Für die unbewiesene Implikation siehe etwa [**1**, Chapter I§7]. Die Orientierbarkeit von M lässt sich daher durch Berechnung von $H^n_c(M)$ entscheiden. Weiters gilt, vgl. Satz I.5.9 und Bemerkung I.5.4,

$$H^n(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ geschlossen und orientierbar,} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

I.5.18. Korollar. *Für jede geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit M und jedes q ist die Paarung, siehe* (I.35),

$$H^q(M) \times H^{n-q}(M) \to \mathbb{R}, \qquad (a,b) \mapsto (a,b)_M = \int_M a \wedge b,$$

nicht-degeneriert, und daher $b^q(M) = b^{n-q}(M)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz I.5.9, denn im geschlossenen Fall gilt $H^q_c(M) = H^q(M)$, siehe auch Korollar I.3.26. ☐

I.5.19. Korollar. *Ist M eine geschlossene orientierbare glatte Mannigfaltigkeit ungerader Dimension, dann gilt $\chi(M) = 0$.*

Beweis. Nach Korollar I.5.18 haben wir $b^q(M) = b^{n-q}(M)$, $n = \dim(M)$. Für die Euler-Charakteristik folgt daher

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_q (-1)^q b^q(M) = \sum_q (-1)^q b^{n-q}(M) \\ &= (-1)^n \sum_q (-1)^{n-q} b^{n-q}(M) = (-1)^n \sum_q (-1)^q b^q(M) = (-1)^n \chi(M). \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so erhalten wir daraus $\chi(M) = 0$. ☐

I.5.20. Korollar. *Ist M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit gerader Dimension $n = 2m$, dann gilt $\chi(M) \equiv b^m(M) \mod 2$.*

Beweis. Wir schreiben zunächst

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q b^q(M) + (-1)^m b^m(M) + \sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M).$$

Nach Korollar I.5.18 gilt $b^q(M) = b^{2m-q}(M)$, und daher

$$\sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M) = \sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^{2m-q} b^{2m-q}(M) = \sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q b^q(M).$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\chi(M) = (-1)^m b^m(M) + 2\sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M) \equiv b^m(M) \mod 2,$$

wie behauptet. □

I.5.21. Korollar. *Die Euler Charakteristik einer geschlossenen orientierten glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $n \equiv 2 \mod 4$ ist gerade.*

Beweis. Sei also M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$. Nach Voraussetzung ist m daher ungerade. Nach Korollar I.5.20 genügt es zu zeigen, dass $b^m(M)$ gerade ist. Betrachte dazu folgende Bilinearform auf der mittleren Kohomologie, siehe (I.35),

$$\omega : H^m(M) \times H^m(M) \to \mathbb{R}, \qquad \omega(a, b) := (a, b)_M = \int_M a \wedge b.$$

Da m ungerade ist, ist ω schiefsymmetrisch, dh. $\omega(a, b) = -\omega(b, a)$, für alle $a, b \in H^m(M)$, siehe (I.2). Nach Korollar I.5.18 ist ω nicht-degeneriert. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass nicht-degenerierte schiefsymmetrische Bilinearform nur auf Vektorräumen gerader Dimension existieren. Folglich muss $b^m(M) = \dim H^m(M)$ gerade sein. □

I.5.22. Bemerkung (Signatur)**.** Ist M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4k$, dann definiert

$$H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \mapsto (a, b)_M = \int_M a \wedge b,$$

eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform, siehe Korollar I.5.18 und (I.2). Unter der *Signatur* von M verstehen wir die Signatur dieser nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform auf $H^{2k}(M)$.[2]

[2]Es sei b eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum V. Dann existiert eine Basis von V bezüglich der b die Matrixdarstellung $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ hat. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und die Anzahl der negativen Diagonaleinträge unabhängig von der diagonalisierenden Basis. Ihre Differenz, dh. Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen Einträge, wird die *Signatur der symmetrischen Bilinearform b* genannt. Beachte auch, dass zwei

I.5.23. Korollar. *Für jedes $0 \neq c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ gilt auch $0 \neq c^n \in H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, dh. $\{1, c, c^2, \dots, c^n\}$ bildet eine graduierte Basis von $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, vgl. Satz I.3.23. Als graduierte Algebren gilt daher $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}[c]/c^{n+1}$ wobei $|c| = 2$.*

Beweis. O.B.d.A. Sei $n \geq 2$, die anderen Fälle sind trivial. Es bezeichne $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische (glatte) Inklusion. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach n, wir dürfen daher annehmen, dass das Resultat für $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ schon gezeigt ist. Sei nun $0 \neq c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Nach dem letzten Teil von Satz I.3.23 ist auch $0 \neq \iota^* c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun $\iota^*(c^{n-1}) = (\iota^* c)^{n-1} \neq 0$, und somit $0 \neq c^{n-1}$. Nach Korollar I.5.18 existiert $a \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ mit $c^{n-1} \wedge a \neq 0$. Da c eine Basis von $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$ bildet, muss a ein Vielfaches von c sein, es folgt daher $c^n \neq 0$. □

I.5.24. Bemerkung. Es sei $n \geq 1$, $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ glatt und $c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ wie in Korollar I.5.23. Da c eine Basis von $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ bildet, existiert eine eindeutige Zahl λ mit $f^* c = \lambda c$. Da f^* ein Algebrahomomorphismus ist, siehe (I.3), folgt $f^*(c^k) = (f^* c)^k = (\lambda c)^k = \lambda^k c^k \in H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, und daher

$$f^* = \lambda^k : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n), \qquad 0 \leq k \leq n,$$

denn nach Korollar I.5.23 bildet c^k eine Basis von $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Dies liefert starke Einschränkungen an die von einer glatten Abbildung induzierten Homomorphismen $f^* : H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, diese sind durch λ, dh. $f^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, schon völlig bestimmt.

I.5.25. Beispiel. Betrachte die beiden zusammenhängenden geschlossenen orientierbaren 6-Mannigfaltigkeiten $S^2 \times S^4$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$. Nach Satz I.3.23 und Theorem I.4.1 gilt $b^q(S^2 \times S^4) = b^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$ für alle q. Trotzdem können die beiden Mannigfaltigkeiten nicht homotopieäquivalent (und daher auch nicht diffeomorph) sein. Für jedes $a \in H^2(S^2 \times S^4)$ gilt nämlich $a \wedge a = 0$, siehe Beispiel I.4.15, aber es existiert $c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$ mit $c \wedge c \neq 0$, siehe Korollar I.5.23.

I.6. Abbildungsgrad. Korollar I.5.16 erlaubt es einen Abbildungsgrad für glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu definieren. Seien dazu M und N zwei nicht-leere zusammenhängende geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ glatt. Nach Korollar I.5.16 gibt es genau eine reelle Zahl $\deg(f)$ die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} H^n(N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\int_N"', "\cong"] & H^n(M) \arrow[d, "\cong"', "\int_M"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\deg(f)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Diese Zahl $\deg(f)$ wird der *Abbildungsgrad* von f genannt, sie ist durch

$$\textstyle\int_M f^*\alpha = \deg(f) \int_N \alpha, \qquad \text{für alle } \alpha \in \Omega^n(N), \tag{I.37}$$

nicht-degenerierte symmetrische Bilinearformen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum genau dann äquivalent sind wenn sie die gleiche Signatur haben.

eindeutig bestimmt.

I.6.1. Satz (Abbildungsgrad). *Der Abbildungsgrad glatter Abbildungen zwischen nicht-leeren zusammenhängenden geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$, $g : N \to P$, hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\deg(\mathrm{id}_M) = 1$.
(b) $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
(c) Sind $f \simeq g : M \to N$ glatt homotop, dann gilt $\deg(f) = \deg(g)$.
(d) Ist $\deg(f) \neq 0$, *dann muss f surjektiv sein.*
(e) $\deg(A) = (-1)^{n+1}$, *wobei $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, die Antipodalabbildung bezeichnet.*

Beweis. Behauptung (a) ist offensichtlich, denn die identische Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ induziert die identische Abbildung $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^n(M)} : H^n(M) \to H^n(M)$, siehe (I.4). Auch (b) ist offensichtlich, denn $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^n(P) \to H^n(M)$, siehe (I.5). Aus Satz I.2.5 erhalten wir auch sofort (c). Ist $f : M \to N$ nicht surjektiv, dann existiert, aufgrund der Kompaktheit von M, eine offene Teilmenge $U \subseteq N$ mit $f(M) \cap U = \emptyset$. Wähle $\alpha \in \Omega^n(N)$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_N \alpha \neq 0$. Es folgt $f^*\alpha = 0$, also $\deg(f) \int_N \alpha = \int_M f^*\alpha = 0$, siehe (I.37), und daher $\deg(f) = 0$. Dies zeigt (d). Nun zur letzten Behauptung (e). Es bezeichne $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Inklusion, $\tilde{\alpha} := x^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$, und $\alpha := \iota^*\tilde{\alpha} \in \Omega^n(S^n)$. Aus dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], erhalten wir zunächst

$$\int_{S^n} \alpha = \int_{S^n} \iota^*\tilde{\alpha} = \int_{D^{n+1}} d\tilde{\alpha} = \int_{D^{n+1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} = \mathrm{vol}(D^{n+1}) \neq 0.$$

Bezeichnen wir die offensichtliche Ausdehnung von A mit $\tilde{A} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{A}(x) := -x$, dann gilt $\tilde{A} \circ \iota = \iota \circ A$ und $\tilde{A}^*\tilde{\alpha} = (-1)^{n+1}\tilde{\alpha}$. Wir erhalten daher $A^*\alpha = A^*\iota^*\tilde{\alpha} = (\iota \circ A)^*\tilde{\alpha} = (\tilde{A} \circ \iota)^*\tilde{\alpha} = \iota^*\tilde{A}^*\tilde{\alpha} = (-1)^{n+1}\iota^*\tilde{\alpha} = (-1)^{n+1}\alpha$. Zusammen mit (I.37) folgt

$$\deg(A) \int_{S^n} \alpha = \int_{S^n} A^*\alpha = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \alpha,$$

und da $\int_{S^n} \alpha \neq 0$ schließlich $\deg(A) = (-1)^{n+1}$. □

I.6.2. Bemerkung. Für Abbildungen zwischen Sphären gilt sogar die Umkehrung in I.6.1(c), sind $f, g : S^n \to S^n$ glatt und $\deg(f) = \deg(g)$, dann sind f und g glatt homotop.

I.6.3. Satz. *Es sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildungen zwischen nicht-leeren zusammenhängenden geschlossenen orientierten glatten n-Mannigfaltigkeiten. Weiters sei $y \in N$ ein regulärer Wert von f, dh. für jedes $x \in f^{-1}(y)$ sei $T_x f : T_x M \to T_y M$ ein linearer Isomorphismus. Dann ist $f^{-1}(y)$ endlich, und*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(x),$$

wobei $\varepsilon(x) := 1$ *falls* $T_x f$ *orientierungserhaltend bzw.* $\varepsilon(x) := -1$ *falls* $T_x f$ *orientierungsumkehrend ist. Insbesondere ist der Abbildungsgrad stets ganzzahlig!*

Beweis. Nach dem inversen Funktionensatz ist $A := f^{-1}(y)$ eine diskrete Teilmenge von M, also endlich aufgrund der Kompaktheit von M. Nach dem inversen Funktionensatz existieren eine offene Umgebung U von y und offene Umgebungen U_x von $x \in A$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) $f^{-1}(U) = \bigsqcup_{x\in A} U_x$.
(b) $f|_{U_x} : U_x \to U$ ist ein Diffeomorphismus.
(c) U ist zusammenhängend.

Sei nun $\alpha \in \Omega^n(N)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_N \alpha \neq 0$. Aufgrund von (c) ist der Diffeomorphismus $f|_{U_x} : U_x \to U$ orientierungsbewahrend falls $\varepsilon(x) = 1$, bzw. orientierungsumkehrend falls $\varepsilon(x) = -1$. In jedem Fall folgt

$$\int_{U_x} (f|_{U_x})^*\alpha = \varepsilon(x) \int_U \alpha, \qquad x \in A.$$

Nach (a) und da $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$, gilt $\operatorname{supp}(f^*\alpha) \subseteq f^{-1}(U) = \bigsqcup_{x\in A} U_x$, und daher

$$\int_M f^*\alpha = \int_{f^{-1}(U)} f^*\alpha = \sum_{x\in A} \int_{U_x} (f|_{U_x})^*\alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x) \int_U \alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x) \int_N \alpha.$$

Zusammen mit (I.37) folgt $\deg(f) \int_N \alpha = \int_M f^*\alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x) \int_N \alpha$ und da $\int_N \alpha \neq 0$ schließlich $\deg(f) = \sum_{x\in A} \varepsilon(x)$. Die letzte Aussage zur Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades folgt nun aus der nicht-trivialen Tatsache, dass jede glatte Abbildung (sehr viele) reguläre Werte besitzt, siehe Bemerkung I.6.4 unten. □

I.6.4. Bemerkung. Jede glatte Abbildung besitzt reguläre Werte. Die Menge der regulären Werte ist sogar sehr groß, nach einem Satz von Sard ist ihr Komplement eine Nullmenge, siehe etwa [**2**, Satz 6.1] oder [**4**].

I.6.5. Satz. *Es sei* $f : S^n \to S^n$ *glatt,* $n \geq 1$. *Dann gilt:*
(a) Ist f *fixpunktfrei, dh.* $f(x) \neq x$ *für alle* $x \in S^n$, *dann ist* f *homotop zur Antipodalabbildung und daher* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
(b) Ist f *antipodalpunktfrei, dh.* $f(x) \neq -x$ *für alle* $x \in S^n$, *dann ist* f *homotop zur identischen Abbildung und daher* $\deg(f) = 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (b). Ist $f : S^n \to S^n$ antipodalpunktfrei, dh. $f(x) \neq -x$, für alle $X \in S^n$, dann liefert

$$h : S^n \times I \to S^n, \qquad h(x,t) := \frac{tx + (1-t)f(x)}{|tx + (1-t)f(x)|},$$

die gewünschte Homotopie von f zur identischen Abbildung id_{S^n}. Beachte, dass der Nenner in diesem Ausdruck wegen der Antipodalpunktfreiheit nie verschwindet. Aus Satz I.6.1 folgt nun auch $\deg(f) = 1$. Um (a) einzusehen, sei nun

$f : S^n \to S^n$ fixpunktfrei, dh. $f(x) \neq x$ für alle $x \in S^n$. Es ist dann

$$h : S^n \times I \to S^n, \qquad h(x,t) := \frac{-tx + (1-t)f(x)}{|-tx + (1-t)f(x)|},$$

eine Homotopie von f zur Antipodalabbildung A. Aus Satz I.6.1 folgt nun auch $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. □

I.6.6. Korollar. *Ist $f : S^{2n} \to S^{2n}$ glatt, dann existiert $x \in S^{2n}$ mit $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$, $n \geq 0$.*

Beweis. Hätte $f : S^{2n} \to S^{2n}$ weder Fix- noch Antipodalpunkt, erhielten wir den Widerspruch $1 = \deg(f) = (-1)^{2n+1} = -1$ aus Satz I.6.5(a) bzw. (b). □

I.6.7. Korollar (Satz vom Igel)**.** *Jedes glatte Vektorfeld X auf S^{2n}, $n \geq 0$, besitzt eine Nullstelle, dh. es existiert $x \in S^{2n}$ mit $X(x) = 0$.*

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Wir gehen indirket vor und nehmen an $X \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ besitze keine Nullstelle. Dann ist $f : S^{2n} \to S^{2n}$, $f(x) := X(x)/|X(x)|$, eine glatte Abbildung ohne Fixpunkt und ohne Antipodalpunkt, denn $f(x) \perp x$ für alle $x \in S^{2n}$. Da dies Korollar I.6.6 widerspricht muss X also eine Nullstelle besitzen. □

I.7. Poincaré Dual von Teilmannigfaltigkeiten. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einer *Teilmannigfaltigkeit* von M verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq M$, sodass zu jedem Punkt $x \in S$ eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ von M existiert, für die $x \in U$ und $u(U \cap S) = u(U) \cap \mathbb{R}^k$ gilt. Dh. lokal liegt S in M wie $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Jede solche Karte wird eine *Teilmannigfaltigkeitskarte (lokale Trivialisierung)* von $S \subseteq M$ bei x genannt. Die Einschränkungen dieser Teilmannigfaltigkeitskarten bilden einen glatten Atlas für S, jede Teilmannigfaltigkeit ist daher in natürlicher Weise selbst eine glatte Mannigfaltigkeit. Zudem ist die kanonische Inklusion $\iota : S \to M$ glatt. Für $M = \mathbb{R}^n$ liefert dies den selben Begriff wie in [**3**, Kapitel 2].

I.7.1. Bemerkung. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Dann ist S auch Teilmannigfaltigkeit von N, vgl. Aufgabe 26.

I.7.2. Definition (Transversalität)**.** Zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ heißen *transversal,* wenn für jedes $x \in M$ und $y \in P$ mit $f(x) = g(y) =: z$ die Bilder der Tangentialabbildungen $T_x f : T_x M \to T_z N$ und $T_y g : T_y P \to T_z N$ den Tangentialraum $T_z N$ aufspannen, dh.

$$\operatorname{img}\bigl(T_x M \xrightarrow{T_x f} T_z N\bigr) + \operatorname{img}\bigl(T_y P \xrightarrow{T_y g} T_z N\bigr) = T_z N.$$

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird transversal zu einer Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq N$ genannt, wenn sie transversal zu der kanonischen Inklusion $\iota : S \to N$ ist. Zwei Teilmannigfaltigkeiten $S_1, S_2 \subseteq N$ werden transversal genannt, wenn die kanonischen Inklusionen $\iota_1 : S_1 \to N$ und $\iota_2 : S_2 \to N$ transversal sind.

I.7.3. Satz. *Es sei $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit und $f : M \to N$ transversal zu S. Dann ist $f^{-1}(S)$ eine Teilmannigfaltigkeit von M und es gilt*

$$\dim_x(M) - \dim_x(f^{-1}(S)) = \dim_{f(x)}(N) - \dim_{f(x)}(S), \qquad x \in f^{-1}(S),$$

dh. die Kodimension von $f^{-1}(S)$ in M stimmt mit der Kodimension von S in N überein.

Beweis. Sei also $x \in f^{-1}(S)$. Da $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit ist, existiert eine Karte $N \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in U$ und $u(U \cap S) = u(U) \cap \mathbb{R}^s$, wobei $n = \dim_{f(x)}(N)$ und $s = \dim_{f(x)}(S)$. Da f stetig ist, existiert eine Karte $M \supseteq V \xrightarrow{v} v(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in V$ und $f(V) \subseteq U$, wobei $m = \dim_x(M)$. Betrachte nun die glatte Abbildung $\mathbb{R}^m \supseteq v(V) \xrightarrow{g:=p_2 \circ u \circ v^{-1}} \mathbb{R}^{n-s}$, wobei $p_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$ die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Beachte $v(V \cap f^{-1}(S)) = g^{-1}(0)$. Wegen der Transversalitätsvoraussetzung ist zudem $D_z g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-s}$ für jedes $z \in v(V \cap f^{-1}(S))$ surjektiv. Somit ist $v(V \cap f^{-1}(S))$ eine $(m-n+s)$-dimensionale reguläre Nullstellenmenge, siehe [**3**, Abschnitt 2.1]. Aus dem Satz in [**3**, Abschnitt 2.3] folgt daher, dass $v(V \cap f^{-1}(S))$ lokale $(m-n+s)$-dimensionale Trivialisierungen besitzt. Also existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq v(V)$ mit $v(x) \in W$ und ein Diffeomorphismus $\psi : W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$, sodass $\psi(W \cap (V \cap f^{-1}(S))) = \psi(W) \cap \mathbb{R}^{m-n+s}$. Die Komposition $\psi \circ v|_{v^{-1}(W)} : v^{-1}(W) \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist daher eine Teilmannigfaltigkeitskarte von $S \subseteq M$ bei x. □

I.7.4. Bemerkung. Es sei $f : M \to N$ glatt. Ein Punkt $y \in N$ wird *regulärer Wert von f* genannt, wenn für jedes $x \in f^{-1}(y)$ die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_y N$ surjektiv ist. Offensichtlich ist dies genau dann der Fall, wenn f transversal zu der einpunktigen Teilmannigfaltigkeit $\{y\} \subseteq N$ ist. Aus Satz I.7.3 folgt daher, dass das Urbild $f^{-1}(y)$ eines regulären Wertes y eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit bildet und es gilt $\dim_x(M) - \dim_x(f^{-1}(y)) = \dim_{f(x)}(N)$, für alle $x \in f^{-1}(y)$.

I.7.5. Bemerkung. Sind S_1 und S_2 zwei transversale Teilmannigfaltigkeiten von M, dann ist auch ihr Durchschnitt $S_1 \cap S_2$ eine Teilmannigfaltigkeit von M, und für jedes $x \in S_1 \cap S_2$ gilt

$$\dim_x(M) - \dim_x(S_1 \cap S_2) = \big(\dim_x(M) - \dim_x(S_1)\big) + \big(\dim_x(M) - \dim_x(S_2)\big),$$

dh. die Kodimension ist additiv. Es bezeichnen dazu $\iota_1 : S_1 \to M$ und $\iota_2 : S_2 \to M$ die beiden kanonischen Inklusionen. Nach Satz I.7.3 ist $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1)$ eine Teilmannigfaltigkeit von S_2. Zusammen mit Bemerkung I.7.1 folgt daher, dass $S_1 \cap S_2$ auch Teilmannigfaltigkeit von M ist.

I.7.6. Definition. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird *immersiv* oder *Immersion* genannt, wenn die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ bei jedem $x \in M$ injektiv ist. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird *submersiv* oder *Submersion* genannt, wenn die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ bei jedem $x \in M$ surjektiv ist.

I.7.7. Beispiel. Eine immersive Abbildung wird i.A. nicht injektiv sein, betrachte etwa $\mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\mathbf{i}t}$. Das Bild einer injektiven Immersion wird i.A. keine Teilmannigfaltigkeit sein.

I.7.8. Satz. *Es sei $f : M \to N$ eine injektive Immersion und ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dh. $f : M \to f(M)$ ist ein Homöomorphismus, wobei $f(M)$ die von N induzierte Topologie trägt. Dann ist $f(M)$ eine Teilmannigfaltigkeit von N und es gilt*

$$\dim_{f(x)}(f(M)) = \dim_x(M), \qquad x \in M.$$

Beweis. Es sei $x \in M$ und $M \supseteq \tilde{U} \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{u}(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit $x \in \tilde{U}$, $m = \dim_x(M)$. Da f ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, existiert eine offene Teilmenge $\tilde{V} \subseteq N$ mit $f(\tilde{U}) = f(M) \cap \tilde{V}$. Wähle eine Karte $N \supseteq V \xrightarrow{v} v(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in V \subseteq \tilde{V}$, $n = \dim_{f(x)}(N)$. Setze $U := \tilde{U} \cap f^{-1}(V)$ und $M \supseteq U \xrightarrow{u:=\tilde{u}|_U} u(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Nach Konstruktion ist dies eine Karte von M mit $x \in U$ und es gilt $f(U) = f(M) \cap V$. Es ist daher $v \circ f \circ u^{-1} : u(U) \to v(f(M) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Parametrisierung von $v(f(M) \cap V)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.1]. Nach dem Satz in [**3**, Abschnitt 2.3] ist $v(f(M) \cap V)$ also eine m-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt sofort, dass $f(M)$ eine Teilmannigfaltigkeit von N ist. □

I.7.9. Bemerkung. Ist $f : M \to N$ eine injektive Immersion und M geschlossen, dann ist f ein Homöomorphismus auf ihr Bild und $f(M)$ daher eine Teilmannigfaltigkeit von N, siehe Satz I.7.8. Dies folgt aus der elementaren Tatsache, dass jede stetige Bijektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum schon ein Homöomorphismus ist, siehe etwa [**5**, Kapitel I§8].

I.7.10. Beispiel. Es sei $f : M \to N$ glatt, und es bezeichne

$$G_f := \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in M\big\} \subseteq M \times N$$

den *Graph* von f. Dies ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit und $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f$, $x \mapsto (x, f(x))$, ist ein Diffeomorphismus mit Inverser $p_1 : G_f \to M$, $p_1(x, y) := x$, siehe [**3**, Abschnitt 2.3]. Ist M orientiert, dann versehen wir G_f mit jener eindeutigen Orientierung, die $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f$ zu einem orientierungsbewahrenden Diffeomorphismus macht.

I.7.11. Beispiel. Für jede glatte glatte Mannigfaltigkeit M, ist die *Diagonale,*

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M,$$

eine glatte Teilmannigfaltigkeit und $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ ein Diffeomorphismus. Dies ist ein Spezialfall von Beispiel I.7.10, denn die Diagonale ist der Graph der identischen Abbildung, $\Delta = G_{\mathrm{id}_M}$. Ist M orientiert, dann versehen wir die

Diagonale mit jener eindeutigen Orientierung, die $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ zu einem orientierungsbewahrenden Diffeomorphismus macht.

I.7.12. Bemerkung. Zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ sind genau dann transversal, wenn die Abbildung $f \times g : M \times P \to N \times N$ transversal zur Diagonale $\Delta \subseteq N \times N$ ist, vgl. Aufgabe I.7.12.

I.7.13. Definition (Poincaré Dual einer Teilmannigfaltigkeit)**.** Es bezeichne $\iota : S \to M$ die Inklusion einer geschlossenen orientierten k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit in einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Betrachte nun das lineare Funktional

$$H^k(M) \to \mathbb{R}, \qquad a \mapsto \int_S a := \int_S \iota^* a.$$

Nach Korollar I.5.18 existiert eine eindeutige Klasse $\eta_S \in H^{n-k}(M)$, sodass

$$\int_S a = \int_M a \wedge \eta_S, \qquad \text{für alle } a \in H^k(M). \tag{I.38}$$

Die Klasse η_S wird als das *Poincaré Dual* der Teilmannigfaltigkeit S bezeichnet.

I.7.14. Beispiel. Es sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeit. Das Poincaré Dual eines Punktes $P \in M$ ist dann jene eindeutig bestimmte Klasse $\eta_P \in H^n(M)$ für die $\int_M \eta_P = 1$ gilt, vgl. Korollar I.5.16.

I.7.15. Beispiel. Es sei M eine geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeit. Fassen wir M als Teilmannigfaltigkeit von sich selbst auf, dann gilt für ihr Poincaré Dual offensichtlich $\eta_M = [1] \in H^0(M)$.

I.7.16. Beispiel. Das Poincaré Dual von $S^k \subseteq S^n$, $0 < k < n$, ist trivial, denn $H^{n-k}(S^n) = 0$, siehe Satz I.3.18.

I.7.17. Beispiel. Das Poincaré Dual der Teilmannigfaltigkeit $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $0 \leq k \leq n$, ist nicht-trivial, denn die Inklusion induziert einen Isomorphismus $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^k) \cong \mathbb{R}$, siehe Satz I.3.23.

I.7.18. Beispiel. Es sei $x \in S^1$ und betrachte die Teilmannigfaltigkeit $S := S^1 \times \{x\} \subseteq S^1 \times S^1$. Für ihr Poincaré Dual $\eta_S \in H^1(S^1 \times S^1)$ gilt dann $\eta_S = p_2^* a$, wobei $a \in H^1(S^1)$ die eindeutige Klasse mit $\int_{S^1} a = 1$ bezeichnet. Eine Verallgemeinerung davon wird in Aufgabe 28 besprochen.

I.7.19. Definition (Lefschetz Zahl)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie und $f : M \to M$ glatt. Unter der *Lefschetz Zahl* von f verstehen wir reelle Zahl

$$\lambda(f) := \sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\bigl(H^q(M) \xrightarrow{f^*} H^q(M)\bigr).$$

I.7.20. Proposition. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie. Die Lefschetz Zahl glatter Abbildungen $f, g : M \to M$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\lambda(\mathrm{id}_M) = \chi(M)$.

(b) $\lambda(f\circ g)=\lambda(g\circ f)$.
(c) Sind f *und* g *glatt homotop, dann gilt* $\lambda(f)=\lambda(g)$.

Beweis. Behauptung (a) ist offensichtlich, denn $\operatorname{tr}(\mathrm{id}_V)=\dim V$ für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V, siehe auch (I.4). Auch (b) ist offensichtlich, denn $\operatorname{tr}(\varphi\circ\psi)=\operatorname{tr}(\psi\circ\varphi)$ für je zwei lineare Abbildungen $\varphi,\psi:V\to V$, siehe auch (I.5). Behauptung (c) folgt aus Satz I.2.5. □

I.7.21. Proposition. *Es sei* M *eine geschlossene orientierte glatte* n*-Mannigfaltigkeit,* a_i *eine graduierte Basis von* $H^*(M)$*, und* b^j *die dazu duale Basis von* $H^*(M)$*, dh.* $\int_M a_i\wedge b^j=\delta_i^j$*, vgl. Korollar I.5.18. Weiters sei* $f:M\to M$ *glatt und* $f_i^j\in\mathbb{R}$ *die Matrixdarstellung von* $f^*:H^*(M)\to H^*(M)$*, dh.* $f^*a_i=\sum_j f_i^j a_j$*. Für das Poincaré Dual des Graphen* $\eta_{G_f}\in H^n(M\times M)$*, siehe Beispiel I.7.10, gilt dann*

$$\eta_{G_f}=\sum_{i,j}(-1)^{|a_i|}f_j^i\,p_1^*a_i\wedge p_2^*b^j,$$

wobei $p_1,p_2:M\times M\to M$ *die beiden kanonischen Projektionen bezeichnen.*

Beweis. Nach Satz I.4.1 existieren $\eta_j^i\in\mathbb{R}$ mit $\eta_{G_f}=\sum_{i,j}\eta_j^i\,p_1^*a_i\wedge p_2^*b^j$. Es gilt nun η_j^i zu berechnen. Mit Bemerkung I.4.16 erhalten wir, für jedes k und l,

$$\begin{aligned}\int_{M\times M}p_1^*b^k\wedge p_2^*a_l\wedge\eta_{G_f}&=\sum_{i,j}\eta_j^i\int_{M\times M}p_1^*b^k\wedge p_2^*a_l\wedge p_1^*a_i\wedge p_2^*b^j\\&=\sum_{i,j}(-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|}\,\eta_j^i\int_{M\times M}p_1^*(a_i\wedge b^k)\wedge p_2^*(a_l\wedge b^j)\\&=\sum_{i,j}(-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|}\,\eta_j^i\int_M p_1^*(a_i\wedge b^k)\int_M p_2^*(a_l\wedge b^j)\\&=\sum_{i,j}(-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|}\,\eta_j^i\,\delta_i^k\,\delta_l^j=(-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_k|}\,\eta_l^k\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Definition des Poincaré Duals, siehe (I.38),

$$\begin{aligned}\int_{M\times M}p_1^*b^k\wedge p_2^*a_l\wedge\eta_{G_f}&=\int_{G_f}p_1^*b^k\wedge p_2^*a_l=\int_M(\mathrm{id}_M,f)^*(p_1^*b^k\wedge p_2^*a_l)\\&=\int_M b^k\wedge f^*a_l=\sum_j f_l^j\int_M b^k\wedge a_j=\sum_j(-1)^{|b^k||a_j|}f_l^j\delta_j^k=(-1)^{|b^k||a_k|}f_l^k,\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also $\eta_l^k=(-1)^{|a_l||a_k|}f_l^k=(-1)^{|a_k|}f_l^k$, wobei wir im letzten Gleichheitszeichen verwendet haben, dass f_l^k nur dann nicht-trivial sein kann, wenn $|a_k|=|a_l|$ gilt. □

I.7.22. Satz. *Ist* M *eine geschlossene orientierte glatte* n*-Mannigfaltigkeit,* $f:M\to M$ *glatt und bezeichnet* $\eta_{G_f}\in H^n(M\times M)$ *das Poincaré Dual des Graphen*

$G_f \subseteq M \times M$, siehe Beispiel I.7.10, dann gilt

$$\textstyle\int_\Delta \eta_{G_f} = \lambda(f),$$

wobei $\Delta \subseteq M \times M$ die Diagonale bezeichnet.

Beweis. Da $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ ein orientierungsbewahrender Diffeomorphismus ist folgt, mit der Notation aus Proposition I.7.21,

$$\begin{aligned}\int_\Delta \eta_{G_f} = \int_M (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)^* \eta_{G_f} &= \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \int_M (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)^*(p_1^* a_i \wedge p_2^* b^j) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \int_M a_i \wedge b^j = \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \, \delta^j_i = \sum_i (-1)^{|a_i|} f^i_i \\ &= \sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\bigl(H^q(M) \xrightarrow{f^*} H^q(M)\bigr) = \lambda(f),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

I.7.23. Korollar. *Ist M eine orientierte geschlossene glatte n-Mannigfaltigkeit und bezeichnet $\eta_\Delta \in H^n(M \times M)$ das Poincaré Dual der Diagonale $\Delta \subseteq M \times M$, dann gilt $\int_\Delta \eta_\Delta = \chi(M)$.*

Beweis. Die Diagonale ist der Graph der identischen Abbildung, $\Delta = G_{\mathrm{id}_M}$. Aus Satz I.7.22 erhalten wir somit $\int_\Delta \eta_\Delta = \lambda(\mathrm{id}_M) = \chi(M)$, siehe auch Proposition I.7.20(a). □

I.8. Abschließende Bemerkungen. Die de Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit ist in kanonischer Weise zu ihrer singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten isomorph. Wir wollen hier noch einen Beweis dieses Satzes von de Rham kurz skizzieren.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einem glatten q-Simplex verstehen wir eine glatte Abbildung $\sigma : \Delta^q \to M$, wobei $\Delta^q := \bigl\{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\bigr\}$ den standard q-Simplex bezeichnet. Der Standardsimplex ist eine Mannigfaltigkeit mit Ecken, i.A. jedoch keine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Glattheit von σ meint, dass eine glatte Ausdehnung auf eine offene Umgebung von $\Delta^q \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$ existiert. Es bezeichne $S^\infty_q(M)$ die Menge aller glatten q-Simplizes in M, und $C^q_\infty(M; \mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller Abbildungen $S^\infty_q(M) \to \mathbb{R}$. Offensichtlich ist dies ein Teilkomplex des singulären Kokettenkomplexes, $C^*_\infty(M; \mathbb{R}) \subseteq C^*_{\text{sing.}}(M; \mathbb{R})$, wir bezeichnen seine Kohomologie mit $H^q_\infty(M; \mathbb{R})$. Jede glatte Abbildung $f : M \to N$ induziert offensichtlich eine Komplexabbildung $f^* : C^*_\infty(N; \mathbb{R}) \to C^*_\infty(M; \mathbb{R})$, und daher Abbildungen in der Kohomologie, $f^* : H^q_\infty(N; \mathbb{R}) \to H^q_\infty(M; \mathbb{R})$. Da die baryzentrische Unterteilung glatte Simplizes bewahrt haben wir auch für $H^*_\infty(M; \mathbb{R})$ eine Mayer–Vietoris Sequenz. Da die Kegelkonstruktion glatte Simplizes bewahrt induziert die Inklusion

$C^*_\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \to C^*_{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ Isomorphismen

$$H^q_\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = H^q_{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{I.39}$$

Ein Mayer–Vietoris Argument wie im Beweis von Satz I.4.1 oder Satz I.5.9 zeigt dann, dass die Inklusion in den singulären Kokettenkomplex, $C^*_\infty(M;\mathbb{R}) \to C^*_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R})$, für jedes M und q natürliche Isomorphismen

$$H^q_\infty(M;\mathbb{R}) = H^q_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R}) \tag{I.40}$$

induziert. Die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten kann daher mit glatten Simplizes berechnet werden.

Integration liefert lineare Abbildungen

$$\varphi : \Omega^q(M) \to C^q_\infty(M;\mathbb{R}), \quad \varphi(\alpha)(\sigma) := \int_{\Delta^q} \sigma^*\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M),\ \sigma \in S^\infty_q(M).$$

Aus dem Satz von Stokes (für Mannigfaltigkeiten mit Ecken) folgt, dass dies eine Komplexabbildung ist und daher Abbildungen in der Kohomologie induziert,

$$\varphi : H^q_{\text{de Rham}}(M) \to H^q_\infty(M;\mathbb{R}). \tag{I.41}$$

Diese sind offensichtlich natürlich, dh. mit den von glatten Abbildungen $f : M \to N$ induzierten Homomorphismen verträglich. Für $M = \mathbb{R}^n$ und jedes q ist (I.41) ein Isomorphismus, siehe (I.39). Eine einfache Überlegung zeigt, dass (I.41) auch mit den Einhängungshomomorphismen der Mayer–Vietoris Sequenzen verträglich ist. Mit einem Mayer–Vietoris Argument wie im Beweis von Satz I.4.1 oder Satz I.5.9 folgt dann, dass (I.41) für jedes M und q ein Isomorphismus ist. Zusammen mit (I.40) erhalten wir also einen natürlichen Isomorphismus zwischen der de Rham Kohomologie $H^*_{\text{de Rham}}(M)$ und der singulären Kohomologie $H^*_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R})$.

I.9. Aufgaben zu Kapitel I.

1. Aufgabe. Es sei $M \neq \emptyset$ eine orientierbare kompakte n-Mannigfaltigkeit mir Rand ∂M. Zeige, dass ∂M nicht glatter Retrakt von M ist, dh. es existiert keine glatte Abbildung $r : M \to \partial M$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in \partial M$. Insbesondere ist also S^{n-1} nicht glatter Retrakt von D^n, $n \geq 1$. *Anleitung:* Nimm indirekt die Existenz einer solchen Abbildung r an, konstruiere eine Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\partial M)$ mit $\int_{\partial M} \alpha \neq 0$ und wende den Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], auf $r^*\alpha$ an.

2. Aufgabe. Zeige folgende Version des Fixpunktsatzes von Brouwer. Jede glatte Abbildung $f : D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt, $n \geq 0$. *Anleitung:* O.B.d.A. sei $n \geq 1$. Gehe indirekt vor und nimm an f hätte keinen Fixpunkt. Betrachte die Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$ die jedem Punkt $x \in D^n$ den (eindeutigen) Schnittpunkt von S^{n-1} mit dem Halbstrahl $\{x + t(x - f(x)) : t \geq 0\}$ zuordnet.

Zeige, dass r durch die Formel $r(x) := x + t(x)\big(x - f(x)\big)$ gegeben ist, wobei $t : D^n \to [0, \infty)$,

$$t(x) := \frac{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \sqrt{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle^2 + \big(1 - |x|^2\big)\big|f(x) - x\big|^2}}{\big|f(x) - x\big|^2}.$$

Schließe daraus, dass r glatt ist und leite einen Widerspruch zu Aufgabe 1 her.

3. Aufgabe. Zeige, dass glatt homotop zu sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Abbildungen $M \to N$ definiert, vgl. Bemerkung I.2.2. *Hinweis:* Für die Transitivität ist es hilfreich Homotopien mit $h(x, t) = h(x, 0)$ für $t \in [0, 1/3]$ und $h(x, t) = h(x, 1)$ für $t \in [2/3, 1]$ zu betrachten.

4. Aufgabe. Es seien $f_0 \simeq f_1 : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen und $g_0 \simeq g_1 : N \to P$ zwei weitere glatt homotope Abbildungen. Zeige, dass dann auch $g_0 \circ f_0$ glatt homotop zu $g_1 \circ f_1$ ist, vgl. Bemerkung I.2.3.

5. Aufgabe. Zeige, dass der Ausdruck $\int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt$ im Beweis von Satz I.2.5 tatsächlich eine glatte Differentialform definiert.

6. Aufgabe. Zeige, dass die stereographische Projektion in Beispiel I.2.16 tatsächlich ein Diffeomorphismus $N^\perp \cong S^n \setminus \{N\}$ ist.

7. Aufgabe. Zeige, dass die Abbildung $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und beschreibe das Urbild $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{RP}^n$, vgl. Beispiel I.2.17.

8. Aufgabe. Konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, siehe Beispiel I.2.17.

9. Aufgabe. Es sei $N := [0 : 0 : 1] \in \mathbb{RP}^2$. Zeige, dass $\mathbb{RP}^2 \setminus \{N\}$ diffeomorph zum Möbiusband ist.

10. Aufgabe. Zeige, dass die Hopf Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ glatt ist und beschreibe das Urbild $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{CP}^n$, vgl. Beispiel I.2.18.

11. Aufgabe. Konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, vgl. Beispiel I.2.18.

12. Aufgabe. Zeige, dass die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Homotopieäquivalenz ist, vgl. Beispiel I.2.19.

13. Aufgabe. Zeige, dass die kanonische Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine glatte Homotopieäquivalenz ist, vgl. Beispiel I.2.19.

14. Aufgabe. Zeige, dass der Einhängungshomomorphismus in Satz I.3.11 tatsächlich linear ist.

15. Aufgabe. Zeige, dass die Aussage im Fünferlemma I.3.8 richtig bleibt, wenn das Diagramm nur bis auf Vorzeichen kommutiert.

16. Aufgabe. Betrachte die zusammenhängende glatte 2-Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Zeige, dass $H^1(M)$ unendlich dimensional ist.

17. Aufgabe. Berechne $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$.

18. Aufgabe. Zeige, dass die Betti Zahlen der beiden Mannigfaltigkeiten $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times S^{2n+2}$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1}$ übereinstimmen, diese jedoch nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht diffeomorph sind.

19. Aufgabe. Betrachte die glatte Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^5 \setminus (\mathbb{R}^2 \cup \{P\})$ wobei $P \in \mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^2$. Zeige $H^q(M) \cong \mathbb{R}$ für $q = 0, 2, 4$ und $H^q(M) = 0$ andernfalls, dh. M hat dieselben Betti Zahlen wie $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, vgl. Satz I.3.23. Zeige weiters $a \wedge a = 0$ für alle $a \in H^2(M)$, und schließe daraus, dass M nicht homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sein kann.

20. Aufgabe. Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie. Zeige $p_{M\times N}(t) = p_M(t) \cdot p_N(t)$. *Hinweis:* Gehe wie im Beweis von Korollar I.4.9 vor.

21. Aufgabe. Führe die Details in Bemerkung I.4.16 aus. Zeige insbesondere, dass die Produktorientierung auf $M\times N$ wohldefiniert und glatt ist, und verifiziere $\int_{M\times N} p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta = \int_M \alpha \cdot \int_N \beta$ für alle $\alpha \in \Omega_c^m(M)$ und $\beta \in \Omega_c^n(N)$. *Hinweis:* Wähle Partitionen der Eins $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, von M und $\{\mu_j\}_{j\in J}$, von N, und verwende die Partition der Eins $\{(\lambda_i \circ p_1) \cdot (\mu_j \circ p_2)\}_{(i,j)\in I\times J}$, von $M \times N$ um das Integral über $M \times N$ zu berechnen.

22. Aufgabe. Es seien M und N zwei geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten gerader Dimension. Zeige $\sigma(M \times N) = 0$.

23. Aufgabe. Es seien M und N zwei geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension $4k$ bzw. $4l$. Zeige $\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N)$.

24. Aufgabe. Betrachte $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $f_n : S^1 \to S^1$, $f_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Zeige $\deg(f_n) = n$ auf zwei Arten, einmal mit Hilfe von Satz I.6.3 und einmal direkt aus der Definition, siehe (I.37).

25. Aufgabe. Berechne den Abbildungsgrad der Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, mit Hilfe von Satz I.6.3.

26. Aufgabe. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Zeige, dass dann S auch Teilmannigfaltigkeit von N ist, vgl. Bemerkung I.7.1.

27. Aufgabe. Zeige, dass zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ genau dann transversal sind, wenn die Abbildung $f \times g : M \times P \to N \times N$ transversal zur Diagonale $\Delta \subseteq N \times N$ ist, vgl. Bemerkung I.7.12. *Hinweis:* Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum und sind $V_0, V_1 \subseteq V$ zwei Teilräume dann gilt $V_0 + V_1 = V$ genau dann wenn $V_0 \times V_1 + D = V \times V$, wobei $D \subseteq V \times V$ den Teilraum $D := \{(v, v) \mid v \in V\}$ bezeichnet.

28. Aufgabe. Es sei $S \subseteq N$ eine geschlossene orientierte k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit in einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit N und

M eine weitere geschlossene orientierte m-Mannigfaltigkeit. Es bezeichne $\eta_S \in H^{n-k}(N)$ das Poincaré Dual von $S \subseteq N$ und $\eta_{M\times S} \in H^{n-k}(M \times N)$ das Poincaré Dual von $M \times S \subseteq M \times N$. Zeige $\eta_{M\times S} = p_2^*\eta_S$, wobei $p_2 : M \times N \to N$ die kanonische Projektion bezeichnet. *Hinweis:* Zeige zuerst $\int_{M\times S} p_1^*a \wedge p_2^*b = \int_{M\times N} p_1^*a \wedge p_2^*b \wedge p_2^*\eta_S$, $a \in H^p(M)$, $b \in H^q(N)$, $p + q = m + k$, und verwendet das Künneth Theorem I.4.1 um daraus $\eta_{M\times S} = p_2^*\eta_S$ zu schließen.

29. Aufgabe. Zeige, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau dann orientierbar ist wenn $n = 0$ oder n ungerade ist, ohne dabei auf die hier nicht vollständig bewiesene Bemerkung I.5.17 zurückzugreifen. *Hinweis:* Zeige, dass die Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$ für ungerades n orientierungsbewahrend ist und schließe daraus, dass in diesem Fall auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau eine Orientierung existiert für die die kanonische Projektion $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein orientierungserhaltender lokaler Diffeomorphismus wird. Für gerades $n > 0$ verwende etwa Korollar I.5.20 und Beispiel I.3.15 oder Satz I.6.1(e).

II. Vektorbündel

II.1. Definition und elementare Konstruktionen. Unter einem *Vektorbündel* über einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine glatte Abbildung $p : E \to M$ zusammen mit einer reellen Vektorraumstruktur auf jeder *Faser* $E_x := p^{-1}(x)$, $x \in M$, die *lokal trivial* in folgendem Sinn sind. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U von x_0, ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum V und ein Diffeomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times V$ mit $p_1 \circ \varphi = p$, der faserweise linear ist, dh. $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times V = V$ ist ein linearer Isomorphismus, für jedes $x \in U$.[3] In diesem Fall werden M als *Basis*, E als *Totalraum* und p als *kanonische Projektion* des Vektorbündels bezeichnet. Jedes φ wie oben wird eine *lokale Trivialisierung* oder *Vektorbündelkarte* von E genannt. Beachte, dass die Projektion eines Vektorbündels stets surjektiv ist, denn jede Faser enthält zumindest das Nullelement eines Vektorraums.

Unter dem *Rang* des Vektorbündels bei $x \in M$ verstehen wir die Dimension der Faser E_x, dh. $\operatorname{rank}_x(E) := \dim(E_x)$. Offensichtlich ist der Rang lokal konstant in x, für zusammenhängende Basen M ist er daher konstant. Hat jede Faser die gleiche Dimension k dann sprechen wir von einem Vektorbündel vom Rang k und schreiben $\operatorname{rank}(E) = k$. Ein Vektorbündel vom Rang 1 wird auch als *Linienbündel* bezeichnet.

Unter einem *orientierten Vektorbündel* verstehen wir ein Vektorbündel $p : E \to M$ zusammen mit einer Orientierung auf jeder Faser E_x, $x \in M$, die lokal trivial in folgendem Sinn sind. Zu jedem $x_0 \in M$ existiert ein orientierter endlich dimensionaler reeller Vektorraum V und eine faserweise orientierungserhaltende Vektorbündelkarte $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times V$ mit $x_0 \in U$, dh. für jedes $x \in U$ ist der lineare Isomorphismus $\varphi_x : E_x \to \{x\} \times V = V$ orientierungsbewahrend. Ein Vektorbündel wird *orientierbar* genannt, falls es eine Orientierung besitzt.

Es sei E ein orientiertes Vektorbündel über M und $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ eine Atlas aus orientierungsbewahrenden Vektorbündelkarten, dh. $\bigcup_i U_i = M$. Ist auch M orientiert, dann bewahren die Vektorbündelkartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times V_i \to (U_i \cap U_j) \times V_j$ die Produktorientierung, diese definieren daher eine Orientierung des Totalraums E. Wir bezeichnen diese Orientierung der Mannigfaltigkeit E als die *induzierte Orientierung* des Totalraums.

Unter einem *Schnitt* eines Vektorbündels $p : E \to M$ verstehen wir eine Abbildung $s : M \to E$, sodass $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Die Menge der *glatten Schnitte* bezeichnen wir mit

$$\Gamma(E) := \big\{ s \in C^\infty(M, E) \bigm| p \circ s = \mathrm{id}_M \big\}.$$

[3] Da jeder endlich dimensionale Vektorraum zu $\mathbb{R}^k$ isomorph ist, wird dies oft äquivalent wie folgt formuliert. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U von x_0, $k \in \mathbb{N}_0$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$ mit $p_1 \circ \varphi = p$, der faserweise linear ist, dh. $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$ ist ein linearer Isomorphismus, für jedes $x \in U$.

Schnitte von E können punktweise addiert und mit Funktionen multipliziert werden, $(s_1 + s_2)(x) := s_1(x) + s_2(x)$, $(fs)(x) := f(x)s(x)$. Für glatte Schnitte $s_1, s_2, s \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ sind auch $s_1 + s_2$ und fs glatte Schnitte von E, die Glattheit von $s_1 + s_2$ und fs lässt sich leicht mit Hilfe lokaler Trivialisierungen von E zeigen. Dadurch wird $\Gamma(E)$ also ein Modul über $C^\infty(M)$. Insbesondere besitzt jedes Vektorbündel einen kanonischen glatten Schnitt, den sogenannten *Nullschnitt*, $o \in \Gamma(E)$, der jedem $x \in M$ das Nullelement im Vektorraum E_x zuordnet, $o(x) = 0$. Das Bild des Nullschnitts ist eine zu M diffeomorphe Teilmannigfaltigkeit von E, o und die Einschränkung von p liefern zueinander inverse Diffeomorphismen $M \cong o(M) \subseteq E$. Unter dem *Träger* eines Schnittes $s \in \Gamma(E)$ verstehen wir die Teilmenge $\operatorname{supp}(s) = \overline{\{x \in M \mid s(x) \neq 0\}}$.

II.1.1. Beispiel. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein endlich dimensionaler Vektorraum, dann ist $E := M \times V$ zusammen mit der kanonischen Projektion $p : E \to M$ ein Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E) = \dim(V)$. Jedes solche Vektorbündel wird als *triviales Vektorbündel* bezeichnet, seine Schnitte können in kanonischer Weise mit den V-wertigen glatten Funktionen auf M identifiziert werden, $\Gamma(E) = C^\infty(M, V)$. Wir bezeichnen das triviale Vektorbündel $M \times \mathbb{R}^k \to M$ mit ξ^k. Insbesondere können wir $C^\infty(M)$ als Schnitte des trivialen Linienbündels ξ^1 verstehen, und allgemeiner $C^\infty(M, \mathbb{R}^k) = \Gamma(\xi^k)$.

II.1.2. Beispiel. Das *Tangentialbündel* $p : TM \to M$ einer glatten Mannigfaltigkeit ist ein Vektorbündel, $\operatorname{rank}(TM) = \dim(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.9]. Ist $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann bildet $Tu : TU \to u(U) \times \mathbb{R}^n$ eine Vektorbündelkarte von TM. Die Schnitte des Tangentialbündels können in kanonischer Weise mit den Vektorfeldern auf M identifiziert werden, $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.10]. Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar wenn das Tangentialbündel $TM \to M$ orientierbar ist, und eine Orientierung von M ist nichts anderes als eine Orientierung des Vektorbündels $TM \to M$, vgl. [**3**, Abschnitt 4.5].

Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to M$ zwei Vektorbündel über M. Eine glatte Abbildung $\varphi : E \to F$ mit $q \circ \varphi = q$ wird *Vektorbündelhomomorphismus (über M)* genannt, falls sie faserweise linear ist, dh. für jedes $x \in M$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to F_x$ eine lineare Abbildung. Beachte, dass die Komposition von Vektorbündelhomomorphismen wieder ein Vektorbündelhomomorphismus ist. Zwei Vektorbündel E und F über M werden *isomorph* genannt, falls Vektorbündelhomomorphismen $\varphi : E \to F$ und $\psi : F \to E$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_F$ existieren. In diesem Fall werden φ und ψ als zueinander inverse *Vektorbündelisomorphismen* bezeichnet und wir schreiben $E \cong F$. Ein Vektorbündel wird *trivialisierbar* genannt, wenn es isomorph zu einem trivialen Vektorbündel ist.

Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to N$ zwei Vektorbündel und $f : M \to N$ glatt. Unter einem *Vektorbündelhomomorphismus über f* verstehen wir eine glatte

Abbildung $\varphi : E \to F$ mit $q \circ \varphi = f \circ p$, die faserweise linear ist, dh. für jedes $x \in M$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to F_{f(x)}$ eine lineare Abbildung.

II.1.3. Beispiel. Das Tangentialbündel des Kreises TS^1 ist trivialisierbar. Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S^1)$ ohne Nullstelle liefert einen Vektorbündelisomorphismus $\xi^1 \cong TS^1$, $(x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot X(x)$, wobei $\xi^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ das triviale Linienbündel über S^1 bezeichnet, siehe auch Proposition II.1.5.

II.1.4. Beispiel. Das Tangentialbündel einer Sphäre gerader Dimension TS^{2n}, $n \geq 1$, ist nicht trivialisierbar, denn es besitzt keinen nirgendwo verschwindenden Schnitt, siehe Korollar I.6.7.

II.1.5. Proposition. *Es sei $\varphi : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M, sodass $\varphi_x : E_x \to F_x$ für jedes $x \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Dann ist φ ein Vektorbündelisomorphismus und daher $E \cong F$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\varphi : E \to F$ eine glatte Bijektion. Es genügt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : F \to E$ glatt ist, sie ist dann ebenfalls faserweise linear und liefert daher einen zu φ inversen Vektorbündelhomomorphismus. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir o.B.d.A. $E = U \times V$, $F = U \times V$ und $p = p_1 = q$ annehmen, $U \subseteq M$ offen, V ein Vektorraum. Der Vektorbündelhomomorphismus φ ist dann von der Form

$$\varphi : U \times V \to U \times V, \qquad \varphi(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v),$$

für eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$. Für die Umkehrabbildung gilt offensichtlich

$$\varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad \varphi(x, v) = \big(x, \tilde{\varphi}(x)^{-1} \cdot v\big),$$

wobei $\tilde{\varphi}(x)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ die zu $\tilde{\varphi}(x) \in \mathrm{GL}(V)$ inverse lineare Abbildung bezeichnet. Aufgrund der Glattheit der Inversion $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, $A \mapsto A^{-1}$, ist also auch φ^{-1} glatt, vgl. Aufgabe 30. □

Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $U \subseteq M$ offen, dann bildet die *Einschränkung* $p : E|_U \to U$ ein Vektorbündel über U, wobei $E|_U := p^{-1}(U)$. Etwas allgemeiner ist für jede Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq M$ die Einschränkung $p : E|_S \to S$ ein Vektorbündel über S, $E|_S := p^{-1}(S)$. Ist E orientiert, dann erbt $E|_S$ in kanonischer Weise eine Orientierung.

Es sei $p : E \to N$ ein Vektorbündel und $f : M \to N$ glatt. Beachte, dass p und f transversal sind, denn die Projektion eines Vektorbündels ist stets submersiv. Nach Satz I.7.3 ist also

$$f^*E := \big\{(x, e) \in M \times E \mid f(x) = p(e)\big\} \subseteq M \times E$$

eine Teilmannigfaltigkeit. Es bezeichnen $q : f^*E \to M$ und $\tilde{f} : f^*E \to E$ die Einschräkungen der beiden kanonischen Projektionen von $M \times E$. Insbesondere sind q und $\tilde{f}$ also glatt. Jede Faser von q ist in kanonischer Weise mit einer Vektorraumstruktur versehen, denn $q^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)} = E_{f(x)}$, für jedes $x \in M$.

Ist $\varphi = (p, \varphi_2) : E|_U \to U \times V$ eine lokale Trivialisierung von E, dann bildet $(q, \varphi_2 \circ \tilde{f}) : (f^*E)|_{f^{-1}(U)} \to f^{-1}(U) \times V$ eine lokale Trivialisierung von f^*E, somit ist $q : f^*E \to M$ also ein Vektorbündel, $\operatorname{rank}_x(f^*E) = \operatorname{rank}_{f(x)}(E)$. Wir bezeichnen f^*E als das mittels f zurückgezogene Vektorbündel, oder auch als *Pullback Bündel.* Beachte auch, dass $\tilde{f} : f^*E \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über f ist, der jede Faser $(f^*E)_x$ linear isomorph auf die Faser $E_{f(x)}$ abbildet. Ist E orientiert, dann existiert auf f^*E genau eine Orientierung, sodass $\tilde{f}$ faserweise orientierungserhalten wird, wir bezeichnen diese als die *induzierte Orientierung* von f^*E. Für die Schnitte des Pullback Bündels erhalten wir eine kanonische Identifikation

$$\Gamma(f^*E) = \{\sigma \in C^\infty(M, E) \mid p \circ \sigma = f\}, \qquad s \mapsto \sigma := \tilde{f} \circ s.$$

Ist F ein weiteres Vektorbündel über M und $\psi : F \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über f, dann existiert ein eindeutiger Verktorbündelhomomorphismus $\tilde{\psi} : F \to f^*E$ über M mit $\tilde{f} \circ \tilde{\psi} = \psi$, nämlich $\tilde{\psi} = (q, \psi) : F \to f^*E \subseteq M \times E$. Dies wird als *universelle Eigenschaft* des Pullback Bündels bezeichnet. Ist darüber hinaus ψ faserweise ein linearer Isomorphismus, dann ist $\tilde{\psi} : F \to f^*E$ ein Vektorbündelisomorphismus, siehe Proposition II.1.5. Ist $g : P \to M$ eine weitere glatte Abbildung, so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $(f \circ g)^*E \cong g^*f^*E$ über P. Bezeichent $\iota : S \to N$ die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $E|_S \cong \iota^*E$, die Pullback Konstruktion kann daher als Verallgemeinerung der Einschränkung verstanden werden.

Es seien E und F zwei Vektorbündel über M. Wir werden nun ein Vektorbündel $E \oplus F \to M$ mit Fasern $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$, $x \in M$, konstruieren. Die dem Totalraum $E \oplus F$ zugrundeliegende Menge sei $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} E_x \oplus F_x$ und $p : E \oplus F \to M$ bezeichne die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U \times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ Vektorbündelkarten von E und F, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E \oplus F)|_U = \bigsqcup_{x \in U} E_x \oplus F_x \xrightarrow{\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x \oplus \psi_x} \bigsqcup_{x \in U} V \oplus W = U \times (V \oplus W).$$

Es gibt nun auf $E \oplus F$ genau eine glatte Struktur, sodass dieses ρ, für jedes Paar von Trivialisierungen φ und ψ wie oben, ein Diffeomorphismus ist.[4] Versehen wir

[4]Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $E \oplus F$ einzusehen betrachten wir weitere lokale Trivialisierungen $\bar{\varphi} : E|_U \to U \times V$ von E und $\bar{\psi} : F|_U \to U \times W$ von F. Die Vektorbündelkartenwechsel sind dann von der Form

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v)$$
$$\bar{\psi} \circ \psi^{-1} : U \times W \to U \times W, \qquad (\bar{\psi} \circ \psi^{-1})(x, w) = (x, \tilde{\psi}(x) \cdot w)$$

für eindeutig bestimmte glatte Abbildungen $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$ und $\tilde{\psi} : U \to \mathrm{GL}(W)$. Für die oben konstruierten $\rho = \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x \oplus \psi_x$ und $\bar{\rho} = \bigsqcup_{x \in U} \bar{\varphi}_x \oplus \bar{\psi}_x$ gilt offenbar,

$$\bar{\rho} \circ \rho^{-1} : U \times (V \oplus W) \to U \times (V \oplus W), \quad (\bar{\rho} \circ \rho^{-1})(x, (v, w)) = (x, (\tilde{\varphi}(x) \cdot v, \tilde{\psi}(x) \cdot w)),$$

$E \oplus F$ mit dieser glatten Struktur, so wird $p : E \oplus F \to M$ zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E \oplus F) = \operatorname{rank}(E) + \operatorname{rank}(F)$. Sind E und F orientiert, dann definieren wir die davon *induzierte Orientierung* von $E \oplus F$ indem wir die Fasern $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ mit der Produktorientierung versehen.

Wir haben kanonische faserweise injektive Vektorbündelhomomorphismen $\iota_E : E \to E \oplus F$ und $\iota_F : F \to E \oplus F$ sowie kanonische faserweise surjektive Vektorbüdelhomomorphismen $\pi_E : E \oplus F \to E$ und $\pi_F : E \oplus F \to F$. Diese genügen den Relationen

$$\pi_E \circ \iota_E = \mathrm{id}_E, \quad \pi_F \circ \iota_F = \mathrm{id}_F, \quad \pi_E \circ \iota_F = 0 = \pi_F \circ \iota_E.$$

Für die Schnitte von $E \oplus F$ erhalten wir daraus eine kanonische Identifikation

$$\Gamma(E \oplus F) = \Gamma(E) \times \Gamma(F), \qquad s \mapsto (\pi_E \circ s, \pi_F \circ s).$$

Ist G ein weiteres Vektorbündel und sind $\psi_E : G \to E$ sowie $\psi_F : G \to F$ zwei Vektorbündelhomomorphismen über M, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\psi : G \to E \oplus F$ mit $\psi_E = \pi_E \circ \psi$ und $\psi_F = \pi_F \circ \psi$, nämlich $\psi = \iota_E \circ \psi_E + \iota_F \circ \psi_F$. Die Whitney Summe hat daher die universelle Eigenschaft eines Produkts. Sie besitzt aber auch die universelle Eigenschaft der direkten Summe, sind $\rho_E : E \to G$ und $\rho_F : F \to G$ zwei Vektorbündelhomomorphismen, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \oplus F \to G$ mit $\rho \circ \iota_E = \rho_E$ und $\rho \circ \iota_F = \rho_F$, nämlich $\rho = \rho_E \circ \pi_E + \rho_F \circ \pi_F$.

Beachte, dass kanonische Vektorbündelisomorphismen $E \oplus (F \oplus G) = (E \oplus F) \oplus G$, $E \oplus \xi^0 = E$, $f^*(E \oplus F) = f^*E \oplus f^*F$ und $E \oplus F \cong F \oplus E$ existieren, wobei der letzte i.A. nicht orientierungsbewahrend ist.

II.1.6. Beispiel. Für das Tangentialbündel der Sphäre existiert ein Isomorphismus $TS^n \oplus \xi^1 \cong T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = \xi^{n+1}$, also ist $TS^n \oplus \xi^1$ trivialisierbar, wobei $\xi^k = S^n \times \mathbb{R}^k$ das triviale Vektorbündel über S^n bezeichnet. Beachte dazu, dass die Tangentialabbildung der Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\iota_1 : TS^n \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$ liefert. Ist weiters $\nu : S^n \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$ ein Einheitsnormalenfeld für S^n, so erhalten wir einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\iota_2 : \xi^1 \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$, $(x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot \nu(x)$. Zusammen induzieren ι_1 und ι_2 einen Vektorbündelhomomorphismus $TS^n \oplus \xi^1 \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$. Nach Konstruktion ist dieser faserweise bijektiv und daher ein Isomorphismus, siehe Proposition II.1.5.

II.1.7. Bemerkung. Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to M$ zwei Vektorbündel. Dann ist offensichtlich $p \times q : E \times F \to M \times M$ ein Vektorbündel über $M \times M$ mit Fasern $(E \times F)_{(x,y)} = E_x \times F_y$. Bezeichnet $\delta : M \to M \times M$, $\delta(x) := (x, x)$, die Diagonalabbildung so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $E \oplus F = \delta^*(E \times F)$, siehe Aufgabe 32. Dies kann als alternative Definition der Whitney Summe verwendet werden. Andererseits lässt sich auch $E \times F$ mit Hilfe

also sind die Vektorbündelkartenwechsel $\bar{\rho} \circ \rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $E \oplus F$.

der Whitney Summe darstellen, $E \times F \cong p_1^* E \oplus p_2^* F$, wobei $p_i : M \times M \to M$ die beiden Projektionen bezeichnen, $i = 1, 2$.

Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel. Eine Teilmenge $F \subseteq E$ wird *Teilbündel* von E genannt, falls zu jedem $x \in M$ eine lokale Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times V$ von E existiert, sodass $x \in U$ und $\varphi(F \cap E|_U) = U \times W$ für einen linearen Teilraum $W \subseteq V$. Zusammen mit der Einschränkung $p : F \to M$ wird F dann offensichtlich selbst zu einem Vektorbündel. Zudem ist die kanonisches Inklusion $F \to E$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphismus.

Wir nennen zwei Teilbündel $F, G \subseteq E$ komplementär, falls F_x und G_x für jedes $x \in M$, komplemantäre Teilräume von E_x sind, dh. $F_x \cap G_x = 0$ und $F_x + G_x = E_x$. In diesem Fall induzieren die kanonischen Inklusionen $F \to E$ und $G \to E$ einen Isomorphismus $F \oplus G \cong E$, siehe Proposition II.1.5. Die kanonischen Inklusionen $\iota_E : E \to E \oplus G$ und $\iota_G : G \to E \oplus G$ erlauben es umgekehrt E und G als komplementäre Teilbündel von $E \oplus G$ aufzufassen.

II.1.8. Lemma. *Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $\iota : F \to E$ die kanonische Inklusion eines Teilbündels. Dann existieren (faserweise surjektive) Vektorbündelhomomorphismen $\pi : E \to F$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_F$.*

Beweis. Es seien $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ Vektorbündelkarten mit $\varphi_i(F \cap E|_{U_i}) = U_i \times W_i$ und $\bigcup_i U_i = M$, wobei $W_i \subseteq V_i$ Teilräume sind. Für jedes i wählen wir eine lineare Projektion $\tilde{\pi}_i : V_i \to W_i$ mit $\tilde{\pi}_i|_{W_i} = \mathrm{id}_{W_i}$. Mit Hilfe der Karten $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ und deren Einschränkungen $\varphi_i : F|_{U_i} \to U_i \times W_i$ erhalten wir Vektorbündelhomomorphismen $\pi_i : E|_{U_i} \to F|_{U_i}$ mit $\pi_i \circ \iota|_{F_{U_i}} = \mathrm{id}_{F_{U_i}}$, für jedes i. Sei nun λ_i eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Beachte, dass sich die Vektorbündelhomomorphismen $\lambda_i \pi_i : E|_{U_i} \to F|_{U_i}$ durch Null zu global definierten glatten Vektorbündelhomomorphismen $E \to F$ ausdehnen lassen. Es ist daher $\pi := \sum_i \lambda_i \pi_i : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus für den $\pi \circ \iota = \sum_i \lambda_i \pi_i \circ \iota = \sum_i \lambda_i \,\mathrm{id}_F = \mathrm{id}_F$ gilt. □

Es sei E ein Vektorbündel über M und $F \subseteq E$ ein Teilbündel. Wir konstruieren nun ein *Quotientenbündel* E/F über M mit Fasern $(E/F)_x = E_x/F_x$. Genauer, die dem Totalraum von E/F zugrunde liegende Menge sei $\bigsqcup_{x \in M} E_x/F_x$, und $p : E/F \to M$ bezeichne die offensichtliche Projektion. Ist $\varphi : E|_U \to U \times V$ eine Trivialisierung von E mit $\varphi(F \cap E|_U) = U \times W$, $W \subseteq V$ ein Teilraum, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E/F)|_U = \bigsqcup_{x \in U} E_x/F_x \xrightarrow{\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x} \bigsqcup_{x \in U} V/W = U \times V/W.$$

Es gibt nun auf E/F genau eine glatte Struktur, sodass ρ, für jede Trivialisierung φ, ein Diffeomorphismus ist.[5] Versehen wir E/F mit dieser glatten Struktur,

[5]Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E/F einzusehen betrachten wir eine weitere lokale Trivialisierung $\bar{\varphi} : E_U \to U \times V$ von E mit $\bar{\varphi}(F \cap E|_U) = U \times W$. Dann

dann wird $\tilde{p} : E/F \to M$ also zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E/F) = \operatorname{rank}(E) - \operatorname{rank}(F)$. Zudem ist die kanonische Projektion $\pi : E \to E/F$ ein faserweise surjektiver Vektorbündelhomomorphismus, und wir erhalten eine (faserweise) kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \to F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} E/F \to 0.$$

Sind E und F orientiert, dann definieren wir die davon *induzierte Orientierung* auf E/F wie folgt. Eine Basis $b_1, b_2, \dots$ von $(E/F)_x = E_x/F_x$ ist positiv orientiert, falls für eine (und dann jede) positiv orientierte Basis $f_1, f_2, \dots$ von F_x und eine (und dann jede) Wahl von $e_1, e_2, \dots \in E_x$ mit $\pi e_i = b_i$ die Basis $f_1, f_2, \dots, e_1, e_2, \dots$ von E_x positiv orientiert ist, vgl. Aufgabe 35.

Das Quotientenbündel hat folgende universelle Eigenschaft. Ist G ein weiters Vektorbündel über M und $\psi : E \to G$ ein Vektorbündelhomomorphismus mit $\psi \circ \iota = 0$, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\bar{\psi} : E/F \to G$, sodass $\bar{\psi} \circ \pi = \psi$. Beachte auch, dass $\bar{\psi}$ faserweise injektiv ist.

Nach Lemma II.1.8 existiert ein Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \to F$ mit $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_F$. Da $(\mathrm{id}_E - \iota \circ \rho) \circ \iota = \iota - \iota = 0$, faktorisiert $\mathrm{id}_E - \iota \circ \rho : E \to E$ zu einem Vektorbündelhomomorphimus $\sigma : E/F \to E$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{E/F}$. Die Homomorphismen ι und σ induzieren einen Isomorphismus $F \oplus E/F \cong E$, dessen Inverser von ρ und π induziert wird. Beachte jedoch, dass dieser Isomorphismus nicht kanonisch ist, er hängt von der Wahl von σ bzw. ρ ab. Unsere Orientierungskonventionen sind so, dass der eben konstruierte Isomorphismus $F \oplus E/F \cong E$ für jede Wahl von ρ bzw. σ orientierungserhaltend ist. Wir halten fest:

II.1.9. Proposition. *Jedes Teilbündle $F \subseteq E$ besitzt komplementäre Teilbündel $G \subseteq E$, dh. $F \oplus G = E$, und für jedes solche G gilt $G \cong E/F$.*

II.1.10. Proposition. *Es sei $\varphi : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M mit lokal konstantem Rang, dh. $\operatorname{rank}(\varphi_x : E_x \to F_x)$ ist lokal konstant für $x \in M$. Dann ist $\operatorname{img}(\varphi) := \bigcup_{x \in M} \operatorname{img}(\varphi_x)$ ein Teilbündel von F und $\ker(\varphi) := \bigcup_{x \in M} \ker(\varphi_x)$ ist ein Teilbündel von E. Zudem induziert φ einen Vektorbündelisomorphismus $E/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$.*

Beweis. Da Teilbündel zu sein eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir o.B.d.A. $E = U \times V$ und $F = U \times W$ annehmen, $U \subseteq M$ offen, V und W Vektorräume.

---

ist der Vektorbündelkartenwechsel von der Form

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v)$$

für eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$. Da auch $\tilde{\varphi}(x)(W) = W$, für alle $x \in U$, induziert $\tilde{\varphi}$ eine glatte Abbildungen $\tilde{\rho} : U \to \mathrm{GL}(V/W)$, vgl. Aufgabe 33. Für die oben konstruierten $\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x$ und $\bar{\rho} := \bigsqcup_{x \in U} \bar{\varphi}_x$ gilt offenbar

$$\bar{\rho} \circ \rho^{-1} : U \times V/W \to U \times V/W, \quad (\bar{\rho} \circ \rho^{-1})(x, \bar{v}) = (x, \tilde{\rho}(x) \cdot \bar{v}),$$

also sind die Vektorbündelkartenwechsel $\bar{\rho} \circ \rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E/F.

Nach Voraussetzung können wir durch Verkleinern von U auch erreichen, dass der Rang von $\varphi_x : V \to W$ konstant ist, $x \in U$.

Sei nun $x_0 \in U$, und betrachte die Teilräume $V_0 := \ker(\varphi_{x_0}) \subseteq V$ sowie $W_0 := \operatorname{img}(\varphi_{x_0}) \subseteq W$. Wähle komplementäre Teilräume $V_0' \subseteq V$, dh. $V_0 \oplus V_0' = V$, und $W_0' \subseteq W$, dh. $W_0 \oplus W_0' = W$. Da $\varphi_{x_0} : V_0' \to W_0$ ein Isomorphismus ist, existiert eine lineare Abbildung $\sigma : W \to V$, mit $\sigma \circ \varphi_{x_0}|_{V_0'} = \mathrm{id}_{V_0'}$, $\varphi_{x_0} \circ \sigma|_{W_0} = \mathrm{id}_{W_0}$ und $\ker(\sigma) = W_0'$. Weiters bezeichne $\pi : V \to V_0$ die Projektion auf V_0 längs V_0', dh. $\pi|_{V_0} = \mathrm{id}_{V_0}$, $\ker(\pi) = V_0'$, und $\pi' : W \to W_0'$ die Projektion auf W_0' längs W_0, dh. $\pi'|_{W_0'} = \mathrm{id}_{W_0'}$ und $\ker(\pi') = W_0$. Nach Konstruktion gilt daher $\sigma \circ \varphi_{x_0} + \pi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi_{x_0} \circ \sigma + \pi' = \mathrm{id}_W$.

Betrachte nun die beiden Vektorbündelhomomorphismen

$$\psi : U \times V \to U \times V, \qquad \psi(x, v) := (x, (\sigma \circ \varphi_x + \pi) \cdot v),$$
$$\rho : U \times W \to U \times W, \qquad \rho(x, w) := (x, (\varphi_x \circ \sigma + \pi') \cdot w).$$

Beachte $\psi_{x_0} = \mathrm{id}_V$ und $\rho_{x_0} = \mathrm{id}_W$. Da $\mathrm{GL}(V)$ eine offene Teilmenge von $L(V, V)$ bildet, können wir durch Verkleinern von U erreichen, dass ψ ein Isomorphismus ist. Nach Konstruktion gilt $\psi(\ker(\varphi)) \subseteq U \times V_0$, und aus Dimensionsgründen daher $\psi(\ker(\varphi)) = U \times V_0$. Dies zeigt, dass $\ker(\varphi)$ ein Teilbündel von E bildet. Analog können wir durch Verkleinern von U auch erreichen, dass ρ ein Isomorphismus wird. Nach Konstruktion gilt $\rho(U \times W_0) \subseteq \operatorname{img}(\varphi)$ und aus Dimensionsgründen daher $\rho(U \times W_0) = \operatorname{img}(\varphi)$. Damit ist auch $\operatorname{img}(\varphi)$ als Teilbündel von F nachgewiesen, denn $\rho^{-1}(\operatorname{img}(\varphi)) = U \times W_0$.

Der Vektorbündelhomomorphismus $\varphi : E \to \operatorname{img}(\varphi)$ faktorisiert zu einem Vektorbündelhomomorphismus $\bar\varphi : E/\ker(\varphi) \to \operatorname{img}(\varphi)$. Nach Konstruktion ist $\bar\varphi$ faserweise ein linearer Isomorphismus, aus Proposition II.1.5 folgt daher, dass $\bar\varphi$ ein Vektorbündelisomorphismus ist. □

II.1.11. Beispiel (Normalenbündel einer Teilmannigfaltigkeit)**.** Bezeichnet $\iota : S \to M$ die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, dann ist $T\iota : TS \to TM$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphismus, und wir können TS als Teilbündel von $TM|_S = \iota^*TM$ auffassen. Das Quotientenbündel $T^\perp S := TM|_S/TS$ wird als *Normalenbündel* von S in M bezeichent. Sind M und S orientiert, dann erhalten wir eine *induzierte Orientierung* auf dem Normalenbündel $T^\perp S$.

II.1.12. Beispiel (Vertikales Bündel)**.** Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel, dann bildet die Tangentialabbildung $Tp : TE \to TM$ einen Vektorbündelhomomorphismus über $p : E \to M$, und induziert daher einen faserweise surjektiven Vektorbündelhomomorphismus $TE \to p^*TM$. Sein Kern $VE := \{X \in TE : Tp \cdot X = 0\}$ ist ein Teilbündel von $TE \to E$, das als *vertikales Bündel* von E bezeichnet wird. Wir erhalten somit eine kanonische kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln über E,

$$0 \to VE \to TE \xrightarrow{Tp} p^*TM \to 0.$$

Insbesondere erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $TE/VE = p^*TM$. Nach Proposition II.1.9 gilt weiters $TE \cong VE \oplus p^*TM$. Zudem existiert ein kanonischer Vektorbündelisomorphismus über E,

$$p^*E = VE, \qquad (v,w) \mapsto \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(v+tw),$$

wobei $p^*E = \{(v,w) \in E \times E \mid p(v) = p(w)\}$. Durch Zurückziehen mittels des Nullschnitts $o : M \to E$ erhalten wir eine kanonische kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln $0 \to E \to o^*TE \to TM \to 0$ über M, denn $o^*VE = o^*p^*E = (p \circ o)^*E = \mathrm{id}_M^* E = E$ und $o^*p^*TM = (p \circ o)^*TM = \mathrm{id}_M^* TM = TM$. Der Nullschnitt erlaubt es aber auch TM als Teilbündel von o^*TE aufzufassen, $To : TM \to o^*TE$, also bilden TM und E komplementäre Teilbündel von o^*TE, und wir erhalten somit einen kanonischen Isomorphismus $o^*TE = TM \oplus E$ über M. Ist E ein orientiertes Vektorbündel und M orientiert, dann ist dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend. Identifizieren wir das Bild des Nullschnitts $o(M) \subseteq E$ mit M, und fassen also M als Teilmannigfaltigkeit von E auf, so folgt $TE|_M = TM \oplus E$. Für das Normalenbündel von M in E erhalten wir daraus einen kanonischen Isomorphismus $T^\perp M = E$. Ist E ein orientiertes Vektorbündel und M orientiert, dann ist dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend.

II.1.13. Proposition. *Es sei $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit und $f : M \to N$ transversal zu S. Dann induziert die Tangentialabbildung $Tf : TM \to TN$ einen Vektorbündelisomorphismus $T^\perp(f^{-1}(S)) \cong f^*(T^\perp S)$. Sind M, N und S orientiert, dann existiert genau eine Orientierung auf $f^{-1}(S)$, sodass dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend wird.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\Sigma := f^{-1}(S)$ eine Teilmannigfaltigkeit von M bildet, siehe Satz I.7.3. Die Einschränkung der Tangentialabbildung von f liefert einen Vektorbündelhomomorphismus $Tf : TM|_\Sigma \to TN|_S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$, der $T\Sigma$ nach TS abbildet und daher zu einen Vektorbündelhomomorphismus $T^\perp\Sigma = TM|_\Sigma/T\Sigma \to TN|_S/TS = T^\perp S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$ faktorisiert. Da f und S transversal sind, ist dieser Homomorphismus faserweise bijektiv und induziert daher einen Isomorphismus $T^\perp\Sigma \cong f^*T^\perp S$. Sind N und S orientiert, dann erhalten wir eine induzierte Orientierung des Normalenbündels $T^\perp S$ und diese induziert eine Orientierung des Vektorbündels $T^\perp\Sigma \cong f^*T^\perp S$. Es gibt daher genau eine Orientierung des Vektorbündels $T\Sigma$, die zusammen mit der Orientierung auf M, diese Orientierung auf $T^\perp\Sigma = TM|_\Sigma/T\Sigma$ induziert, vgl. Aufgabe 36. $\square$

II.1.14. Bemerkung. Die induzierte Orientierung von $\Sigma := f^{-1}(S)$ in Proposition II.1.13 kann wie folgt beschrieben werden. Eine Basis $X_1, \dots, X_{m-n+k}$ von $T_x\Sigma$, $x \in M$, ist genau dann positiv orientiert wenn folgendes gilt. Ist $Y_1, \dots, Y_k$ eine positiv orientierte Basis von $T_{f(x)}S$ und $Z_1, \dots, Z_{n-k} \in T_xM$, sodass die Vektoren $Y_1, \dots, Y_k, T_xf \cdot Z_1, \dots, T_xf \cdot Z_{n-k}$ eine postiv orientierte Basis von $T_{f(x)}N$ bilden, dann ist $X_1, \dots, X_{m-n+k}, Z_1, \dots, Z_{n-k}$ eine positiv orientierte Basis von T_xM.

II.1.15. Bemerkung. Es bezeichnen $\iota_1 : S_1 \to M$ und $\iota_2 : S_2 \to M$ die Inklusionen zweier transversaler orientierter Teilmannigfaltigkeiten einer orientierten Mannigfaltigkeit M. Aus Proposition II.1.13 erhalten wir eine induzierte Orientierung der Teilmannigfaltigkeit $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1) \subseteq S_2$, wir bezeichnen diese als die *induzierte Orientierung des Durchschnitts* $S_1 \cap S_2$. Eine Basis $X_1, \dots$ von $T_x(S_1 \cap S_2)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn folgendes gilt: ergänzen wir X_i zu einer positiv orientierten Basis $X_1, \dots, Y_1, \dots$ von $T_x S_1$ und und zu einer positiv orientierten Basis $X_1 \dots, Z_1, \dots$ von $T_x S_2$ dann bildet $X_1, \dots, Y_1, \dots, Z_1, \dots$ eine positiv orientierte Basis von $T_x M$.

Mit Hilfe der Geometrie von Geodäten werden wir im nächsten Kapitel folgendes Resultat beweisen, das die Bedeutung des Normalenbündels verdeutlicht.

II.1.16. Satz (Tubuläre Umgebung)**.** *Es sei $S \subseteq M$ eine abgeschlossenen Teilmannigfaltigkeit mit Normalenbündel $T^\perp S := TM|_S/TS$. Dann existiert eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : T^\perp S \cong U$, sodass $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}_{T^\perp S} : T^\perp S \to T^\perp S$, wobei wir S mit dem Bild des Nullschnitts in $T^\perp S$ identifizieren, vgl. Beispiel II.1.12. Jedes solche φ wird als* tubuläre Umgebung *von S in M bezeichnet. Zudem kann U beliebig klein gewählt werden, dh. ist V eine offene Umgebung von S in M, dann können φ und U so gewählt werden, dass $U \subseteq V$.*

II.1.17. Bemerkung. Sind in der Situation von Satz II.1.16 die Mannigfaltigkeiten M und S orientiert, dann ist jede tubuläre Umgebung $\varphi : T^\perp S \cong U \subseteq M$ orientierungsbewahrend. Aus $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}_{T^\perp S} : T^\perp S \to T^\perp S$ folgt nämlich, dass der Vektorbündelisomorphismus

$$TS \oplus T^\perp S = T(T^\perp S)|_S \to TM|_S \cong TS \oplus T^\perp S, \qquad T\varphi|_S = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{TS} & * \\ 0 & \mathrm{id}_{T^\perp S} \end{pmatrix}$$

orientierungsbewahrend ist. Da jeder Punkt $v \in T^\perp S$ durch eine glatte Kurve mit einem Punkt in S verbunden werden kann, muss aus Stetigkeitsgründen $T_v\varphi : T_v(T^\perp S) \to T_{\varphi(v)}M$ bei jedem $v \in T^\perp S$ orientierungsbewahrend sein.

II.1.18. Lemma. *Der Rang eines Vektorbündelhomomorphismus $\varphi : E \to F$ über M kann lokal nicht fallen, dh. jeder Punkt $x_0 \in M$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\operatorname{rank}(\varphi_x : E_x \to F_x) \geq \operatorname{rank}(\varphi_{x_0} : E_{x_0} \to F_{x_0})$ für alle $x \in U$.*

Beweis. Die Kartendarstellungen von φ sind von der Form $U \times \mathbb{R}^k \to U \times \mathbb{R}^l$, $(x, v) \mapsto (x, \tilde\varphi(x) \cdot v)$ mit $\tilde\varphi : U \to M_{k,l}(\mathbb{R})$ glatt. Es gibt daher einen $(r \times r)$-Minor $\mu : M_{k,l}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\mu(\tilde\varphi(x_0)) \neq 0$, wobei $r := \operatorname{rank}(\varphi_{x_0})$. Wegen der Stetigkeit von μ folgt $\mu(\tilde\varphi(x)) \neq 0$ und somit $\operatorname{rank}(\varphi_x) \geq r$, für x nahe x_0. $\square$

II.1.19. Proposition. *Es sei $\pi : E \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M mit $\pi \circ \pi = \pi$. Dann sind $\operatorname{img}(\pi)$ und $\ker(\pi)$ komplementäre Teilbündel von E und daher $\operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi) = E$.*

Beweis. Beachte, dass für den Vektorbündelhomomorphismus $\rho := \mathrm{id}_E - \pi : E \to E$ die Relationen $\rho \circ \rho = \rho$, $\pi + \rho = \mathrm{id}_E$ und $\pi \circ \rho = 0 = \rho \circ \pi$ gelten, dh. π und ρ sind faserweise komplementäre Projektionen. Nach Lemma II.1.18 können die Ränge von π und ρ lokal nicht fallen. Da aber $\mathrm{rank}(\pi) + \mathrm{rank}(\rho) = \mathrm{rank}(E)$ lokal konstant ist, muss daher der Rang von π (und auch der von ρ) lokal konstant sein. Aus Proposition II.1.10 folgt nun, dass $\mathrm{img}(\pi)$ und $\ker(\pi)$ beides Teilbündel von E sind. $\square$

II.1.20. Proposition. *Zu jedem Vektorbündel E existiert ein Vektorbündel F, sodass $E \oplus F$ trivialisierbar ist.*

Beweis. Sei also $p : E \to M$ ein Vektorbündel. O.b.d.A. dürfen wir M zusammenhängend voraussetzen, $k = \mathrm{rank}(E)$. Wir geben den Beweis nur für kompakte Basen M. In diesem Fall existieren endlich viele Vektorbündel Karten $(p, \varphi_i) : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, N$, mit $\bigcup_i U_i = M$. Wähle eine der Überdeckung $\{U_i\}_{1 \le i \le N}$ untergeordnete Partition der Eins, $\varphi_i \in C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \varphi_i = 1$. Wir dehnen die glatten Abbildungen $(\lambda_i \circ p)\varphi_i : E|_{U_i} \to \mathbb{R}^k$ durch Null zu global definierten glatten Abbildung $\tilde{\varphi}_i : E \to \mathbb{R}^k$ aus, $1 \le i \le N$. Da $\tilde{\varphi}_i$ faserweise linear ist, erhalten wir einen Vektorbündelhomomorphismus

$$\psi : E \to \xi^{kN} = M \times \mathbb{R}^{kN} = M \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k, \qquad \psi := (p, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N).$$

Nach Konstruktion ist ψ faserweise injektiv, denn zu $x \in M$ existiert i mit $\lambda_i(x) \neq 0$ und daher ist $\tilde{\varphi}_i : E_x \to \mathbb{R}^k$ injektiv. Nach Proposition II.1.10 ist $\mathrm{img}(\psi)$ daher ein Teilbündel von ξ^{kN} und ψ induziert einen Isomorphismus $E \cong \mathrm{img}(\psi)$. Nach Proposition II.1.9 existiert ein zu $\mathrm{img}(\psi)$ komplementäres Teilbündel $F \subseteq \xi^{kN}$, $\mathrm{img}(\psi) \oplus F = \xi^{kN}$, und wir erhalten $E \oplus F \cong \xi^{kN}$. $\square$

II.1.21. Bemerkung. Für jedes Vektorbündel E ist der $C^\infty(M)$-Modul $\Gamma(E)$ *projektiv.* Aus Proposition II.1.20 folgt nämlich, dass $\Gamma(E)$ ein direkter Summand des freien $C^\infty(M)$-Modules $\Gamma(\xi^N) = C^\infty(M)^N$ ist. Umgekehrt tritt jeder endlich erzeugte projektive $C^\infty(M)$-Modul so auf. Diese Tatsache ist als Serre–Swan Theorem bekannt.

II.1.22. Beispiel (Tautologisches Linienbündel über $\mathbb{RP}^n$)**.** Wir erinnern uns an den reellen projektive Raum,

$$\mathbb{RP}^n := \{\text{1-dimensionale Teilräume von } \mathbb{R}^{n+1}\},$$

und betrachten das triviale Vektorbüdel $\xi^{n+1} = \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ über $\mathbb{RP}^n$. Für $l \in \mathbb{RP}^n$ bezeichne $\pi_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die orthogonale Projektion auf den eindimensionalen Teilraum $l \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dies definiert einen Vektorbündelhomomorphismus $\pi : \xi^{n+1} \to \xi^{n+1}$, $\pi(l, v) = (l, \pi_l(v))$, mit $\pi \circ \pi = \pi$. Nach Proposition II.1.19 sind daher

$$\gamma := \mathrm{img}(\pi) = \big\{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \bigm| v \in l\big\}$$
$$\gamma^\perp := \ker(\pi) = \big\{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \bigm| v \perp l\big\}$$

komplementäre Teilbündel, $\gamma \oplus \gamma^\perp = \xi^{n+1}$. Das Linienbündel $\gamma \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ wird als das *tautologische Linienbündel über* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ bezeichnet. Beachte, dass die Einschränkung $\gamma|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}}$ in natürlichwer Weise zu dem tautologischen Linienbündel über $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ isomorph ist. Für $n \geq 1$ ist γ nicht trivialisierbar und nicht orientierbar, siehe Aufgabe 37. Der Totalraum des tautologischen Linienbündels $\gamma \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$ ist zum Möbiusband diffeomorph.

II.1.23. Proposition. *Ist $p : L \to M$ ein Linienbündel, dann existiert eine Zahl N und eine glatte Abbildung $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, sodass $L \cong f^*\gamma$.*

Beweis. Nach Proposition II.1.20 dürfen wir $L \subseteq \xi^{N+1} = M \times \mathbb{R}^{N+1}$ annehmen. Für jedes $x \in M$ bildet daher die Faser $L_x \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ einen eindimensionalen Teilraum. Wir erhalten somit eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $f(x) := L_x$. Ein Blick auf die Kartendarstellung zeigt, dass f glatt ist. Offensichtlich ist $\tilde\psi := (f \circ p, p_2) : L \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N \times \mathbb{R}^{N+1}$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphimus über $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$. Nach Konstruktion hat $\tilde\psi$ Werte im tautologischen Bündel $\gamma \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^N \times \mathbb{R}^{N+1}$ und liefert daher einen Vektorbündelhomomorphismus $\tilde\psi : L \to \gamma$ über $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, der faserweise bijektiv ist. Folglich induziert $\tilde\psi$ einen Vektorbündelisomorphismus $\psi : L \to f^*\gamma$ über M. $\square$

II.1.24. Bemerkung. Aufgrund des vorangehenden Resultats wird γ auch als *universelles Linienbündel* bezeichnet. Hat M Dimension n, dann genügt es in Proposition II.1.23 $N \geq n$ vorauszusetzen, siehe etwa [**4**, Theorem 3.4 in Chapter 4]. Unter der Gassmannmannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ verstehen wir die Menge aller k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$. Diese Menge kann in natürlicher Weise zu einer glatten $k(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden. Wie oben lässt sich zeigen, dass

$$\gamma^k := \big\{(V, v) \in \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \bigm| v \in V\big\} \subseteq \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$$

ein Teilbündel vom Rang k bildet, das sogenannte *tautologische Vektorbündel* über $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$. Beachte $\mathrm{Gr}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ und $\gamma^1 = \gamma$. Wie oben lässt sich zeigen, dass zu jedem Vektorbündel $E \to M$ vom Rang k eine Zahl N und eine glatte Abbildung $f : M \to \mathrm{Gr}_{k,N}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $E \cong f^*\gamma^k$. Aus diesem Grund wird γ^k auch als das *universelle Vektorbündel* von Rang k bezeichnet, siehe Aufgabe 39. In diesem Fall genügt es $N \geq n + k$ vorauszusetzen, siehe etwa [**4**, Theorem 3.4 in Chapter 4].

Es seien E und F zwei Vektorbündel über M. Wir definieren nun ein Vektorbündel $\hom(E, F)$ über M mit Fasern $\hom(E, F)_x = L(E_x, F_x)$, $x \in M$, wobei $L(V, W)$ den Vektorraum der lineren Abbildungen von V nach W bezeichnet. Genauer, die dem Totalraum $\hom(E, F)$ zugrundeliegende Menge ist $\hom(E, F) := \bigsqcup_{x\in M} L(E_x, F_x)$ und $p : \hom(E, F) \to M$ bezeichnet die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U \times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ zwei

Vektorbündelkarten von E und F, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$\hom(E,F)|_U = \bigsqcup_{x\in U} L(E_x,F_x) \xrightarrow{\rho:=\bigsqcup_{x\in U}(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_*} \bigsqcup_{x\in U} L(V,W) = U\times L(V,W),$$

wobei $(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_* : L(E_x,F_x)\to L(V,W)$, $\lambda\mapsto\psi_x\circ\lambda\circ\varphi_x^{-1}$. Es gibt nun auf $\hom(E,F)$ genau eine glatte Struktur, sodass diese ρ, für jedes Paar von Vektorbündelkarten φ und ψ wie oben, ein Diffeomorphismus wird.[6] Versehen wir $\hom(E,F)$ mit dieser glatten Struktur, so wird $p:\hom(E,F)\to M$ zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(\hom(E,F)) = \operatorname{rank}(E)\cdot\operatorname{rank}(F)$. Die Schnitte $\Gamma(\hom(E,F))$ können in natürlicher Weise mit Vektorbündelhomomorphismen $E\to F$ über M identifiziert werden. Beachte, dass kanonische Isomorphismen $f^*\hom(E,F) = \hom(f^*E,f^*F)$, $\hom(E,F\oplus G) = \hom(E,F)\oplus\hom(E,G)$ und $\hom(E\oplus F,G) = \hom(E,G)\oplus\hom(F,G)$ existeren. Im Fall $E=F$ schreiben wir $\operatorname{end}(E) := \hom(E,E)$.

Unter dem *dualen Bündel* verstehen wir das Vektorbündel $E' := \hom(E,\xi^1)$, wobei $\xi^1 = M\times\mathbb{R}$ das triviale Linienbündel bezeichnet. Die Fasern des dualen Bündels E' sind daher die Dualräume der Fasern von E, dh. $E'_x = (E_x)'$. Es gibt kanonische Isomorphismen $(E\oplus F)' = E'\oplus F'$, $f^*(E') = (f^*E)'$ und $E = E''$.

II.1.25. Beispiel. Für das Tangentialbündel des projektiven Raums haben wir $T\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \hom(\gamma,\gamma^\perp)$, siehe Beispiel II.1.22 und Aufgabe 38.

II.1.26. Proposition. *Die kanonische Abbildung*

$$\Gamma(\hom(E,F)) \to L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(F)), \qquad \varphi\mapsto(s\mapsto\varphi\circ s),$$

ist ein $C^\infty(M)$-linearer Isomorphismus. Dabei bezeichnet $L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(F))$ den $C^\infty(M)$-Modul der $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\phi:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$, dh. $\phi(fs) = f\phi(s)$ für alle $f\in C^\infty(M)$ und $s\in\Gamma(E)$.

Beweis. Die Abbildung oben ist offensichtlich wohldefiniert und $C^\infty(M)$-linear, denn $\varphi(fs) = f(\varphi(s)) = (f\varphi)(s)$, $\varphi\in\Gamma(\hom(E,F))$, $s\in\Gamma(E)$, $f\in C^\infty(M)$. Auch die Injektivität ist leicht einzusehen. Sei dazu $\varphi\in\Gamma(\hom(E,F))$

[6] Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $\hom(E,F)$ einzusehen betrachten wir weitere lokale Trivialisierungen $\bar\varphi : E|_U\to U\times V$ von E und $\bar\psi : F|_U \to U\times W$ von F. Die Vektorbündelkartenwechsel sind dann von der Form

$$\bar\varphi\circ\varphi^{-1} : U\times V\to U\times V, \qquad (\bar\varphi\circ\varphi^{-1})(x,v) = (x,\tilde\varphi(x)\cdot v)$$
$$\bar\psi\circ\psi^{-1} : U\times W\to U\times W, \qquad (\bar\psi\circ\psi^{-1})(x,w) = (x,\tilde\psi(x)\cdot w)$$

für eindeutig bestimmte glatte Abbildungen $\tilde\varphi : U\to\mathrm{GL}(V)$ und $\tilde\psi : U\to\mathrm{GL}(W)$. Für die oben konstruierten $\rho = \bigsqcup_{x\in U}(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_*$ und $\bar\rho = \bigsqcup_{x\in U}(\bar\varphi_x^{-1})^*(\bar\psi_x)_*$ gilt offenbar,

$$\bar\rho\circ\rho^{-1} : U\times L(V,W)\to U\times L(V,W), \quad (\bar\rho\circ\rho^{-1})(x,\lambda) = (x,\tilde\psi(x)\cdot\lambda\cdot\tilde\varphi(x)^{-1}).$$

Da die Abbildung $\mathrm{GL}(W)\times L(V,W)\times\mathrm{GL}(W)\to L(V,W)$, $(A,\lambda,B)\mapsto A\cdot\lambda\cdot B^{-1}$ glatt ist, sind also die Vektorbündelkartenwechsel $\bar\rho\circ\rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $\hom(E,F)$.

und $x \in M$ mit $0 \neq \varphi_x \in L(E_x, F_x)$. Es existiert daher $v \in E_x$ mit $\varphi_x(v) \neq 0$. Mit Hilfe einer Vektorbündelkarte lässt sich leicht ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $s(x) = v$ konstruieren, und für diesen gilt dann $(\varphi \circ s)(x) = \varphi_x(s(x)) = \varphi_x(v) \neq 0$, also $\varphi \circ s \neq 0$.

Um auch die Surjektivität einzusehen, sei nun $\phi \in L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F))$. Wir zeigen zunächst, dass ϕ ein lokaler Operator ist, dh. für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jeden Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $\operatorname{supp}(s) \subseteq U$ gilt auch $\operatorname{supp}(\phi(s)) \subseteq U$. Für jedes $x \in U$ existiert nämlich $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$ und $\lambda(x) = 1$. Insbesodere folgt $\lambda s = 0 \in \Gamma(E)$, und mittels der $C^\infty(M)$-Linearität von ϕ daher $0 = \phi(\lambda s)(x) = (\lambda\phi(s))(x) = \lambda(x)(\phi(s)(x)) = \phi(s)(x)$, also $\operatorname{supp}(\phi(s)) \subseteq U$.

Es sei nun $x \in M$ und $s \in \Gamma(E)$ mit $s(x) = 0$. Wir zeigen nun, dass daraus auch $\phi(s)(x) = 0$ folgt. Aufgrund der Lokalität von ϕ dürfen wir o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^n$, $x = 0$, $E = \mathbb{R}^n \times V$ und $F = \mathbb{R}^n \times W$ annehmen. Indentifizieren wir $\Gamma(E) = C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ und $\Gamma(F) = C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$, so erhalten wir eine $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-lineare Abbildung $\phi : C^\infty(\mathbb{R}^n, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$, sowie $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ mit $s(0) = 0$. Zu zeigen ist $\phi(s)(0) = 0$. Die entscheidende Beobachtung ist nun

$$s(y) = s(y) - s(0) = \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t} s(ty)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n y^i \tfrac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt = \sum_{i=1}^n y^i \int_0^1 \tfrac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt,$$

wobei $y^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Koordinatenprojektionen bezeichnen. Es gilt daher $s = \sum_{i=1}^n y^i s_i$, wobei $s_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$, $s_i(y) := \int_0^1 \frac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt$. Aus der $C^\infty(M)$-Linearität von ϕ erhalten wir damit $\phi(s) = \sum_{i=1}^n y^i \phi(s_i)$ und somit $\phi(s)(0) = 0$.

Wir sehen daher, dass $\phi(s)(x) \in F_x$ nur von $s(x) \in E_x$ abhängt. Es existieren daher $\varphi_x \in L(E_x, F_x)$, sodass $\phi(s)(x) = \varphi_x(s(x))$ für alle $s \in \Gamma(E)$ und $x \in M$. Diese φ_x, $x \in M$, definieren einen Schnitt φ des Bündels $\hom(E, F)$, es bleibt nur noch zu zeigen, dass dieser Schnitt auch glatt ist. Sei dazu $U \subseteq M$ offen, $E|_U \cong U \times V$ und $F|_U \cong U \times W$ Vektorbündelkarten und $\hom(E, F)|_U \cong U \times L(V, W)$ die entsprechende lokale Trivialisierung von $\hom(E, F)$. In diesen Karten ist $\phi : C^\infty(U, V) \to C^\infty(U, W)$ von der Form $\phi(s)(x) = \tilde{\varphi}(x) \cdot s(x)$, $s \in C^\infty(U, V)$, $x \in U$, für eine Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to L(V, W)$. Betrachten wir $v \in V$ als konstante Abbildung $v \in C^\infty(U, V)$ so folgt $\tilde{\varphi}(x) \cdot v = \phi(v)(x)$, also ist $\tilde{\varphi}(x) \cdot v$ für fixes v glatt in x. Folglich ist $\tilde{\varphi} : U \to L(V, W)$ glatt, siehe Aufgabe 40, woraus nun die Glattheit von φ folgt. □

Aus Proposition II.1.26 erhalten wir insbesondere einen $C^\infty(M)$-linearen Isomorphismus $\Gamma(E') = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), C^\infty(M))$, dh. Schnitte von E' können in kanonischer Weise mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Gamma(E) \to C^\infty(M)$ identifiziert werden. Mittels $E'' = E$ erhalten wir aber auch $\Gamma(E) = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E'), C^\infty(M))$, dh. Schnitte von E können als $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Gamma(E') \to C^\infty(M)$ aufgefasst werden.

II.1.27. Beispiel. Unter dem *Kotangentialbündel* einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir das Vektorbündel $T^*M := (TM)'$, $\operatorname{rank}(T^*M) = \dim(M)$, seine Schnitte können in kanonischer Weise mit den 1-Formen auf M identifiziert werden, $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$. Aus Proposition II.1.26 sehen wir, dass $\Omega^1(M)$ in kanonischer Weise mit den $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ identifiziert werden kann, vgl. [**3**, Abschnitt 4.1]. Wir können aber auch $\mathfrak{X}(M)$ mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Omega^1(M) \to C^\infty(M)$ identifizieren.

Es seien E und F zwei glatte Vektorbündel über M. Das *Tensorprodukt* von E und F ist ein glattes Vektorbündel $E \otimes F$ über M mit Fasern $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$. Genauer, die dem Totalraum zugrundeliegende Menge ist $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes F_x$, und $E \otimes F \to M$ bezeichnet die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U \times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ lokale Trivialisierungen, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E \otimes F)|_U = \bigsqcup_{x \in U} E_x \otimes F_x \xrightarrow{\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x \otimes \psi_x} \bigsqcup_{x \in U} V \otimes W = U \times (V \otimes W).$$

Analog zu den vorangehenden Konstruktionen lässt sich zeigen, dass auf $E \otimes F$ genau eine glatte Struktur existiert, sodass dieses ρ ein Diffeomorphismus wird, für alle Paare lokaler Trivialisierungen φ und ψ wie oben. Versehen wir nun $E \otimes F$ mit dieser glatten Struktur, so wird $E \otimes F$ zu einem glatten Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E \otimes F) = \operatorname{rank}(E) \cdot \operatorname{rank}(F)$. Ist $s \in \Gamma(E)$ und $t \in \Gamma(F)$ so schreiben wir $s \otimes t \in \Gamma(E \otimes F)$ für den entsprechenden Schnitt von $E \otimes F$, dh. $(s \otimes t)_x = s_x \otimes t_x$, $x \in M$. Beachte auch die kanonischen Isomorphismen $(E \otimes F) \otimes G = (E \otimes F) \otimes G$, $E \otimes \xi^1 = E$, $E \otimes F \cong F \otimes E$, $f^*(E \otimes F) = f^*E \otimes f^*F$, $E \otimes (F \oplus G) = E \otimes F \oplus E \otimes G$, $\hom(E, F) = F \otimes E'$, $\operatorname{end}(E) = E \otimes E'$, $(E \otimes F)' = E' \otimes F'$ und

$$\hom(E \otimes F, G) = \hom(E, \hom(F, G)).$$

Zusammen mit Proposition II.1.26 sehen wir daraus, dass Schnitte des Vektorbündels $\hom(E \otimes F, G)$ in natürlicher Weise mit $C^\infty(M)$-bilinearen Abbildungen $\Gamma(E) \times \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ identifiziert werden können.

Ist E ein Vektorbündel dann definieren wir

$$\otimes^l_k E := \underbrace{E' \otimes \cdots \otimes E'}_{k \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{l \text{ Faktoren}}.$$

Aus den Beobachtungen oben folgt nun, dass $\Gamma(\otimes^l_k E)$ in natürlicher Weise mit den $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E)}_{k \text{ Faktoren}} \times \underbrace{\Gamma(E') \times \cdots \times \Gamma(E')}_{l \text{ Faktoren}} \to C^\infty(M)$$

identifiziert werden kann.

II.1.28. Beispiel. Tensorfelder aus $\mathcal{T}^l_k(M)$ können als glatte Schnitte des Vektorbündels

$$\otimes^l_k TM = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{k \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{l \text{ Faktoren}}$$

aber auch als $C^\infty(M)$-multilineare Abbildungen

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{k\text{ Faktoren}}\times\underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{l\text{ Faktoren}}\to C^\infty(M)$$

verstanden werden, vgl. [**3**, Abschnitt 4.2].

Für jedes Vektorbündel E haben wir einen Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{tr}:\operatorname{end}(E)\to\xi^1$, der als *kanonische Kontraktion* oder *Spur* bezeichnet wird. Faserweise ist $\operatorname{tr}_x:\operatorname{end}(E)_x=\operatorname{end}(E_x)\to\xi^1_x=\mathbb{R}$ die übliche Spur. Für Schnitte erhalten wir daraus eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\operatorname{tr}:\Gamma(\operatorname{end}(E))\to C^\infty(M)$, $\operatorname{tr}(\varphi)(x)=\operatorname{tr}(\varphi_x)$. Analog definiert die faserweise Komposition von Endomorphismen einen Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{end}(E)\otimes\operatorname{end}(E)\to\operatorname{end}(E)$. Auch liefert die faserweise Evaluation einen kanonischen Vektorbündelhomomorphismus $\hom(E,F)\otimes E\to F$, bzw. $\operatorname{end}(E)\otimes E\to E$.

Es sei E ein Vektorbündel über M und $\otimes^k E=E\otimes\cdots\otimes E$. Für jede Permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ bezeichne $\phi_\sigma:\otimes^kE\to\otimes^kE$ den Vektorbündelisomorphismus der die Faktoren entsprechend permutiert, $\phi_\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)=e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(k)}$. Betrachte nun den Vektorbündelhomomorphismus

$$\operatorname{alt}:\otimes^kE\to\otimes^kE,\qquad \operatorname{alt}:=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sign}(\sigma)\phi_\sigma.$$

Da $\phi_{\sigma\tau}=\phi_\sigma\circ\phi_\tau$ und $\operatorname{sign}(\sigma\tau)=\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$, $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_k$, folgt sofort $\operatorname{alt}\circ\operatorname{alt}=\operatorname{alt}$. Nach Proposition II.1.10 ist daher $\Lambda^kE:=\operatorname{img}(\operatorname{alt})$ ein Teilbündel von $\otimes^kE$ mit Fasern $(\Lambda^kE)_x=\Lambda^k(E_x)$. Beachte, dass wir dieses Vektorbündel auch als Quotient von $\otimes^kE$ verstehen können, denn alt induziert einen kanonischen Isomorphismus $\Lambda^kE=\otimes^kE/\ker(\operatorname{alt})$. Glatte Schnitte von Λ^kE können daher mit $C^\infty(M)$-*multilinearen alternierenden* Abbildungen $\Gamma(E')\times\cdots\times\Gamma(E')\to C^\infty(M)$ identifiziert werden. Analog, können wir glatte Schnitte von Λ^kE' mit $C^\infty(M)$-multilinearen alternierenden Abbildungen $\Gamma(E)\times\cdots\times\Gamma(E)\to C^\infty(M)$ identifizieren. Beachte die kanonischen Isomorphismen $f^*(\Lambda^kE)=\Lambda^k(f^*E)$, $\Lambda^kE'=(\Lambda^kE)'$, und

$$\Lambda^k(E\oplus F)=\bigoplus_{p+q=k}\Lambda^pE\otimes\Lambda^qE.$$

Das Faserweise Hack Produckt liefert einen Vektorbündelhomomorphismus $\Lambda^pE\otimes\Lambda^qE\to\Lambda^{p+q}E$, die davon induzierte Abbildung $\Gamma(\Lambda^pE)\times\Gamma(\Lambda^qE)\to\Gamma(\Lambda^{p+q}E)$ macht $\bigoplus_k\Gamma(\Lambda^kE)=\Gamma(\bigoplus_k\Lambda^kE)$ zu einer assotiativen und graduiert kommutativen Algebra.

II.1.29. Beispiel. Aus obigen Überlegungen sehen wir nun, dass $\Omega^k(M)$ einerseits mit $\Gamma(\Lambda^kT^*M)$ und andererseits mit dem Modul der $C^\infty(M)$-multilineare alternierende Abbildungen $\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ in kanonischer Weise identifiziert werden können.

Analog zum alternierenden Fall lässt sich zeigen, dass für den Vektorbündelhomomorphismus

$$\mathrm{sym} : \otimes^k E \to \otimes^k E, \qquad \mathrm{sym} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \phi_\sigma,$$

$\mathrm{sym} \circ \mathrm{sym} = \mathrm{sym}$ gilt, und daher $S^k E := \mathrm{img}(\mathrm{sym}) \subseteq \otimes^k E$ ein Teilbündel mit Fasern $(S^k E)_x = S^k(E_x)$ bildet, das wir auch als Quotient $S^k E = \otimes^k E / \ker(\mathrm{sym})$ verstehen können. Glatte Schnitte von $S^k E$ entsprechen nun $C^\infty(M)$-*multilinearen symmetrischen* Abbildungen $\Gamma(E') \times \cdots \times \Gamma(E') \to C^\infty(M)$. Analog können wir $\Gamma(S^k E')$ mit dem Modul der $C^\infty(M)$-multilinearen symmetrischen Abbildungen $\Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ identifizieren. Beachte auch, dass die Fasern $(S^k E')_x = S^k E'_x$ mit den homogenen Polynomen vom Grad k auf E_x identifiziert werden können. Wieder haben wir kanonische Identifikationen $f^*(S^k E) = S^k(f^* E)$ und $S^k(E') = (S^k E)'$. Für uns werden vor Allem Schnitte $b \in \Gamma(S^2 E')$ interessant sein, so ein Schnitt liefert eine symmetrische Bilinearform b_x auf jeder Faser E_x, und diese hängen glatt von x ab. Alternativ können wir b als eine symmetrische $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung $b : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ auffassen.

II.1.30. Bemerkung. Unter einem *Rahmen* eines Vektorbündels E über M verstehen wir Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E)$, sodass $s_{1,x}, \dots, s_{k,x}$ eine Basis der Faser E_x bildet, für jedes $x \in M$. Unter einem *lokalen Rahmen* verstehen wir einen Rahmen von $E|_U$, wobei $U \subseteq M$ offen ist. Ein Vektorbündel vom Rang k besitzt genau dann einen Rahmen, wenn es trivial ist, jeder Rahmen s_i von E liefert einen Isomorphismus $M \times \mathbb{R}^k \cong E$, $(x, t^1, \dots, t^k) \mapsto t^1 s_{1,x} + \cdots + t^k s_{k,x}$, siehe Proposition II.1.5. I.A. wird ein Vektorbündel daher keinen Rahmen besitzen, lokale Rahmen exisistieren jedoch immer. Jeder lokale Rahmen $s_i \in \Gamma(E|_U)$ liefert eine Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, die den Schnitt s_i auf die durch den i-ten Einheitsvektor von $\mathbb{R}^k$ definierte konstante Abbildung $U \to \mathbb{R}^k$ abbildet.

Unter dem (lokalen) *dualen Korahmen* verstehen wir jene eindeutig bestimmten Schnitte $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ für die $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$ gilt, dh. in jeder Faser ist $\sigma_x^1, \dots, \sigma_x^k$ die zu $s_{1,x}, \dots, s_{k,x}$ duale Basis, $x \in U$. Ein beliebige Schnitt $t \in \Gamma(E)$ lässt sich lokal in einem Rahmen entwickeln,

$$t|_U = \sum_{i=1}^k t^i s_i, \qquad t^i = \sigma^i(t|_U) \in C^\infty(U).$$

Bezüglich eines lokalen Rahmens lässt sich ein Schnitt daher durch einen Spaltenvektor $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^k)^t \in C^\infty(U)^k = C^\infty(U; \mathbb{R}^k)$ von Koeffizientenfunktionen darstellen. Bilden $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k \in \Gamma(E|_U)$ einen weiteren lokalen Rahmen von E, dann gilt

$$s_i = \sum_{j=1}^k h_i^j \tilde{s}_j, \qquad h_i^j = \tilde{\sigma}^j(s_i) \in C^\infty(U).$$

Fassen wir diese h_i^j als $(k \times k)$-Matrix $\mathbf{h} = (h_i^j)$ mit Eintragungen in $C^\infty(U)$ auf, dann bildet also $\mathbf{h}_x$ die Matrix zum Basiswechsel von $s_{i,x}$ nach $\tilde{s}_{i,x}$. Für die Koeffizienten der Entwicklung $t|_U = \sum_{i=1}^k \tilde{t}^i \tilde{s}_i$ im Rahmen $\tilde{s}_i$ gilt daher

$$\tilde{t}^j = \sum_{i=1}^k h_i^j t^i$$

oder in Matrixschreibweise $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{h}\,\mathbf{t}$.

Ist $s_1^E, \dots, s_k^E \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen von E und $s_1^F, \dots, s_l^F \in \Gamma(F|_U)$ ein lokaler Rahmen von F, dann bilden $s_1^E, \dots, s_k^E, s_1^F, \dots, s_l^F$ einen lokalen Rahmen von $E \oplus F$, und $s_i^E \otimes s_j^F$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ ist ein lokaler Rahmen von $E \otimes F$. Insbesondere bildet also

$$\sigma^{i_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{i_q} \otimes s_{j_1} \otimes \cdots \otimes s_{j_p}, \qquad 1 \leq i_l, j_l \leq k,$$

einen lokalen Rahmen von $\otimes_q^p E$ und

$$s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p}, \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq k,$$

ist ein lokaler Rahmen von $\Lambda^p E$.

II.1.31. Beispiel. Ist $M \supseteq U \xrightarrow{u} \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ einen lokalen Rahmen des Tangentialbündels TM und $du^1, \dots, du^n \in \Omega^1(U) = \Gamma(T^*M|_U)$ ist der duale Korahmen von T^*M. Wir erhalten einen lokalen Rahmen von $\otimes_q^p TM$,

$$du^{i_1} \otimes \cdots \otimes du^{i_q} \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^{j_p}}, \qquad 1 \leq i_l, j_l \leq n,$$

und

$$du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_q}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n,$$

bildet einen lokalen Rahmen von $\Lambda^q T^*M$.

II.2. Thom Isomorphismus. Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $o \in \Gamma(E)$ der Nullschnitt. Offensichtlich ist $p \circ o = \mathrm{id}_M$, es gilt aber auch $o \circ p \simeq \mathrm{id}_E$, denn $h : E \times I \to E$, $h(v,t) := tv$, ist eine Homotopie von $o \circ p$ nach id_E. Die Vektorbündelprojektion ist also eine Homotopieäquivalenz und induziert daher für jedes q einen Isomorphismus $p^* : H^q(M) \cong H^q(E)$, deren Inverser vom Nullschnitt induziert wird, siehe Korollar I.2.10. Beachte auch, dass jeder Schnitt $s \in \Gamma(E)$ homotop zum Nullschnitt ist, denn $M \times I \to E$, $(x,t) \mapsto h(s(x),t)$, ist eine Homotopie von o nach s.

II.2.1. Satz. *Es sei $p : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel vom Rank k über einer geschlossenen glatten n-Mannigfaltigkeit M. Dann existiert eine eindeutige Klasse $\phi_E \in H_c^k(E)$, die sogenannte* Thom Klasse *von E, sodass $\int_{E_x} \iota_x^* \phi_E = 1$ für alle $x \in M$, wobei $\iota_x : E_x \to E$ die Inklusion der Faser bezeichnet. Für die Thom Klasse gilt weiters:*

(a) *Die Abbildung $H^q(M) \to H_c^{q+k}(E)$, $a \mapsto p^* a \wedge \phi_E$, ist für jedes q ein Isomorphismus, der sogenannte* Thom Isomorphismus.

(b) *Ist M orientiert und der Totalraum von E mit der induzierten Orientierung versehen, dann gilt $\int_M o^*b = \int_E b\wedge\phi_E$, für alle $b \in H^n(E)$, dh. ϕ_E is Poincaré Dual zum Nullschnitt.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur im orientierbaren Fall, sei also M orientiert und der Totalraum E mit der induzierten Orientierung versehen. Betrachte nun die Isomorphismen, siehe Satz I.5.9,

$$H_c^{q+k}(E)' \xleftarrow[\cong]{D^E} H^{n-q}(E) \xleftarrow[\cong]{p^*} H^{n-q}(M) \xrightarrow[\cong]{D^M} H_c^q(M)' = H^q(M)'.$$

Da M kompakt ist sind alle Kohomologien endlich dimensional, siehe Korollar I.3.26. Es existiert daher ein eindeutiger Isomorphismus $\psi : H_c^{q+k}(E) \xrightarrow{\cong} H^q(M)$, sodass

$$\int_E p^*a \wedge b = \int_M a \wedge \psi(b), \qquad \text{für alle } a \in H^{n-q}(M). \tag{II.1}$$

Insbesondere ist die Klasse $\phi_E := \psi^{-1}([1]) \in H_c^k(E)$ durch

$$\int_E p^*a \wedge \phi_E = \int_M a, \qquad \text{für alle } a \in H^n(M), \tag{II.2}$$

eindeutig charakterisiert. Aus der definierenden Gleichung für ψ, siehe (II.1), folgt sofort $\psi(p^*a\wedge b) = a\wedge\psi(b)$, und daher $p^*a\wedge\phi_E = \psi^{-1}(a)$, für alle $a \in H^n(M)$. Dies zeigt (a). Für $b \in H^n(E)$ erhalten wir aus (II.2) auch $\int_M o^*b = \int_E(p^*o^*b) \wedge \phi_E = \int_E b \wedge \phi$, denn $o^* : H^n(E) \to H^n(M)$ ist inverse zu $p^* : H^n(M) \to H^n(E)$. Damit ist auch (b) gezeigt.

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass ϕ_E durch $\int_{E_x} \iota_x^*\phi_E = 1$ eindeutig charakterisiert ist. Wir nehmen dazu o.B.d.A. M zusammenhängend an. Weiters sei $x \in S$ und $U \subseteq M$ eine zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorphe Umgebung von x, über der E trivialisierbar ist. Wähle $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_M \alpha = 1$. Da die von α repräsentierte Klasse $H^n(M)$ erzeugt, ist die ϕ_E definierende Relation (II.2) zu $\int_{p^{-1}(U)} p^*\alpha \wedge \phi_E = 1$ äquivalent. Wir wählen eine orientierungsbewahrende Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times E_x$ und eine orientierte Karte $U \cong \mathbb{R}^n$, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet. Dies liefert einen Isomorphismus $E|_U \cong \mathbb{R}^n \times E_x$, $\tilde\alpha \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde\alpha = 1$, und $\tilde\phi_E \in \Omega^k(\mathbb{R}^n\times E_x)$, $d\tilde\phi_E = 0$ und $\operatorname{supp}(\tilde\phi_E)\cap\operatorname{supp}(p_1^*\tilde\alpha)$ ist kompakt. Die ϕ_E definierende Relation (II.2) ist nun zu $\int_{\mathbb{R}^n\times E_x} p_1^*\tilde\alpha \wedge \tilde\phi_E = 1$ äquivalent. Beachte, dass $\mathbb{R}^n \times E_x \times I \to \mathbb{R}^n \times E_x$, $(y, v, t) \mapsto (ty, v)$, eine Homotopie von $\iota_x \circ p_2$ nach $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\times E_x}$ definiert. Nach Satz I.2.5 existiert daher $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n \times E_x)$ mit $\tilde\phi_E = p_2^*\iota_x^*\phi_E + d\beta$. Für das im Beweis von Satz I.2.5 konstruierte β ist zudem $\operatorname{supp}(\beta) \cap \operatorname{supp}(p_1^*\alpha)$ kompakt. Mit Bemerkung I.4.16 erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n\times E_x} p_1^*\tilde\alpha \wedge \tilde\phi_E = \int_{\mathbb{R}^n\times E_x} p_1^*\tilde\alpha \wedge p_2^*\iota_x^*\phi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde\alpha \cdot \int_{E_x} \iota_x^*\phi_E = \int_{E_x} \iota_x^*\phi_E,$$

also ist die ϕ_E definierende Bedingung (II.2) zu $\int_{E_x} \iota_x^*\phi_E = 1$ äquivalent. $\square$

II.2.2. Definition. Unter der *Euler Klasse* eines orientierten Vektorbündels E von Rank k über einer geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir die Klasse $e_E := o^*\phi_E \in H^k(M)$, wobei $\phi_E \in H^k_c(E)$ die Thom Klasse und $o \in \Gamma(E)$ den Nullschnitt von E bezeichnen.

II.2.3. Beispiel. Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit, V ein k-dimensionaler orientierter Vektorraum und es bezeichne $E := M \times V$ das triviale Vektorbündel. Weiters sei $\phi \in \Omega^k_c(V)$ mit $\int_V \phi = 1$. Dann repräsentiert $p_2^*\phi$ die Thom Klasse von E, wobei $p_2 : M \times V \to V$ die kanonische Projektion bezeichnet. Insbesondere verschwindet die Euler Klasse jedes trivialisierbaren Vektorbündels mit Rang $k \geq 1$, denn $o^*p_2^*\phi = (p_2 \circ o)^*\phi = 0$ da ja $p_2 \circ o : M \to V$ konstant ist.

II.2.4. Satz (Lokalisationsprinzip)**.** *Es bezeichne $\iota : S \to M$ die kanonische Inklusion einer geschlossenen orientierten k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Dann existiert zu jeder offenen Umgebung U von S in M ein Repräsentant des Poincaré Duals $\eta_S \in H^{n-k}(M)$ der Träger in U hat. Versehen wir das Normalenbündel $T^\perp S$ mit der induzierten Orientierung dann gilt weiters $e_{T^\perp S} = \iota^*\eta_S \in H^{n-k}(M)$.*

Beweis. Durch Verkleinern von U dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass eine tubuläre Umgebung $\varphi : T^\perp S \xrightarrow{\cong} U$ wie in Satz II.1.16 existiert, dh. φ ist orientierungsbewahrend und es gilt $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Bezeichnen $j : U \to M$ und $\iota : S \to M$ die kanonischen Inklusionen und $o \in \Gamma(T^\perp S)$ den Nullschnitt, dann gilt also $\iota = j \circ \varphi \circ o$. Es bezeichne $\phi \in H^{n-k}_c(T^\perp S)$ die Thom Klasse von $T^\perp S$, siehe Satz II.2.1, und $\eta := j_*(\varphi^{-1})^*\phi \in H^{n-k}_c(M) = H^{n-k}(M)$. Nach Konstruktion hat η einen Repräsentanten mit Träger in U, es genügt daher zu zeigen, dass η Poincaré Dual zu S ist. Für jedes $a \in H^k(M)$ gilt jedoch, siehe Satz II.2.1(b),

$$\int_M a \wedge \eta = \int_M a \wedge j_*(\varphi^{-1})^*\phi = \int_U j^*a \wedge (\varphi^{-1})^*\phi$$
$$= \int_{T^\perp S} \varphi^*j^*a \wedge \phi = \int_S o^*\varphi^*j^*a = \int_S (j \circ \varphi \circ o)^*a = \int_S \iota^*a,$$

und somit $\eta = \eta_S$. Daraus erhalten wir nun auch $\iota^*\eta_S = \iota^*\eta = \iota^*j_*(\varphi^{-1})^*\phi = o^*\phi = e_{T^\perp S}$. □

II.2.5. Proposition (Natürlichkeit der Thom und Euler Klassen)**.** *Es sei $f : M \to N$ ein glatte Abbildung zwischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten und E ein orientiertes Vektorbündel vom Rang k über N. Versehen wir das Pullback Bündel f^*E mit der induzierten Orientierung, dann gilt $\phi_{f^*E} = \tilde{f}^*\phi_E \in H^k_c(f^*E)$ und $e_{f^*E} = f^*e_E \in H^k(M)$, wobei $\tilde{f} : f^*E \to E$ den kanonischen Vektorbündelhomomorphismus über f bezeichnet.*

Beweis. Für jedes $x \in M$ ist $\tilde{f}_x : (f^*E)_x \to E_{f(x)}$ ein orientierungsbewahrender linearer Isomorphismus und daher $\int_{(f^*E)_x} \tilde{f}^*\phi_E = \int_{E_{f(x)}} \phi_E = 1$. Da diese

Eigenschaft die Thom Klasse von f^*E charakterisiert folgt $\tilde{f}^*\phi_E = \phi_{f^*E}$. Bezeichnet $o : N \to E$ den Nullschnitt von E und $\tilde{o} : M \to f^*E$ den Nullschnitt von f^*E, dann gilt offenbar $\tilde{f} \circ \tilde{o} = o \circ f : M \to E$ und somit $e_{f^*E} = \tilde{o}^*\phi_{f^*E} = \tilde{o}^*\tilde{f}^*\phi_E = (\tilde{f} \circ \tilde{o})^*\phi_E = (o \circ f)^* = f^*o^*\phi_E = f^*e_E$. □

II.2.6. Proposition (Thom und Euler Klasse einer Whitney Summe)**.** *Es seien E und F zwei orientierte Vektorbündel vom Rang k bzw. l über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M. Versehen wir $E \oplus F$ mit der induzierten Orientierung, dann gilt $\phi_{E\oplus F} = \pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F \in H_c^{k+l}(E \oplus F)$ und $e_{E\oplus F} = e_E \wedge e_F \in H^{k+l}(M)$, wobei $\pi_1 : E \oplus F \to E$ und $\pi_2 : E \oplus F \to F$ die beiden kanonischen Vektorbündelhomomorphismen bezeichnen.*

Beweis. Für jedes $x \in M$ induzieren die faserweisen Projektionen $(\pi_1)_x : (E \oplus F)_x \to E_x$ und $(\pi_2)_x : (E \oplus F)_x \to F_x$ einen orientierungsbewahrenden Isomorphismus $(E \oplus F)_x = E_x \times F_x$. Es folgt somit

$$\begin{aligned}\int_{(E\oplus F)_x} (\iota_x^{E\oplus F})^*\big(\pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F\big) &= \int_{E_x\times F_x} (\pi_1)_x^*(\iota_x^E)^*\phi_E \wedge (\pi_2)_x^*(\iota_x^F)^*\phi_F \\ &= \int_{E_x} (\iota_x^E)^*\phi_E \cdot \int_{F_x} (\iota_x^F)^*\phi_F = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Da diese Eigenschaft die Thom Klasse von $E \oplus F$ charakterisiert erhalten wir die gewünschte Relation $\phi_{E\oplus F} = \pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F$. Bezeichnet $o : M \to E \oplus F$ den Nullschnitt, dann ist offenbar $o_1 := \pi_1 \circ o : M \to E$ der Nullschnitt in E und $o_2 := \pi_2 \circ o : M \to F$ der Nullschnitt in F. Somit erhlaten wir auch $e_{E\oplus F} = o^*\phi_{E\oplus F} = o^*\big(\pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F\big) = o^*\pi_1^*\phi_E \wedge o^*\pi_2^*\phi_F = (\pi_1 \circ o)^*\phi_E \wedge (\pi_2 \circ o)^*\phi_F = o_1^*\phi_E \wedge o_2^*\phi_F = e_E \wedge e_F$. □

II.2.7. Beispiel. Besitzt ein Vektorbündel E einen nirgendwo verschwindenden Schnitt, dann gilt $e_E = 0$. Ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$ ohne Nullstelle definiert nämlich einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\xi^1 \to E$, dessen Bild ein Teilbündel von E bildet. Bezeichnet F ein komplementäres Teilbündel, so folgt $E \cong \xi^1 \oplus F$ und mit Proposition II.2.6 daher $e_E = e_{\xi^1} \wedge e_F = 0$, denn $e_{\xi^1} = 0$ nach Beispiel II.2.3. Fassen wir $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ auf, dann definiert $X(x) := \mathbf{i}x$ ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(TS^{2n-1}) = \Gamma(TS^{2n-1})$ ohne Nullstelle, es folgt daher $e(TS^{2n-1}) = 0$, $n \geq 1$.

II.2.8. Satz. *Ist M eine orientierte geschlossene n-Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\int_M e_{TM} = \chi(M).$$

Beweis. Aus Korollar I.7.23, Satz II.2.4 und Proposition II.2.5 folgt

$$\chi(M) = \int_\Delta \eta_\Delta = \int_\Delta e_{T^\perp\Delta} = \int_M \delta^* e_{T^\perp\Delta} = \int_M e_{\delta^*T^\perp\Delta},$$

wobei $\delta : M \xrightarrow{\cong} \Delta \subseteq M \times M$, $\delta(x) = (x, x)$. Es genügt daher $\delta^* T^\perp\Delta \cong TM$ zu zeigen. Beachte hierfür, dass $TM \to T(M \times M)|_\Delta$, $X \mapsto (0, X)$, einen Vektorbündelhomomorphismus über δ definiert, der einen faserweise bijektiven und orientierungserhaltenden Homomorphismus $TM \to T^\perp\Delta$ über δ induziert, und daher einen orientierungsbewahrenden Isomorphismus $TM \cong \delta^* T^\perp\Delta$ liefert. $\square$

II.2.9. Satz. *Es seien M und N zwei orientierte geschlossenen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Weiters sei $S \subseteq N$ eine geschlossene orientierte k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von N und $f : M \to N$ transversal zu S. Versehen wir die geschlossene Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(S) \subseteq M$ mit der induzierten Orientierung, siehe Proposition II.1.13, dann gilt für ihr Poincaré Dual*

$$\eta_{f^{-1}(S)} = f^* \eta_S.$$

Beweis. Es bezeichne $\Sigma := f^{-1}(S) \subseteq M$. Weiters seien $\varphi : T^\perp\Sigma \cong U \subseteq M$ und $\psi : T^\perp S \cong V \subseteq N$ tubuläre Umgebungen von Σ bzw. S, sodass $f(U) \subseteq V$, siehe Satz II.1.16. Betrachte $F := \psi^{-1} \circ f|_U \circ \varphi : T^\perp\Sigma \to T^\perp S$. Wähle eine kompakte Umgebung K von $S \subseteq N$, sodass $f^{-1}(K) \subseteq V$. Es bezeichne $\phi_S \in \Omega^k(T^\perp S)$ einen Repräsentanten der Thom Klasse von $T^\perp S$ mit $\mathrm{supp}(\phi_S) \subseteq \psi^{-1}(K)$. Nach Satz II.2.4 genügt es zu zeigen, dass $F^*\phi_S \in \Omega^k_c(T^\perp\Sigma)$ die Thom Klasse von $T^\perp\Sigma$ repräsentiert. Sei dazu $x \in \Sigma$. Wegen der Charakterisierung der Thom Klasse in Satz II.2.1 genügt es $\int_{T^\perp_x\Sigma} F^*\phi_S = 1$ zu zeigen. Nach Proposition II.2.5 gilt $\int_{T^\perp_x\Sigma} \tilde f^*\phi_S = 1$, wobei $\tilde f$ den Vektorbündelhomomorphismus $Tf|_\Sigma : T^\perp\Sigma \to T^\perp S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$ bezeichnet, siehe Proposition II.1.13. Mit einem Homotopieargument lässt sich schließlich $\int_{T^\perp_x\Sigma} \tilde f^*\phi_S = \int_{T^\perp_x\Sigma} F^*\phi_S$ zeigen. $\square$

II.2.10. Bemerkung. Als Spezialfall von Satz II.2.9 erhalten wir die Formel für den Abbildungsgrad in Satz I.6.3. Ist nämlich $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen nicht-leeren zusammenhängenden orientierten geschlossenen n-Mannigfaltigkeiten und $y \in M$ ein regulärer Wert von f, so folgt für das Poincaré Dual der 0-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(y) \subseteq M$ aus Satz II.2.9 sofort $\eta_{f^{-1}(y)} = f^*\eta_y$, wobei $\eta_y \in H^n(N)$ das Poincaré Dual der einpunktigen Teilmannigfaltigkeit $\{y\} \subseteq N$ bezeichnet. Da $\int_N \eta_y = 1$ folgt mit (I.37)

$$\deg(f) = \deg(f) \int_N \eta_y = \int_M f^*\eta_y = \int_M \eta_{f^{-1}(y)} = \int_{f^{-1}(y)} 1 = \sum_{f(x)=y} \varepsilon(x)$$

wobei $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ wie in Satz I.6.3 gegeben ist, denn die induzierte Orientierung von $x \in f^{-1}(y)$ ist genau dann positiv wenn $T_x f$ orientierungsbewahrend ist.

II.2.11. Korollar. *Es seien S_1 und S_2 zwei transversale orientierte geschlossene Teilmannigfaltigkeiten einer orientierten geschlossenen Mannigfaltigkeit M. Versehen wir die geschlossenen Teilmannigfaltigkeit $S_1 \cap S_2 \subseteq M$ mit der induzierten Orientierung, siehe Bemerkung II.1.15, dann gilt für ihr Poincaré Dual*

$$\eta_{S_1 \cap S_2} = \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2}.$$

Beweis. Es bezeichne $\iota_2 : S_2 \to M$ die kanonische Inklusion. Wir versehen $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1) \subseteq S_2$ mit der induzierten Orientierung, vgl. Bemerkung II.1.15. Nach Satz II.2.9 gilt daher $\eta_{\iota_2^{-1}(S_1)} = \iota_2^*\eta_{S_1}$. Für jedes $a \in H^*(M)$ folgt somit

$$\int_{S^1\cap S^2} a = \int_{\iota_2^{-1}(S_1)} a = \int_{S^2} a \wedge \eta_{\iota_2^{-1}(S_1)} = \int_{S_2} a \wedge \iota_2^*\eta_{S_1} = \int_M a \wedge \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2},$$

also $\eta_{S_1\cap S_2} = \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2}$. □

II.2.12. Beispiel. Es sei $M = S^n \times S^m$, $n, m \geq 1$, und $(x_0, y_0) \in S^n \times S^m$. Betrachte die beiden Teilmannigfaltigkeiten $\Sigma_1 := S^n \times \{y_0\}$ und $\Sigma_2 := \{x_0\} \times S^m$ von M und bezeichne ihre Poincaré Duale mit $a_1 := \eta_{\Sigma_1} \in H^m(M)$ bzw. $a_2 := \eta_{\Sigma_2} \in H^n(M)$. Beachte, dass Σ_1 und Σ_2 transversal sind, und sich nur in einem Punkt schneiden. Aus Korollar II.2.11 folgt daher $0 \neq a_1 \wedge a_2 \in H^{n+m}(M)$. Sei nun $y_0 \neq y_0' \in S^m$ und $\Sigma_1' := S^n \times \{y_0'\}$. Da die Inklusionen $S^n \cong \Sigma_1 \subseteq M$ und $S^n \cong \Sigma_1' \subseteq M$ homotop sind gilt auch $a_1 = \eta_{\Sigma_1'}$ und aus Korollar II.2.11 folgt $a_1 \wedge a_1 = 0$, denn $\Sigma_1 \cap \Sigma_1' = \emptyset$. Analog lässt sich die Relation $a_2 \wedge a_2 = 0$ geometrisch verstehen.

II.2.13. Beispiel. Ist Σ eine zusammenhängende geschlossene orientierte Fläche vom Geschlecht g, dann existieren 1-dimensionale zu S^1 diffeomorphe Teilmannigfaltigkeiten $A_1, \dots, A_g$ und $B_1, \dots, B_g$ von Σ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ und $A_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.
(b) A_i und B_i schneiden sich in genau einem Punkt transversal.
(c) Es existiert eine zu A_i homotope Teilmannigfaltigkeit A_i' mit $A_i \cap A_i' = \emptyset$.
(d) Es existiert eine zu B_i homotope Teilmannigfaltigkeit B_i' mit $B_i \cap B_i' = \emptyset$.

Es bezeichne $a_i \in H^1(\Sigma)$ das Poincaré Dual von A_i und $b_j \in H^1(\Sigma)$ das Poincaré Dual von B_j. Aus Korollar I.5.23 folgt nun

$$a_i \wedge a_j = 0 = b_i \wedge b_j, \qquad a_i \wedge b_j = \delta_{ij}$$

für geeignete Wahlen der Orientierungen von A_i und B_j. Daraus sehen wir, dass $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \in H^1(\Sigma)$ linear unabhägig sind und daher eine Basis von $H^1(\Sigma)$ bilden, denn $b_1(\Sigma) = 2g$.

II.2.14. Beispiel. Jede injektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^k \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, dh. $\iota(\mathbb{C}\mathrm{P}^k) \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit und ι ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Wir zeigen zunächst, dass das Poincaré Dual dieser Teilmannigfaltigkeit nicht von φ abhängt. Sind $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ zwei injektive lineare Abbildungen, dann existiert ein linearer Isomorphismus $g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$. Da $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist, existiert eine glatte Kurve $g_t \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ von $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ nach $g_1 = g$. Diese induziert eine Homotopie $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \times I \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ von $\iota_1 : \mathbb{C}\mathrm{P}^k \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ nach $\iota_2 : \mathbb{C}\mathrm{P}^k \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, wobei ι_i die von φ_i induzierte Einbettung bezeichnet. Daraus folgt nun, dass $\iota_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^k)$ und $\iota_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^k)$ das selbe Poincaré Dual haben. Es bezeichne nun $a_k \in H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ das Poincaré Dual von $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$,

$0 \leq k \leq n$. Sind $0 \leq k_1, k_2$ und $k_1 + k_2 \leq n$, dann existieren injektive lineare Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{C}^{n-k_i+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $\operatorname{img}(\varphi_1) + \operatorname{img}(\varphi_2) = \mathbb{C}^{n+1}$ und $\dim(\operatorname{img}(\varphi_1) \cap \operatorname{img}(\varphi_2)) = n - k_1 - k_2 + 1$. Die davon induzierten Einbettungen $\iota_1 : \mathbb{CP}^{n-k_1} \to \mathbb{CP}^n$ und $\iota_2 : \mathbb{CP}^{n-k_2} \to \mathbb{CP}^n$ sind transversal und es gilt $\iota_1(\mathbb{CP}^{n-k_1}) \cap \iota_2(\mathbb{CP}^{n-k_2}) \cong \mathbb{CP}^{n-k_1-k_2}$. Aus Korollar II.2.11 folgt daher $a_{k_1+k_2} = a_{k_1} \wedge a_{k_2}$. Insbesondere sind alle $a_k \neq 0$, denn $a_n \neq 0$. Mit $c := a_1 \in H^2(\mathbb{CP}^n)$ erhalten wir auch $a_k = c^k$, vgl. Korollar I.5.23. Die graduierte Basis $\{1, c, c^2, \dots, c^n\}$ von $H^*(\mathbb{CP}^n)$ besteht daher gerade aus den Poincaré Dualen der Teilmannigfaltigkeiten $\mathbb{CP}^k \subseteq \mathbb{CP}^n$, $0 \leq k \leq n$.

II.2.15. Satz (Fixpunktformel von Lefschetz)**.** *Es sei M eine geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ glatt, sodass alle Fixpunkte nicht-degeneriert sind, dh. für jedes $x \in M$ mit $f(x) = x$ ist $\det(T_xf - \mathrm{id}_{T_xM}) \neq 0$. Dann hat f nur endlich viele Fixpunkte und es gilt, siehe Definition I.7.19,*

$$\sum_{f(x)=x} \operatorname{ind}_x(f) = \lambda(f),$$

wobei $\operatorname{ind}_x(f) := \operatorname{sign}\det(\mathrm{id}_{T_xM} - T_xf)$, für jeden Fixpunk x von f.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass die Nichtdegeneriertheitsvoraussetzung an die Fixpunkte gerade bedeutet, dass die Diagonalabbildung $\delta : M \to M \times M$ transversal zum Graphen G_f ist. Die Tangentialabbildung der Diagonalabbildung ist nämlich $T_x\delta = (\mathrm{id}_{T_xM}, \mathrm{id}_{T_xM}) : T_xM \to T_xM \times T_xM = T_{(x,x)}(M \times M)$ und die Ableitung von $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f \subseteq M \times M$ bei einem Fixpunkt $x = f(x)$ ist $(\mathrm{id}_{T_xM}, T_xf) : T_xM \to T_xM \times T_xM = T_{(x,x)}(M \times M)$. Deren Bilder spannen genau dann ganz $T_{(x,x)}(M \times M)$ auf, wenn $\mathrm{id}_{T_xM} - T_xf$ ein Isomorphismus ist. Die Menge der Fixpunkte, $\delta^{-1}(G_f) = \{x \in M \mid f(x) = x\}$, ist daher eine kanonisch orientierte 0-dimensionale abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit von M. Da M kompakt ist, kann es also nur endlich viele Fixpunkte geben. Nach Definition des Poincaré Duals folgt daher

$$\int_M \eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \int_{\delta^{-1}(G_f)} 1 = \sum_{f(x)=x} \operatorname{ind}_x(f), \tag{II.3}$$

denn die induzierte Orientierung eines Fixpunktes $x \in \delta^{-1}(G_f)$ ist genau $\operatorname{ind}_x(f)$. Für die letzte Behauptung sei $X_1, \dots, X_n$ eine positiv orientierte Basis von T_xM. Ein Fixpunkt $x \in \delta^{-1}(G_f)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ T_xf \cdot X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ T_xf \cdot X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix},$$

eine positiv orientierte Basis von $T_{(x,x)}(M \times M) = T_xM \times T_xM$ bildet, und dies ist genau dann der Fall wenn $\det(\mathrm{id}_{T_xM} - T_xf) > 0$ gilt, denn die Basis oben definiert die gleiche Orientierung wie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{id}_{T_xM} - T_xf) \cdot X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{id}_{T_xM} - T_xf) \cdot X_n \end{pmatrix}.$$

Nach Satz II.2.9 gilt weiters $\eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \delta^*\eta_{G_f}$. Zusammen mit Satz I.7.22 erhalten wir daraus

$$\int_M \eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \int_M \delta^*\eta_{G_f} = \int_\Delta \eta_{G_f} = \lambda(f).$$

Kombinieren wir dies mit (II.3), so folgt der Satz. □

II.2.16. Korollar. *Es sei M eine geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ glatt mit $\lambda(f) \neq 0$. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

II.2.17. Beispiel. Ist n gerade, dann besitzt jede glatte Abbildung $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einen Fixpunkt. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = f^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Nach Bemerkung I.5.24 gilt dann $\lambda(f) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = (1 - \alpha^{n+1})/(1 - \alpha)$. Da n gerade ist, folgt $\lambda(f) \neq 0$, also muss f einen Fixpunkt besitzen, siehe Korollar II.2.16.

II.2.18. Satz. *Es sei E ein orientiertes Vektorbündel vom Rang k über einer geschlossenen orientierten glatten n-Mannigfaltigkeit M. Weiters sei $s \in \Gamma(E)$ ein Schnitt der transversal zum Nullschnitt ist. Dann ist die Nullstellenmenge $S := s^{-1}(0) = \{x \in M \mid s(x) = 0\} \subseteq M$ eine geschlossene kanonisch orientierte $(n-k)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Poincaré Dual $\eta_S = e_E \in H^k(M)$.*

Beweis. Es bezeichne $\phi_E \in H^k_c(E)$ die Thom Klasse von E. Genau wie im Beweis von Satz II.2.9 lässt sich zeigen, dass $s^*\phi_E$ Poincaré Dual zu S ist. Da $s : M \to E$ homotop zum Nullschnitt ist, folgt $e_E = o^*\phi_E = s^*\phi_E = \eta_S$. □

Es sei E ein Vektorbündel über M. Wir erinnern uns an den kanonischen Isomorphismus $TE|_M = TM \oplus E$ und bezeichnen die Projektion auf den zweiten Summanden mit $\pi : TE|_M \to E$. Ist nun $x \in M$ eine Nullstelle eines Schnitts $s \in \Gamma(E)$, so erhalten wir eine lineare Abbildung $D_xs : T_xM \to E_x$, $D_xs := \pi_x \circ T_xs$. Spezialisieren wir dies zu $E = TM$, so erhalten wir für jede Nullstelle $x \in M$ eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine lineare Abbildung $D_xX : T_xM \to T_xM$. Bezüglich einer Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} \mathbb{R}^n$ um x gilt $X|_U = X^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + X^n\frac{\partial}{\partial u^n}$, $X^j \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, und $D_xX \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial u^i}(x)\frac{\partial}{\partial u^j}(x)$, dh. die Matrixdarstellung von D_xX bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$ von T_xM ist gerade $\frac{\partial X^j}{\partial u^i}(x)$. Eine Nullstelle $x \in M$ von $X \in \mathfrak{X}(M)$ wird *nicht-degeneriert* genannt, falls $\det(D_xX : T_xM \to T_xM) \neq 0$.

II.2.19. Satz (Poincaré–Hopf)**.** *Es sei M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld dessen Nullstellen alle nicht-degeneriert sind. Dann besitzt X nur endlich viele Nullstellen und es gilt*

$$\sum_{X(x)=0} \operatorname{ind}_x(X) = \chi(M),$$

wobei $\operatorname{ind}_x(X) = \operatorname{sign}\det(D_xX : T_xM \to T_xM)$.

Beweis. Es bezeichne $S := X^{-1}(0) = \{x \in M \mid X(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von X. Wir werden unten sehen, dass die Nichtdegeneriertheitsvoraussetzung gerade bedeutet, dass X transversal zum Nullschnitt ist. Nach Satz II.2.18 ist S daher eine kanonisch orientierte kompakte 0-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M mit Poincaré Dual $\eta_S = e_{TM}$. Insbesondere ist S endlich, also besitzt X nur endlich viele Nullstellen. Mit Satz II.2.8 folgt nun

$$\chi(M) = \int_M e_{TM} = \int_M \eta_S = \int_S 1 = \sum_{X(x)=0} \operatorname{ind}_x(X),$$

denn die induzierte Orientierung von $x \in S$ ist gerade $\operatorname{ind}_x(X)$. Um die letzte Behauptung einzusehen, sei $\xi_1, \dots, \xi_n$ eine positiv orientierte Basis von T_xM. Bezüglich des orientierungsbewahrenden Isomorphismus $T_xTM = T_xM \oplus T_xM$ gilt $T_xX \cdot \xi_i = (\xi_i, D_xX \cdot \xi_i)$, also ist X genau dann transversal zum Nullschnitt wenn

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\xi_n\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\D_xX \cdot \xi_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\xi_n\\D_xX \cdot \xi_n\end{pmatrix} \tag{II.4}$$

eine Basis von $T_xM \oplus T_xM = T_xTM$ bildet, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(D_xX) \neq 0$ gilt. Beachte auch, dass die Basis (II.4) genau dann positiv orientiert ist, wenn $\operatorname{sign}\det(D_xX) > 0$ gilt, die induzierte Orientierung von $x \in S$ ist daher genau $\operatorname{ind}_x(X)$. □

II.2.20. Beispiel. Ist $X \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ ein Vektorfeld dessen Nullstellen alle nichtdegeneriert sind, dann muss X mindestens zwei Nullstellen besitzen. Dies folgt aus Satz II.2.19, denn $\chi(S^{2n}) = 2$.

II.2.21. Beispiel. Ist M eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) \neq 0$, dann muss jedes Vektorfeld auf M eine Nullstelle besizten.

II.3. Kovariante Ableitung und Paralleltransport. Es sei E ein Vektorbündel über M. Unter einer *kovarianten Ableitung* oder *linearen Konnexion* auf E verstehen wir eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \qquad (X, s) \mapsto \nabla_X s,$$

sodass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:

(a) $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$
(b) $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$
(c) $\nabla_X(s + t) = \nabla_X s + \nabla_X t$
(d) $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (X \cdot f)s$

Aufgrund der $C^\infty(M)$-Linearität in X kann eine kovariante Ableitung äquivalent als linearer Operator $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ aufgefasst werden, für den die Leibniz Regel $\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s$ gilt, $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$.

Beachte weiters $\operatorname{supp}(\nabla s) \subseteq \operatorname{supp}(s)$, dh. ∇ ist ein lokaler Operator. Zu jedem $x \notin \operatorname{supp}(s)$ existiert nämlich $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \cap \operatorname{supp}(s) = \emptyset$, $\lambda(x) = 1$ und $d\lambda(x) = 0$. Es gilt daher $\lambda s = 0$, und mit der Leibniz Regel erhalten wir

$0 = \nabla(\lambda s) = \lambda\nabla s + d\lambda \otimes s$, also $(\nabla s)_x = 0$. Ist $U \subseteq M$ offen dann folgt aus der Lokalität, dass $(\nabla s)|_U \in \Gamma(T^*M \otimes E|_U)$ nur von $s|_U \in \Gamma(E|_U)$ abhängt, dh. ∇ schränkt sich zu einer kovarianten Ableitung $\nabla^{E|_U}$ auf $E|_U$ ein.

II.3.1. Beispiel. Ist $E = M \times V$ ein triviales Vektorbündel, so definiert $\nabla s := ds$, dh. $\nabla_X s = X \cdot s$, eine lineare Konnexion, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in C^\infty(M, V) = \Gamma(E)$. Diese wird als *triviale Konnexion* bezeichnet.

II.3.2. Beispiel. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit, dann bildet die in [**3**, Abschnitt 3.6] konstruierte Levi–Civita Ableitung ∇ eine kovariante Ableitung auf TM.

Wir definieren die Menge der E-wertigen q-Formen durch

$$\Omega^q(M; E) := \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes E).$$

Elemente von $\Omega^q(M; E)$ können kanonisch mit $C^\infty(M)$-multilinearen alternierenden Abbildungen $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$ identifiziert werden. Für $E = \xi^1 = M \times \mathbb{R}$ erhalten wir $\Omega^q(M; \xi^1) = \Omega^q(M)$ zurück. Beachte auch $\Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$. Ist $f : N \to M$ glatt, so definieren wir $f^* : \Omega^q(M; E) \to \Omega^q(N; f^*E)$,

$$(f^*\sigma)_x(Y_1, \dots, Y_q) := \sigma_{f(x)}(T_x f \cdot Y_1, \dots, T_x f \cdot Y_q), \qquad Y_i \in T_x N.$$

Beachte auch $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : \Omega^q(M; E) \to \Omega^q(M; g^* f^* E) = \Omega^q(M; (f \circ g)^* E)$ für jede weitere glatte Abbildung $g : P \to N$.

II.3.3. Proposition. *Jedes Vektorbündel besitzt lineare Konnexionen. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf E und $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{end}(E))$, dann ist auch $\nabla + A$ eine lineare Konnexion auf E. Jede weitere lineare Konnexion $\tilde\nabla$ auf E lässt sich als $\tilde\nabla = \nabla + A$ für ein eindeutig bestimmtes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$ schreiben, dh. $\tilde\nabla_X s = \nabla_X s + A(X)s$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$. Die Menge der linearen Konnexionen auf E bildet daher einen affinen Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$.*

Beweis. Um die Existenz einer linearen Konnexion auf E einzusehen, wählen wir Vektorbündelkarten $E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$ mit $\bigcup_i U_i = M$. Nach dem vorangehenden Beispiel existieren lineare Konnextionen $\nabla^{E|_{U_i}}$ auf den trivialen Vektorbündeln $E|_{U_i}$. Sei nun $\{\lambda_i\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Der offensichtlich lineare Operator

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E), \qquad \nabla s := \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}(s|_{U_i}),$$

bildet eine lineare Konnexion auf E, denn für $f \in C^\infty(M)$ folgt

$$\nabla(fs) = \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}(fs|_{U_i}) = \sum_i \lambda_i f \nabla^{E|_{U_i}}(s|_{U_i}) + \lambda_i (df)s = f\nabla s + (df)s.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass für jedes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$ auch

$$\tilde{\nabla}_X s := \nabla_X s + A(X)s$$

eine lineare Konnexion auf E bildet. Sind umgekehrt ∇ und $\tilde{\nabla}$ zwei lineare Konnexionen, dann ist $A(X)s := \tilde{\nabla}_X s - \nabla_X s$ in beiden Variablen $C^\infty(M)$-linear und definiert daher einen Schnitt $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$. □

II.3.4. Proposition. *Ist E ein Vektorbündel über M, ∇ eine kovariante Ableitung auf E und $f : N \to M$ glatt, dann existiert auf dem Pullback Bündel f^*E genau eine kovariante Ableitung $\nabla^{f^*E} = f^*\nabla$, sodass*

$$\nabla^{f^*E}(f^*s) = f^*(\nabla s), \tag{II.5}$$

für alle $s \in \Gamma(E)$, dh. $\nabla^{f^*E}_Y(s \circ f) = \nabla_{T_y f \cdot Y} s$ für jedes $Y \in T_y N$. Zudem haben wir $f^*(\nabla + A) = f^*\nabla + f^*A$ für jedes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$. Ist $g : P \to N$ glatt dann gilt weiters $\mathrm{id}_M^* \nabla = \nabla$ und $g^*f^*\nabla = (f \circ g)^*\nabla$ bis auf die kanonischen Isomorphismen $\mathrm{id}_M^* E = E$ und $g^*f^*E = (f \circ g)^*E$.

Beweis. Es sei $E|_U \cong U \times V$ eine Vektorbündelkarte, $\tilde{U} := f^{-1}(U)$ und $f^*E|_{\tilde{U}} \cong \tilde{U} \times V$ die entsprechende Vektorbündelkarte des Pullback Bündels. Nach Proposition II.3.3 existiert $A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(V))$, sodass $\nabla_X s = X \cdot s + A(X)s$, für alle $s \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, V)$ und $X \in T_x U$. Betrachte nun $\tilde{A} := f^*A \in \Omega^1(\tilde{U}, \mathrm{end}(V))$, $\tilde{A}(Y) = A(T_y f \cdot Y)$, $Y \in T_y \tilde{U}$. Es definiert dann

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{s} := Y \cdot \tilde{s} + \tilde{A}(Y)\tilde{s}, \qquad Y \in T_y\tilde{U},\ \tilde{s} \in \Gamma(f^*E|_{\tilde{U}}) = C^\infty(\tilde{U}, V)$$

eine kovariante Ableitung auf $f^*E|_{\tilde{U}}$. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Y(s \circ f) &= Y \cdot (s \circ f) + \tilde{A}(Y)(s \circ f)\\ &= (T_y f \cdot Y) \cdot s + A(T_y f \cdot Y)s(f(y)) = \nabla_{T_y f \cdot Y} s\end{aligned}$$

für alle $s \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, V)$ und $Y \in T_y\tilde{U}$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass $\tilde{\nabla}$ die einzige kovariante Ableitung auf $f^*E|_{\tilde{U}}$ mit dieser Eigenschaft ist. Ist nun $E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$ ein Vektorbündelatlas und bezeichnen $\tilde{\nabla}^i$ die eben konstruierten kovarianten Ableitungen auf $f^*E|_{f^{-1}(U_i)}$, dann müssen wegen der Eindeutigkeitsaussage oben, je zwei davon auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Diese $\tilde{\nabla}^i$ definieren daher eine kovariante Ableitung ∇^{f^*E} auf f^*E für die (II.5) gilt. Die verbleibenden Eigenschaften lassen sich nun leicht mit Hilfe der Eindeutigkeit zeigen. □

II.3.5. Beispiel. Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M und ist $f : N \to M$ eine konstante Abbildung $f(y) = x_0$, dann erhalten wir eine kanonische Trivialisierung $f^*E = N \times E_{x_0}$ und die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ auf f^*E stimmt mit der trivialen Konnexion überein.

II.3.6. Beispiel. Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M, und Bezeichnet $\iota : U \to M$ die Inklusion einer offenen Teilmenge, dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\iota^*E = E|_U$ und die zurückgezogene Konnexion $\iota^*\nabla$ stimmt mit der Einschränkung $\nabla^{E|_U}$ überein.

Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und es bezeichne $\nabla^{p^*E} = p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf dem Pullback Bündel p^*E über E. Wir fassen die identische Abbildung auf E als $\mathbf{x} \in \Gamma(p^*E)$ auf und setzen $P^\nabla := \nabla^{p^*E}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; p^*E) = \Gamma(T^*E \otimes p^*E)$. Für jeden Schnitt $s \in \Gamma(E)$ gilt

$$\nabla s = s^*(P^\nabla) \in \Omega^1(M; E) = \Omega^1(E; s^*p^*E), \tag{II.6}$$

denn $s^*P^\nabla = s^*\nabla^{p^*E}\mathbf{x} = \nabla^{s^*p^*E}s^*\mathbf{x} = \nabla s$, da ja $s^*p^*E = (p \circ s)^*E = \mathrm{id}_M^* E = E$, $s^*p^*\nabla = (p \circ s)^*\nabla = \mathrm{id}_M^* \nabla = \nabla$ und $s^*\mathbf{x} = s$, siehe Proposition II.3.4 oben. Fassen wir P^∇ mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus $p^*E = VE$, siehe Beispiel II.1.12, als Vektorbündelhomomorphismus $P^\nabla : TE \to VE \subseteq TE$ auf, dann wird P^∇ als *vertikale Projektion* bezeichnet, es gilt

$$P^\nabla \circ P^\nabla = P^\nabla \quad \text{und} \quad \mathrm{img}(P^\nabla) = VE. \tag{II.7}$$

Bezeichnet nämlich $\iota : E_x \to E$ die Inklusion einer Faser, dann folgt $\iota^*p^*E = (p\circ\iota)^*E = c_x^*E = E_x \times E_x$ und $\iota^*p^*\nabla = (p\circ\iota)^*\nabla = c_x^*\nabla = d$, siehe Beispiel II.3.5, folglich $\iota^*P^\nabla = \iota^*\nabla^{p^*E}\mathbf{x} = \nabla^{\iota^*p^*E}\iota^*\mathbf{x} = d\,\mathrm{id}_{E_x} = \mathrm{id}_{\iota^*E}$. Dies zeigt $P^\nabla|_{VE} = \mathrm{id}_{VE}$ und damit (II.7). Nach Proposition II.1.19 bildet daher $H^\nabla := \ker(P^\nabla) \subseteq TE$ ein zu VE komplementäres Teilbündel, $VE \oplus H^\nabla = TE$, das sogenannte *horizontale Bündel.* Zudem liefert die Einschränkung der Tangentialabbildung der Projektion $Tp : TE \to TM$ einen Isomorphismus $Tp : H^\nabla \cong p^*TM$.

II.3.7. Beispiel. Bezeichnet $\nabla = d$ die triviale Konnexion auf dem trivialen Vektorbündel $E = M \times V$, dann gilt $H^\nabla = \ker(Tp_2)$, wobei $p_2 : E \to V$ die kanonische Projektion bezeichnet.

II.3.8. Beispiel. Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel E über M und $f : N \to M$ glatt. Weiters bezeichne $\tilde f : f^*E \to E$ den kanonischen Vektorbündelhomomorphismus über f. Für das horizontale Bündel des Pullback Bündels gilt dann $H^{f^*\nabla} = (T\tilde f)^{-1}(H^\nabla)$ und $P^{f^*\nabla} = \tilde f^*P^\nabla$.

II.3.9. Bemerkung. Der von einer linearen Konnexion ∇ auf E induzierte Isomorphismus $p^*TM \cong H^\nabla$ erlaubt es Vektorfelder auf der Basis $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu Vektorfeldern $\tilde X := p^*X \in \Gamma(p^*TM) \cong \Gamma(H^\nabla) \subseteq \mathfrak{X}(E)$ am Totalraum zu liften. Dieses Vektorfeld $\tilde X \in \mathfrak{X}(E)$ wird als *horizontaler Lift* von X bezeichnet und ist durch seine Eigenschaften $Tp \circ \tilde X = X \circ p$ und $\tilde X(e) \in H^\nabla_e$, $e \in E$, eindeutig bestimmt. Der horizontale Lift ist i.A. nicht mit der Lie Klammer von Vektorfeldern verträglich, $\widetilde{[X,Y]} \neq [\tilde X, \tilde Y]$, wir werden dieses Phänomen in Abschnitt II.4 genauer untersuchen, siehe Proposition II.4.2 unten.

II.3.10. Bemerkung. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Unter einem *Schnitt von E längs c* verstehen wir eine glatte Kurve $s : I \to E$, sodass $p \circ s = c$. Äquivalent kann ein Schnitt längs c als Schnitt des Pullback Bündels c^*E aufgefasst werden. Die induzierte Konnexion auf c^*E erlaubt es daher Schnitte längs c kovariant abzuleiten, $\nabla^{c^*E}_{\partial_t} s$ ist ja wieder ein Schnitt längs c. Es ist üblich diese kovariante Ableitung mit $\nabla_{c'} s := \nabla^{c^*E}_{\partial_t} s$ zu bezeichnen. Beachte jedoch, dass $\nabla_{c'} s$ keine kovariante Ableitung im ursprünglichen Sinn darstellt, denn s ist ja kein Schnitt von E. Der entscheidende Punkt ist, dass für $\tilde{s} \in \Gamma(E)$ der Ausdruck

$$\nabla_{c'(t)} \tilde{s} = (\tilde{s}^* P^\nabla)(c'(t)) = P^\nabla(T\tilde{s} \cdot c'(t)) = P^\nabla((\tilde{s} \circ c)'(t)) = ((\tilde{s} \circ c)^* P^\nabla)(\partial_t)$$

nur von dem Schnitt $s = \tilde{s} \circ c$ längs c abhängt. Ist $s : I \to E$ ein Schnitt längs $c : I \to M$ und gilt $c'(t_0) \neq 0$, dann existiert $\tilde{s} \in \Gamma(E)$, sodass $\tilde{s} \circ c = s$ lokal um t_0, und nach (II.5) also $\nabla^{c^*E}_{\partial_t} s = \nabla_{c'} \tilde{s}$, wobei auf der rechten Seite nun die ursprüngliche kovariante Ableitung der Ausdehnung $\tilde{s}$ steht. Diese ist daher unabhängig von der Ausdehnung und rechtfertigt die Schreibweise $\nabla_{c'} s = \nabla^{c^*E}_{\partial_t} s$.

Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und es bezeichne $H^\nabla \subseteq TE$ das entsprechende horizontale Teilbündel. Weiters sei $s : I \to E$ ein Schnitt längs $c = p \circ s : I \to M$. Die Kurve s wird *horizontal* genannt, falls $s'(t) \in H^\nabla_{s(t)}$ für alle $t \in I$ gilt. Nach Proposition II.3.4 ist dies genau dann der Fall wenn s, aufgefasst als Schnitt von c^*E parallel ist, dh. $\nabla^{c^*E} s = 0$ oder äquivalent $\nabla^{c^*E}_{\partial_t} s = 0$. Mit der Notation von oben bedeutet dies $\nabla_{c'} s = 0$, dh. s ist parallel längs c.

II.3.11. Satz (Paralleltransport)**.** *Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$. Weiters sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $c : I \to M$ eine glatte Kurve, $t_0 \in I$ und $e_0 \in E_{c(t_0)}$. Dann existiert eine eindeutige horizontale Kurve $s : I \to E$, sodass $p \circ s = c$ und $s(t_0) = e_0$. Diese Kurve s wird als* Paralleltransport von e_0 längs c *bezeichnet, wir schreiben dafür auch*

$$\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}, \qquad \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}(e_0) := s(t_1), \quad t_0, t_1 \in I.$$

Der Paralleltransport hat folgende Eigenschaften:

(a) $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}$ *ist ein linearer Isomorphismus, $t_0, t_1 \in I$.*
(b) $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_{E_{c(t_0)}}$, $t_0 \in I$.
(c) $\mathrm{pt}^c_{t_2,t_1} \circ \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{t_2,t_0}$, $t_0, t_1, t_2 \in I$.
(d) $\mathrm{pt}^{c\circ\rho}_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{\rho(t_1),\rho(t_0)} : E_{c(\rho(t_0))} \to E_{c(\rho(t_1))}$, *für jede glatte Abbildung zwischen Intervallen $\rho : J \to I$, $t_0, t_1 \in J$.*
(e) Der Paralleltransport hängt glatt von c ab, dh. ist $h : N \times I \to M$ glatt dann liefert der Paralleltransport einen Vektorbündelisomorphismus $h_0^*E \cong h^*E$,

$$(x, t, v) \mapsto \mathrm{pt}^{h(x,-)}_{t,t_0} v, \qquad (x, t) \in N \times I,\ v \in h_0^*E_{(x,t)} = E_{h_0(x)} \tag{II.8}$$

wobei $h_0 : N \times I \to M$, $h_0(x) := h(x, t_0)$.

Beweis. Um die Existenz und Eindeutigkeit von s zu zeigen betrachten wir zunächst das lokale Problem. Sei also $E|_U \cong U \times V$ eine Vektorbündelkarte und $J \subseteq I$ ein Teilintervall mit $c(J) \subseteq U$. Nach Proposition II.3.3 existiert

$A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(V))$, sodass $\nabla^{E|_U} = d + A$. Fassen wir $s \in C^\infty(J, V)$ als Schnitt längs $c|_J : J \to U$ auf, so ist dieser genau dann horizontal, wenn

$$s'(t) + A(c'(t))s(t) = 0. \tag{II.9}$$

Dies ist eine gewöhnliche (nicht autonome) lineare Differentialgleichung erster Ordnung für s. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf besitzt diese Gleichung auf ganz J definierte eindeutige Lösungen zu jedem Anfangswert $s(t_0) = e_0$, $t_0 \in J$. Wegen der Eindeutigkeit folgt nun leicht, dass sich diese lokalen Lösungen zu einem globalen horizontalen Schnitt $s : I \to E$ längs c zusammenfügen lassen, $\nabla^{c^*E}_{\partial_t} s = \nabla_{c'} s = 0$, $p \circ s = c$, $s(t_0) = e_0$. Die Eigenschaft (b) ist trivialerweise erfüllt. Auch (c) folgt sofort aus der Eindeutigkeit des Paralleltransports. Daraus erhalten wir nun auch (a), denn $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_1} \circ \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{t_0,t_0,} = \mathrm{id}_{E_{c(t_0)}}$, also ist $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_1}$ inverse zu $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}$. Beachte auch, dass die Lösung s linear vom Anfangswert e_0 abhängt, denn aus $\nabla_{c'} s_1 = 0 = \nabla_{c'} s_2$ folgt $\nabla_{c'}(s_1 + s_2) = \nabla_{c'} s_1 + \nabla_{c'} s_2 = 0 + 0 = 0$. Behauptung (d) folgt aus (II.5), denn mit $\nabla^{c^*E} s = 0$ gilt aufgrund dieser Relation auch $\nabla^{(c\circ\rho)^*E}(s \circ \rho) = \nabla^{\rho^* c^* E} \rho^* s = \rho^* \nabla^{c^*E} s = \rho^* 0 = 0$, also ist $s \circ \rho$ der Paralleltransport längs $c \circ \rho$. Um (e) einzusehen, erinnern wir uns daran, dass die Lösungen der Differentialgleichung (II.9) glatt von den Koeffizienten $A(c'(t))$ und der Anfangsbedingung abhängen, und daher (II.8) ein glatter Vektorbündelhomomorphismus ist. Nach (a) ist dieser faserweise bijektiv, also ein Isomorphismus, siehe Proposition II.1.5. □

II.3.12. Bemerkung. Sind c_1 und c_2 zwei glatte Kurven von $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ nach $c_1(t_1) = c_2(t_1)$, dann wird der Paralleltransport längs c_1 i.A. vom Paralleltransport längs c_2 verschieden sein, $\mathrm{pt}^{c_1}_{t_1,t_0} \neq \mathrm{pt}^{c_2}_{t_1,t_0}$. Wir werden dieses Phänomen in Abschnitt II.4 genauer untersuchen, siehe Satz II.4.6 unten.

II.3.13. Korollar. *Ist E ein Vektorbündel über M und sind $f \simeq g : N \to M$ zwei homotope glatte Abbildungen, dann gilt $f^*E \cong g^*E$.*

Beweis. Wähle eine lineare Konnexion auf E, siehe Proposition II.3.3. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $h : N \times I \to M$ mit $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$, $x \in N$. Nach Satz II.3.11(e) liefert der Paralleltransport einen Isomorphismus $h^*E \cong h_0^*E$, wobei $h_0 : N \times I \to M$, $h_0(x, t) := h(x, 0)$. Bezeichnen nun $\iota_0, \iota_1 : N \to N \times I$ die beiden Inklusionen $\iota_0(x) := (x, 0)$ und $\iota_1(x) := (x, 1)$, so folgt $g^*E = (h \circ \iota_1)^*E = \iota_1^* h^* E \cong \iota_1^* h_0^* E = (h_0 \circ \iota_1)^* E = f^*E$, denn offensichtlich gilt $h \circ \iota_1 = g$ und $h_0 \circ \iota_1 = f$. □

II.3.14. Korollar. *Über kontrahierbaren Mannigfaltigkeiten ist jedes Vektoründel trivilisierbar und insbesondere orientierbar.*

Beweis. Für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten M ist die identische Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung, $\mathrm{id}_M \simeq c_{x_0}$, $x_0 \in M$. Für jedes Vektorbündel E über M erhalten wir mittels Korollar II.3.13 einen Isomorphismus $E = \mathrm{id}_M^* E \cong c_{x_0}^* E$. Da $c_{x_0}^* E = M \times E_{x_0}$ trivialisierbar ist, siehe Beispiel II.3.5, folgt die Behauptung. □

II.3.15. Bemerkung. Es sei $s \in \Gamma(E)$, $x \in M$ und $X \in T_xM$. Weiters sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Dann gilt

$$\nabla_X s = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}\big(\mathrm{pt}^c_{0,t}(s(c(t))) - s(x)\big),$$

siehe Aufgabe 42. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{1}{t}(s(c(t)) - s(x)$ keinen Sinn macht, denn $s(c(t)) \in E_{c(t)}$ und $s(x) \in E_x$ liegen in verschiedenen Vektorräumen.

Sind E und F zwei Vektorbündel über M mit linearen Konnexionen ∇^E und ∇^F, so erhalten wir eine *induzierte Konnexion* auf $E \oplus F$,

$$\nabla^{E\oplus F}_X(s \oplus t) := \nabla^E_X s \oplus \nabla^F_X t$$

wobei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$, $t \in \Gamma(F)$ und $s \oplus t \in \Gamma(E) \oplus \Gamma(F) = \Gamma(E \oplus F)$.

Ebenso erhalten wir eine induzierte Konnexion auf $\hom(E, F)$,

$$(\nabla^{\hom(E,F)}_X \phi)(s) = \nabla^F_X(\phi(s)) - \phi(\nabla^E_X s), \tag{II.10}$$

wobei $\phi \in \Gamma(\hom(E, F)) = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$. Beachte dazu, dass die rechte Seite $C^\infty(M)$-linear in den Variablen s und X ist, dh. $\nabla^{\hom(E,F)}\phi \in \Gamma(T^*M \otimes \hom(E, F))$, und auch die Leibniz Regel gilt, $\nabla^{\hom(E,F)}(f\phi) = f\nabla^{\hom(E,F)}\phi + df \otimes \phi$, $f \in C^\infty(M)$.

Insbesondere erhalten wir auf dem dualen Bündel $E' = \hom(E, \xi^1)$ eine lineare Konnexion $\nabla^{E'}$, sodass

$$(\nabla^{E'}_X \sigma)(s) = X \cdot (\sigma(s)) - \sigma(\nabla^E_X s), \tag{II.11}$$

wobei $\sigma \in \Gamma(E') = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), C^\infty(M))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$.

Mit Hilfe der kanonischen Indentifikation $E \otimes F = E'' \otimes F = \hom(E', F)$ erhalten wir auch eine induzierte Konnexion $\nabla^{E\otimes F}$ auf dem Vektorbündel $E \otimes F$. Dies ist die eindeutige lineare Konnexion auf $E \otimes F$, sodass

$$\nabla^{E\otimes F}_X(s \otimes t) = (\nabla^E_X s) \otimes t + s \otimes \nabla^F_X t, \tag{II.12}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ und $t \in \Gamma(F)$, denn für $\sigma \in \Gamma(E')$ gilt nach Definition der Konnexion auf $\hom(E', F)$, siehe (II.10) und (II.11),

$$\begin{aligned}
\big(\nabla^{E\otimes F}_X(s \otimes t)\big)(\sigma) &= \nabla^F_X((s \otimes t)(\sigma)) - (s \otimes t)(\nabla^{E'}_X \sigma) \\
&= \nabla^F_X(\sigma(s)t) - (\nabla^{E'}_X \sigma)(s)t \\
&= \sigma(s)\nabla^F_X t + (X \cdot \sigma(s))t - \big((X \cdot \sigma(s)) - \sigma(\nabla^E_X s)\big)t \\
&= \sigma(s)\nabla^F_X t + \sigma(\nabla^E_X s)t = \big((\nabla^E_X s) \otimes t + s \otimes \nabla^F_X t\big)(\sigma).
\end{aligned}$$

Beachte auch

$$X \cdot \mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\nabla^{\mathrm{end}(E)}_X \phi), \tag{II.13}$$

für $\phi \in \Gamma(\mathrm{end}(E))$, und

$$\nabla^{\hom(E,G)}_X(\psi\phi) = (\nabla^{\hom(F,G)}_X \psi)\phi + \psi(\nabla^{\hom(E,F)}_X \phi), \tag{II.14}$$

für alle $\phi \in \Gamma(\hom(E, F))$ und $\psi \in \Gamma(\mathrm{end}(F, G))$.

Insbesondere erhalten wir eine induzierte Konnexion auf $\otimes^l_k E$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X^{\otimes^l_k E}\phi)(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l) = X\cdot\big(\phi(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l)\big)\\ -\sum_{i=1}^k \phi(s_1,\dots,\nabla^E_X s_i,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l)\\ -\sum_{j=1}^l \phi(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\nabla^{E'}_X\sigma_j,\dots,\sigma_l)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\otimes^l_k E}&\big(\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\big)\\ &= \sum_{i=1}^k \sigma_1\otimes\cdots\otimes(\nabla^{E'}_X\sigma_i)\otimes\ldots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\\ &\quad+\sum_{j=1}^l \sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes(\nabla^E_X s_j)\otimes\cdots\otimes s_l\end{aligned}$$

wobei $s_i\in\Gamma(E)$ und $\sigma_j\in\Gamma(E')$, siehe auch (II.11). Bezeichnet $\operatorname{tr}_i^j:\otimes^l_k E\to\otimes E^{l-1}_{k-1}$ die kanonische Kontraktion des i-ten mit dem $(k+j)$-ten Faktor,

$$\operatorname{tr}_i^j\big(\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\big)=\sigma_i(s_j)\sigma_1\otimes\cdots\hat{i}\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\hat{j}\cdots\otimes s_l,$$

dann gilt

$$\operatorname{tr}_i^j(\nabla_X^{\otimes^l_k E}\phi)=\nabla_X^{\otimes^{l-1}_{k-1}E}(\operatorname{tr}_i^j(\phi)),\tag{II.15}$$

dh. tr_i^j ist parallel. Jede Permutation $\pi\in\mathfrak{S}_l$ liefert einen Vektorbündelisomorphismus $\psi_\pi:\otimes^l E\to\otimes^l E$, $\psi_\pi(s_1\otimes\cdots\otimes s_l)=s_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes s_{\pi(l)}$, für den offensichtlich

$$\psi_\pi(\nabla_X^{\otimes^l E}\phi)=\nabla_X^{\otimes^l E}(\psi_\pi(\phi)),\tag{II.16}$$

gilt, dh. jedes ψ_π ist parallel. Daraus folgt auch

$$\operatorname{alt}(\nabla_X^{\otimes^l E}\phi)=\nabla_X^{\otimes^l E}(\operatorname{alt}(\phi))\quad\text{und}\quad\operatorname{sym}(\nabla_X^{\otimes^l E}\phi)=\nabla_X^{\otimes^l E}(\operatorname{sym}(\phi)),\tag{II.17}$$

siehe Abschnitt II.1. Die kovariante Ableitung eines Schnitts $\phi\in\Gamma(\Lambda^l E)\subseteq\Gamma(\otimes^l E)$ hat daher wieder Werte in $\Lambda^l E$, dh. $\nabla_X\phi\in\Gamma(\Lambda^l E)\subseteq\Gamma(\otimes^l E)$. Wir erhalten so eine kovariante Ableitung auf $\Lambda^l E$, und analog eine auf $S^l E$. Beachte, dass auch der vom Hack Produkt induzierte Vektorbündelhomomorphismus $\Lambda^p E\otimes\Lambda^q E\to\Lambda^{p+q}E$ parallel ist, dh.

$$\nabla_X^{\Lambda^{p+q}E}(\sigma\wedge\tau)=(\nabla_X^{\Lambda^p E}\sigma)\wedge\tau+\sigma\wedge\nabla_X^{\Lambda^q E}\tau.\tag{II.18}$$

Aufgrund dieser Kompatibilitäten ist es üblich die induzierten Konnexionen auf $\otimes^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$ alle einfach wieder mit ∇ zu bezeichnen.

II.3.16. Bemerkung. Es sei $E \to M$ ein Vektorbündel, ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen und $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ der duale lokale Korahmen, $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$, siehe Bemerkung II.1.30. Für die kovarianten Ableitungen der s_i gilt dann

$$\nabla_X s_i = \sum_{j=1}^k \omega_i^j(X) s_j,$$

wobei $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$, $\omega_i^j(X) = \sigma^j(\nabla_X s_i)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$. Ist $t \in \Gamma(E|_U)$, dann gilt $t = \sum_{i=1}^k t^i s_i$ mit $t^i = \sigma^i(t) \in C^\infty(U)$, und daher $\nabla_X t = \sum_{i=1}^k (\nabla_X t)^i s_i$ mit

$$(\nabla_X t)^i = \sigma^i(\nabla_X t) = X \cdot t^i + \sum_{j=1}^k \omega_j^i(X) t^j.$$

Sind einmal die sogenannten *Konnexionsformen* ω_j^i bestimmt, dann können wir also leicht beliebige Schnitte kovariant ableiten. Fassen wir die Komponenten $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^k)^t$ und $\nabla \mathbf{t} = ((\nabla t)^1, \dots, (\nabla t)^k)^t$ als Spaltenvektoren mit Eintragungen in $C^\infty(U)$ bzw. $\Omega^1(U)$ auf, und betrachten wir $\mathbf{w} = (\omega_j^i)$ als $(k \times k)$-Matrix mit Eintragungen in $\Omega^1(U)$, dann lässt sich obige Relation kurz als

$$\nabla_X \mathbf{t} = X \cdot \mathbf{t} + \mathbf{w}(X)\mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \nabla \mathbf{t} = d\,\mathbf{t} + \mathbf{w}\,\mathbf{t} \tag{II.19}$$

schreiben, $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Ist $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k \in \Gamma(E|_U)$ ein weiterer lokaler Rahmen und $\mathbf{h} = (h_i^j)$ die Matrix zum Rahmenwechsel, $s_i = \sum_{j=1}^k h_i^j \tilde{s}_j$, siehe Bemerkung II.1.30, dann folgt

$$\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k h_l^j \omega_i^l(X) \tilde{s}_j = \sum_{l=1}^k \omega_i^l(X) s_l = \nabla_X s_i = \sum_{j=1}^k \Big(X \cdot h_i^j + \sum_{l=1}^k \tilde{\omega}_l^j(X) h_i^l \Big) \tilde{s}_j,$$

wobei $\tilde{\omega}_i^j(X) = \tilde{\sigma}^j(\nabla_X \tilde{s}_i)$ die Konnexionsformen bezüglich des Rahmens $\tilde{s}_i$ bezeichnen, $\nabla_X \tilde{s}_i = \sum_{j=1}^k \tilde{\omega}_i^j(X) \tilde{s}_j$. Es gilt daher

$$\sum_{l=1}^k h_l^j \omega_i^l = dh_i^j + \sum_{l=1}^k \tilde{\omega}_l^j h_i^l,$$

bzw. mittels Matrizenschreibweise $\mathbf{h}\mathbf{w} = d\,\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{h}$ oder äquivalent

$$\mathbf{w} = \mathbf{h}^{-1} d\,\mathbf{h} + \mathbf{h}^{-1}\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{h}, \tag{II.20}$$

wobei $\mathbf{h}^{-1}$ die zu $\mathbf{h}$ inverse Matrix bezeichnet.

II.4. Krümmung. Sind E und F zwei Vektorbündel über M so induziert der Vektorbündelhomomorphismus

$$(\Lambda^p T^*M \otimes E) \otimes (\Lambda^q T^*M \otimes F) \xrightarrow{\wedge \otimes \mathrm{id}} \Lambda^{p+q} T^*M \otimes (E \otimes F)$$

ein $C^\infty(M)$-bilineares Hack Produkt

$$\Omega^p(M; E) \times \Omega^q(M; F) \xrightarrow{\triangle} \Omega^{p+q}(M; E \otimes F). \tag{II.21}$$

Explizit ist dies durch folgende Formel gegeben, vgl. [**3**, Abschnitt 4.3],

$$(\sigma \wedge \tau)(X_1, \dots, X_{p+q}) \\ = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \sigma(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \otimes \tau(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})$$

wobei $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Omega^p(M; E)$ und $\tau \in \Omega^q(M; F)$. Beachte, dass (II.21) assotiativ ist, dh. $(\phi \wedge \psi) \wedge \rho = \phi \wedge (\psi \wedge \rho)$ bis auf die kanonische Identifikation $\Omega^{p+q+r}(M; (E \otimes F) \otimes G) = \Omega^{p+q+r}(M; E \otimes (F \otimes G))$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M; E) := \bigoplus_q \Omega^q(M; E)$ zu einem graduierten Modul über $\Omega^*(M)$, denn $\Omega^*(M) = \Omega^*(M; \xi^1)$ und $\xi^1 \otimes E = E$. Zudem erhalten wir eine $C^\infty(M)$-bilineare Multiplikation

$$\Omega^p(M; \hom(F, G)) \times \Omega^q(M; \hom(E, F)) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(E, G)), \tag{II.22}$$

indem wir (II.21),

$$\Omega^p(M; \hom(F, G)) \otimes \Omega^q(M; \hom(E, F)) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(F, G) \otimes \hom(E, G)),$$

noch mit der faserweisen Komposition $\hom(F, G) \otimes \hom(E, F) \to \hom(E, G)$ zusammensetzen. Explizit gilt

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{p+q}) \\ = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \phi(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})\big(\psi(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})(s)\big)$$

wobei $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Omega^p(M; \hom(F, G))$, $\psi \in \Omega^q(M; \hom(E, F))$ und $s \in \Gamma(E)$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M; \operatorname{end}(E))$ zu einer assotiativen i.A. jedoch *nicht* (graduiert) kommutativen Algebra. Beachte auch, dass der Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{tr} : \operatorname{end}(E) \to \xi^1$ eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung

$$\operatorname{tr} : \Omega^q(M; \operatorname{end}(E)) \to \Omega^q(M) \tag{II.23}$$

induziert, $(\operatorname{tr} \phi)(X_1, \dots, X_q) = \operatorname{tr}(\phi(X_1, \dots, X_q))$, für die

$$\operatorname{tr}(\phi \wedge \psi) = (-1)^{pq} \operatorname{tr}(\psi \wedge \phi) \tag{II.24}$$

gilt, wobei $\phi \in \Omega^p(M; \operatorname{end}(E))$ und $\psi \in \Omega^q(M; \operatorname{end}(E))$. Schließlich haben wir eine $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung

$$\Omega^p(M; \hom(E, F)) \times \Omega^q(M; E) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; F), \tag{II.25}$$

wobei wir (II.21), $\Omega^p(M; \hom(E, F)) \times \Omega^q(M; E) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(E, F) \otimes E)$, noch mit der faserweisen Evaluation $\hom(E, F) \otimes E \to F$ zusammensetzen, dh.

$$(\phi \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{p+q}) \\ = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \phi(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})\big(\sigma(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})\big),$$

$X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Omega^p(M; \hom(E,F))$ und $\sigma \in \Omega^q(M;E)$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M;E)$ ein Modul über der Algebra $\Omega^*(M; \operatorname{end}(E))$,

II.4.1. Proposition. *Jede lineare Konnexion auf E,*

$$\Omega^0(M;E) = \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(M;E),$$

lässt sich auf eindeutige Weise zu einem linearen Operator

$$d^\nabla : \Omega^q(M;E) \to \Omega^{q+1}(M;E)$$

ausdehnen, sodass die graduierte Leibniz Regel

$$d^\nabla(\alpha \wedge \sigma) = d\alpha \wedge \sigma + (-1)^p \alpha \wedge d^\nabla \sigma \tag{II.26}$$

für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M;E)$ gilt. Für $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ haben wir weiters

$$\begin{aligned}(d^\nabla \sigma)(X_0, \dots, X_q) = &\sum_i (-1)^i \nabla_{X_i}(\sigma(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_q)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, X_q).\end{aligned} \tag{II.27}$$

Diese Ausdehnung d^∇ hat folgende Eigenschaften, $\sigma \in \Omega^*(M;E)$, $\tau \in \Omega^*(M;F)$, $\phi \in \Omega^*(M; \hom(E,F))$ und $\psi \in \Omega^*(M; \hom(F,G))$:

(a) $d^{\nabla + A}\sigma = d^\nabla \sigma + A \wedge \sigma$, für alle $A \in \Omega^1(M; \operatorname{end}(E))$.
(b) $d^{f^*\nabla}(f^*\sigma) = f^*(d^\nabla \sigma)$, für alle glatten $f : N \to M$.
(c) $d^{\nabla^{E \oplus F}}(\sigma \oplus \tau) = d^{\nabla^E}\sigma \oplus d^{\nabla^F}\tau$.
(d) $d^{\nabla^{E \otimes F}}(\sigma \wedge \tau) = d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau$, siehe (II.21)*.*
(e) $d \operatorname{tr}(\phi) = \operatorname{tr}(d^{\nabla^{\operatorname{end}(E)}}\phi)$, siehe (II.23)*.*
(f) $d^{\nabla^F}(\phi \wedge \sigma) = (d^{\nabla^{\hom(E,F)}}\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge d^{\nabla^E}\sigma$, siehe (II.25)*.*
(g) $d^{\nabla^{\hom(E,G)}}(\psi \wedge \phi) = (d^{\nabla^{\hom(F,G)}}\psi) \wedge \phi + (-1)^{|\psi|}\psi \wedge d^{\nabla^{\hom(E,F)}}\phi$, siehe (II.22)*.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sei also $\tilde{d}^\nabla$ eine weitere lineare Ausdehnung von ∇ die auch der Leibniz Regel (II.26) genügt. Die Differenz $\tilde{d}^\nabla - d^\nabla$ verschwindet dann auf $\Omega^0(M;E)$. Aufgrund der Leibniz Regeln gilt darüberhinaus $(\tilde{d}^\nabla - d^\nabla)(\alpha \wedge \sigma) = (-1)^p \alpha \wedge (\tilde{d}^\nabla - d^\nabla)(\sigma)$, für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M;E)$. Da sich jedes Element aus $\Omega^q(M;E)$ lokal als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha \wedge \sigma$, $\alpha \in \Omega^q(M)$, $\sigma \in \Omega^0(M;E)$, schreiben lässt folgt nun aus der Linearität $\tilde{d}^\nabla - d^\nabla = 0$, es kann daher höchstens eine solche Ausdehnung d^∇ geben.

Nun zur Existenz der Ausdehnung. Eine einfache Rechnung, vgl. [**3**, Abschnitt 4.4], zeigt, dass die rechte Seite von (II.27) in den Vektorfeldern X_i alternierend und $C^\infty(M)$-multilinear ist. Diese Formel definiert daher einen linearen Operator $d^\nabla : \Omega^q(M;E) \to \Omega^{q+1}(M;E)$. Offensichtlich stimmt $d^\nabla : \Omega^0(M;E) \to$

$\Omega^1(M;E)$ mit ∇ überein. Für $f \in C^\infty(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M;E)$ folgt

$$\begin{aligned}\big(d^\nabla(f\sigma) - f d^\nabla\sigma\big)(X_0,\dots,X_q) &= \sum_i (-1)^i df(X_i)\sigma(X_0,\dots,\hat{i},\dots,X_q)\\ &= (df \wedge \sigma)(X_0,\dots,X_q),\end{aligned}$$

dh. (II.26) gilt für $\alpha \in \Omega^0(M)$. Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass (II.26) auch für $\alpha \in \Omega^1(M)$ gültig ist. Der allgemeine Fall folgt nun daraus, dass sich jedes Element aus $\Omega^q(M;E)$ lokal als endlich Summe von Schnitten der Form $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q \wedge \sigma$ schreiben lässt, wobei $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ und $\sigma \in \Omega^0(M;E)$.

Aus (II.27) erhalten wir sofort (a), denn

$$\begin{aligned}\big(d^{\nabla+A}\sigma - d^\nabla\sigma\big)(X_0,\dots,X_k) &= \sum_i (-1)^i A(X_i)\sigma(X_0,\dots,\hat{i},\dots,X_k)\\ &= (A \wedge \sigma)(X_0,\dots,X_k).\end{aligned}$$

Behauptung (b) ist für 0-Formen $\sigma \in \Omega^0(M;E)$ richtig, siehe (II.5). Aus der Leinbiz Regel folgt weiters

$$d^{f^*\nabla}(f^*(\alpha\wedge\sigma)) - f^*(d^\nabla(\alpha\wedge\sigma)) = (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \Big(d^{f^*\nabla}(f^*\sigma) - f^*(d^\nabla\sigma)\Big)$$

und damit der allgemeine Fall von (b), denn lokal lässt sich jedes Element von $\Omega^q(M;E)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha\wedge\sigma$ schreiben, wobei $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\sigma \in \Omega^0(M;E)$. Behauptung (c) ist trivial. Um (d) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass diese Relation für $\sigma \in \Omega^0(M;E)$ richtig ist, siehe (II.12). Weiters haben wir aufgrund der Leibniz Regeln

$$\begin{aligned}&d^{\nabla^{E\otimes F}}\big((\alpha\wedge\sigma)\wedge(\beta\wedge\tau)\big) - d^{\nabla^E}(\alpha\wedge\sigma)\wedge(\beta\wedge\tau) - (-1)^{|\alpha\wedge\sigma|}(\alpha\wedge\sigma)\wedge d^{\nabla^F}(\beta\wedge\tau)\\ &\quad= (-1)^{|\alpha|+|\beta|+|\sigma||\beta|}\alpha\wedge\beta\wedge\Big(d^{\nabla^{E\otimes F}}(\sigma\wedge\tau) - d^{\nabla^E}\sigma\wedge\tau - (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge d^{\nabla^F}\tau\Big).\end{aligned}$$

Da sich lokal jedes Element aus $\Omega^*(M;E)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha\wedge\sigma$, schreiben lässt, $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\sigma \in \Omega^0(M;E)$, folgt nun (d). Auch (e) ist für $\phi \in \Omega^0(M;\mathrm{end}(E))$ gültig, siehe (II.13). Wegen der Leibnizregeln gilt weiters

$$d\,\mathrm{tr}(\alpha\wedge\phi) - \mathrm{tr}(d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}(\alpha\wedge\phi)) = (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\Big(d\,\mathrm{tr}(\phi) - \mathrm{tr}(d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}\phi)\Big)$$

woraus nun wie oben (e) folgt. Die Behauptungen (f) und (g) lassen sich analog zeigen, für 0-Formen sind dies gerade die Relationen (II.10) bzw. (II.14). □

II.4.2. Proposition. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E. Dann existiert genau eine Form $R^\nabla \in \Omega^2(M;\mathrm{end}(E))$, sodass*

$$d^\nabla d^\nabla\sigma = R^\nabla\wedge\sigma, \qquad \sigma\in\Omega^*(M;E), \tag{II.28}$$

wobei auf der rechten Seite das Hack Produkt aus (II.25) *gemeint ist. Diese Form* R^∇ *wird die* Krümmung *von* ∇ *genannt, und ist durch*

$$R^\nabla_{X,Y}s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ s \in \Gamma(E), \tag{II.29}$$

eindeutig bestimmt. Die Krümmung hat darüber hinaus folgende Eigenschaften:

(a) $d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}} R^\nabla = 0 \in \Omega^3(M; \mathrm{end}(E))$. *(Biancchi Identität)*
(b) $R^{f^*\nabla} = f^*R^\nabla \in \Omega^2(N; \mathrm{end}(f^*E)) = \Omega^2(N; f^*\mathrm{end}(E))$ *für* $f : N \to M$ *glatt.*
(c) $R^{\nabla+A} = R^\nabla + d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}A + A \wedge A$ *für alle* $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$.
(d) $R^{\nabla^{E\oplus F}} = R^{\nabla^E} \oplus R^{\nabla^F} \in \Omega^2(M; \mathrm{end}(E) \oplus \mathrm{end}(F)) \subseteq \Omega^2(M; \mathrm{end}(E \oplus F))$.
(e) $R^{\nabla^{E\otimes F}} = R^{\nabla^E} \otimes \mathrm{id}_F + \mathrm{id}_E \otimes R^{\nabla^F}$.

Beweis. Aus der Leibniz Regel (II.26) folgt für $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M; E)$

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla(\alpha \wedge \sigma) &= d^\nabla\big(d\alpha \wedge \sigma + (-1)^p\alpha \wedge d^\nabla\sigma\big) \\ &= dd\alpha \wedge \sigma + (-1)^{p+1}d\alpha \wedge d^\nabla\sigma + (-1)^p d\alpha \wedge d^\nabla\sigma + (-1)^p(-1)^p\alpha \wedge d^\nabla d^\nabla\sigma \\ &= \alpha \wedge d^\nabla d^\nabla\sigma. \end{aligned} \tag{II.30}$$

Insbesondere ist $d^\nabla d^\nabla : \Omega^0(M; E) \to \Omega^2(M; E)$ tensoriell, dh. $C^\infty(M)$-linear. Es existiert daher eine eindeutige Form $R^\nabla \in \Omega^2(M; \mathrm{end}(E))$, sodass

$$(d^\nabla d^\nabla s)(X, Y) = R^\nabla_{X,Y}s, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M; E). \tag{II.31}$$

Nach (II.27) ist dies zu (II.29) äquivalent. Zusammen mit (II.30) folgt nun auch (II.28). Nach Proposition II.4.1(f) und (II.28) gilt für alle $\sigma \in \Omega^*(M; E)$,

$$(d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}R^\nabla) \wedge \sigma = d^\nabla(R^\nabla \wedge \sigma) - R^\nabla \wedge d^\nabla\sigma = d^\nabla(d^\nabla d^\nabla\sigma) - d^\nabla d^\nabla(d^\nabla\sigma) = 0,$$

woraus sofort (a) folgt. Aus Proposition II.4.1(b) und (II.28) erhalten wir

$$d^{\nabla^{f^*E}}d^{\nabla^{f^*E}}(f^*\sigma) = d^{\nabla^{f^*E}}(f^*d^\nabla\sigma) = f^*d^\nabla d^\nabla\sigma = f^*(R \wedge \sigma) = f^*R^\nabla \wedge f^*\sigma$$

und somit (b). Behauptung (c) folgt aus Proposition II.4.1(a)&(f), denn

$$\begin{aligned} d^{\nabla+A}d^{\nabla+A}\sigma &= d^\nabla(d^\nabla\sigma + A \wedge \sigma) + A \wedge (d^\nabla\sigma + A \wedge \sigma) \\ &= d^\nabla d^\nabla\sigma + d^\nabla(A \wedge \sigma) - (-1)^1 A \wedge d^\nabla\sigma + (A \wedge A) \wedge \sigma \\ &= (R^\nabla + d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}A + A \wedge A) \wedge \sigma. \end{aligned}$$

Behauptung (d) ist trivial, sie folgt sofort aus Proposition II.4.1(c). Schließlich erhalten wir mittels Proposition II.4.1(d), $\sigma \in \Omega^*(M; E)$, $\tau \in \Omega^*(M; F)$,

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{E\otimes F}}d^{\nabla^{E\otimes F}}(\sigma \wedge \tau) &= d^{\nabla^E}d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|}d^{\nabla^E}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau \\ &\qquad + (-1)^{|d^{\nabla^E}\sigma|}d^{\nabla^E}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau + (-1)^{|\sigma|}(-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge d^{\nabla^F}d^{\nabla^F}\tau \\ &= d^{\nabla^E}d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + \sigma \wedge d^{\nabla^F}d^{\nabla^F}\tau \\ &= R^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + \sigma \wedge R^{\nabla^F}\tau = \big(R^{\nabla^E} \otimes \mathrm{id}_F + \mathrm{id}_E \otimes R^{\nabla^F}\big)(\sigma \wedge \tau) \end{aligned}$$

und somit (e), denn lokal lässt sich jedes Element in $\Omega^*(M; E \otimes F)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\sigma \wedge \tau$ wie oben schreiben. $\square$

II.4.3. Proposition. *Die Krümmung misst, wie weit der horizontale Lift aus Bemerkung II.3.9, $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(E)$, $X \mapsto \tilde{X}$, davon abweicht ein Lie Algebra Homomorphismus zu sein,*

$$R_{X,Y}e = \big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big)(e) \in V_eE = E_x, \tag{II.32}$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $e \in E_x$, $x \in M$.

Beweis. Es bezeichne $\tilde{\nabla} := p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf dem Vektorbündel p^*E über E. Wir erinnern uns an die vertikale Projektion $P = \tilde{\nabla}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; p^*E) = \Omega^1(M; VE)$, wobei $\mathbf{x} \in \Gamma(p^*E)$ die identische Abbildung bezeichnet. Mit Proposition II.4.2(b) folgt $d^{\tilde{\nabla}}P = d^{\tilde{\nabla}}d^{\tilde{\nabla}}\mathbf{x} = R^{\tilde{\nabla}}\mathbf{x} = (p^*R)\mathbf{x}$ und daher

$$P\big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big) = (d^{\tilde{\nabla}}P)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = p^*(R_{X,Y})\mathbf{x}, \tag{II.33}$$

denn $P(\widetilde{[X,Y]}) = 0$ und $P(\tilde{X}) = 0 = P(\tilde{Y})$, siehe auch (II.27). Beachte weiters

$$Tp\big(\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\big) = 0, \tag{II.34}$$

denn $p \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} = \mathrm{Fl}_t^X \circ p$, also $Tp \circ T\,\mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} = T\,\mathrm{Fl}_t^X \circ Tp$, somit

$$\begin{aligned} Tp \circ ((\mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}})^*\tilde{Y}) &= Tp \circ (T\,\mathrm{Fl}_{-t}^{\tilde{X}} \circ \tilde{Y} \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}}) \\ &= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Tp \circ \tilde{Y} \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} \\ &= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ p \circ \mathrm{Fl}_t^{\tilde{X}} \\ &= T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X \circ p = (\mathrm{Fl}_t^X)^*Y \circ p \end{aligned}$$

und Ableiten bei $t = 0$ gibt $Tp \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y] \circ p$, siehe [**3**, Abschnitt 2.15]. Aus (II.33) und (II.34) folgt

$$\widetilde{[X,Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = p^*(R_{X,Y})\mathbf{x}$$

und Auswerten bei $e \in E$ liefert dann (II.32). $\square$

II.4.4. Proposition. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E. Weiters sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Ursprungs, $h : U \to M$ eine glatte Abbildung, $z := h(0,0)$, $X := \frac{\partial}{\partial x}h(0,0) \in T_zM$ und $Y := \frac{\partial}{\partial y}h(0,0) \in T_zM$. Für hinreichend kleines $t > 0$ ist daher*

$$P_t : E_z \to E_z, \quad P_t := \mathrm{pt}_{0,t}^{h(0,-)} \circ \mathrm{pt}_{0,t}^{h(-,t)} \circ \mathrm{pt}_{t,0}^{h(t,-)} \circ \mathrm{pt}_{t,0}^{h(-,0)},$$

wohldefiniert und glatt in t. In dieser Situation gilt nun

$$P_0 = \mathrm{id}_{E_z}, \quad \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 P_t = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}|_0 P_t = R_{Y,X}.$$

Beweis. Durch Betrachten von h^*E und $h^*\nabla$ dürfen wir o.B.d.A. $M = U$ und $h = \mathrm{id}_U$ annehmen, siehe auch Proposition II.4.2(b). Durch Verkleinern von U dürfen wir weiters $E = U \times E_0$ annehmen, wobei E_0 die Faser über $0 = z$ bezeichnet. Die Konnexion lässt sich daher in der Form $\nabla = d + A$ schreiben, $A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(E_0))$. Trivilisieren wir E mittels Paralleltransport zuerst längst der y-Achse und dann längs Geraden parallel zur x-Achse, so können wir weiters $A(\frac{\partial}{\partial x}) = 0$ und $A(\frac{\partial}{\partial y})(0, y) = 0$ erreichen, dh. $\nabla = d + ady$ wobei $a := A(\frac{\partial}{\partial y}) \in C^\infty(U; \mathrm{end}(E_0))$ und $a(0, y) = 0$. Aus Proposition II.4.2(b) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
R(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}) &= (dA + A \wedge A)(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x} A(\tfrac{\partial}{\partial y}) - \tfrac{\partial}{\partial y} A(\tfrac{\partial}{\partial x}) - A([\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}]) + A(\tfrac{\partial}{\partial x}) A(\tfrac{\partial}{\partial y}) - A(\tfrac{\partial}{\partial y}) A(\tfrac{\partial}{\partial x}) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x} A(\tfrac{\partial}{\partial y}) = \tfrac{\partial}{\partial x} a
\end{aligned}
$$

und somit

$$
R_{X,Y} = \tfrac{\partial}{\partial x} a(0, 0). \tag{II.35}
$$

Sei nun $v_0 \in E_0$, und definiere $v \in C^\infty(U, E_z)$ durch $v(x, 0) = v_0$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} v = 0$, dh. $\frac{\partial}{\partial y} v + av = 0$. Es gilt daher

$$
P_t(v_0) = v(t, t). \tag{II.36}
$$

Da $v(x, 0) = v_0 = v(0, y)$ folgt $v(0, 0) = v_0$, $\frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} v(0, y) = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} v(0, y) = 0$, und aus $\frac{\partial}{\partial y} v(x, 0) + a(x, 0)v_0 = 0$ erhalten wir $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v(x, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} a(x, 0) v_0$. Zusammenfassend erhalten wir, siehe auch (II.35):

$$
\begin{array}{lll}
v(0,0) = v_0 & \tfrac{\partial}{\partial x} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial}{\partial y} v(0,0) = 0 \\
\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial^2}{\partial y^2} v(0,0) = 0 & \tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} v(0,0) = R_{Y,X} v_0
\end{array}
$$

Zusammen mit (II.36) ergibt sich

$$
P_0(v_0) = v_0, \quad \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 P_t(v_0) = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}|_0 P_t(v_0) = 2R_{Y,X} v_0,
$$

und somit die Behauptung der Proposition. □

II.4.5. Satz (Satz von Frobenius)**.** *Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $H \subseteq TM$ ein Teilbündel vom Rang k. In dieser Situation sind äquivalent:*

(a) H ist involutiv*, dh. für alle $X, Y \in \Gamma(H) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ gilt auch $[X, Y] \in \Gamma(H)$.*

(b) Um jeden Punkt in M existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k}$ einen Rahmen von $H|_U$ bildet.

In dieser Situation wird das Teilbündel integrabel *genannt. Durch jeden Punkt $x \in M$ existiert daher eine (lokale)* Integralmannigfaltigkeit *S maximaler Dimension, dh. $S \subseteq M$ ist eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, $x \in S$ und $TS = H|_S$, nämlich $S = \{u^i = \mathrm{const}, k < i\}$ bezüglich der Koordinaten in (b).*

Beweis. Die Implikation (b)⇒(a) ist offensichtlich. Bilden die Koordinatenvektorfeder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k}$ einen Rahmen von $H|_U$, und sind $X, Y \in \Gamma(H)$ zwei beliebige Schnitte, dann existieren $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$ mit $X|_U = X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y|_U = Y^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + Y^k \frac{\partial}{\partial u^k}$. Da die Koordinatenvektorfelder kommutieren folgt

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{k} X^i Y^j \underbrace{[\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}]}_{=0} + X^i \tfrac{\partial Y^j}{\partial u^i} \tfrac{\partial}{\partial u^j} - \tfrac{\partial X^i}{\partial u^j} Y^j \tfrac{\partial}{\partial u^i}$$

und somit $[X, Y]|_U \in \Gamma(H|_U)$. Für die umgekehrte Implikation (a)⇒(b) sei nun $x_0 \in M$ und $M \supseteq V \xrightarrow{v} \mathbb{R}^n$ eine Karte um x, sodass $\frac{\partial}{\partial v^1}(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial v^k}(x_0)$ eine Basis von H_{x_0} bilden. Durch Verkleinern von V können wir weiters erreichen, dass Funktionen $f_i^l \in C^\infty(V)$ existieren, sodass die Vektorfelder

$$X_i = \tfrac{\partial}{\partial v^i} + \sum_{l=k+1}^{n} f_i^l \tfrac{\partial}{\partial v^l}, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

tangential an H sind, dh. $X_i \in \Gamma(H|_V) \subseteq \mathfrak{X}(V)$. Die Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ bilden daher einen Rahmen von $H|_V$. Für ihre Lie Klammern folgt

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=k+1}^{n} \big(\tfrac{\partial}{\partial v^i} \cdot f_j^l - \tfrac{\partial}{\partial v^j} \cdot f_i^l\big) \tfrac{\partial}{\partial v^l} \tag{II.37}$$

Wegen der Involutivität von H ist auch $[X_i, X_j]$ tangential an H, also existieren Funktionen $h_{i,j}^p \in C^\infty(V)$, sodass

$$[X_i, X_j] = \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p X_p = \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p \tfrac{\partial}{\partial v^p} + \sum_{l=k+1}^{n} \sum_{p=1}^{k} h_{i,j}^p f_p^l \tfrac{\partial}{\partial v^l}.$$

Koeffizientenvergleich mit (II.37) liefert $h_{i,j}^p = 0$, also $[X_i, X_j] = 0$. Nach [**3**, Abschnitt 2.15] kommutieren daher die Flüsse dieser Vektorfelder, dh.

$$\mathrm{Fl}_t^{X_i}(\mathrm{Fl}_s^{X_j}(x)) = \mathrm{Fl}_s^{X_j}(\mathrm{Fl}_t^{X_i}(x)), \qquad 1 \leq i, j \leq k, \tag{II.38}$$

wenn immer beide Seiten definiert sind, $x \in V$, $t, s \in \mathbb{R}$. Für $k < i \leq n$ setzen wir $X_i := \frac{\partial}{\partial v^i}$. Betrachte nun die lokal um $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte glatte Abbildung

$$\mathbb{R}^n \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^n \xrightarrow{w} M, \qquad w(t_1, \dots, t_n) := (\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_n}^{X_n})(x_0).$$

Offensichtlich gilt $w(0) = x_0$ und die Tangentialabbildung $T_0 w$ ist ein linearer Isomorphismus. Durch Verkleinern von ε können wir also erreichen, dass w ein Diffeomorphismus auf sein Bild wird. Die Umkehrabbildung $u := w^{-1}$ bildet daher eine Karte von M. Für $|t_j| < \varepsilon$ gilt

$$\tfrac{\partial}{\partial u^1}(u^{-1}(t_1, \dots, t_n)) = X_1\big((\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_n}^{X_n})(x_0)\big),$$

also ist das Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial u^1}$ tangential an H. Aufgrund von (II.38) können wir w auch in der Form

$$w(t_1,\dots,t_n)=\big(\mathrm{Fl}^{X_i}_{t_i}\circ\mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1}\circ\cdots\circ\mathrm{Fl}^{X_{i-1}}_{t_{i-1}}\circ\mathrm{Fl}^{X_{i+1}}_{t_{i+1}}\circ\cdots\circ\mathrm{Fl}^{X_n}_{t_n}\big)(x_0)$$

schreiben und das obige Argument zeigt dann, dass auch $\frac{\partial}{\partial u^i}$ tangential an H ist, $1\leq i\leq k$. Also bilden $\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^k}$ einen lokalen Rahmen von H. □

II.4.6. Satz. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E mit Krümmung $R\in\Omega^2(M;\mathrm{end}(E))$ und horizontalem Bündel $H\subseteq TE$. In dieser Situation sind äquivalent:*

(a) $R=0$.
(b) $d^\nabla d^\nabla=0$.
(c) Der horizontale Lift $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(E)$, $X\mapsto\tilde X$, siehe Bemerkung (II.3.9), *ist ein Lie Algebra Homomorphsimus, dh. $\widetilde{[X,Y]}=[\tilde X,\tilde Y]$ für alle $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.*
(d) Das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ ist integrabel.
(e) Um jeden Punkt in M existiert ein lokaler Rahmen $s_1,\dots,s_k\in\Gamma(E|_U)$ paralleler Schnitte, $\nabla s_i=0$.
(f) Um jeden Punkt in M existiert eine Vektorbündelkarte $E|_U\cong U\times V$, sodass $\nabla^{E|_U}$ mit der trivialen Konnexion dieser Karte übereinstimmt, siehe Beispiel II.3.1.
(g) Der Paralleltransport $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}:E_{c(t_0)}\to E_{c(t_1)}$ hängt nur von der Homotopieklasse relativ Endpunkten der Kurve c ab, dh. ist $h:I\times[0,1]\to M$ glatt und $h(t_0,s)=x$, $h(t_1,s)=y$ für alle $s\in[0,1]$, dann gilt $\mathrm{pt}^{c_0}_{t_1,t_0}=\mathrm{pt}^{c_1}_{t_1,t_0}:E_x\to E_y$, wobei $c_0,c_1:I\to M$ die Kurven $c_0(t):=h(t,0)$ und $c_1(t):=h(t,1)$ bezeichnen.

Sind diese äquivalenten Eigenschaften erfüllt, dann wird ∇ flach *genannt.*

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt aus (II.31) und (II.28). Die Äquivalenz (a)⇔(c) folgt aus (II.32). Ist der horizontale Lift ein Lie Algebra Homomorphismus, dann ist das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ involutiv. Ist nämlich $X_1\dots,X_n\in\mathfrak{X}(U)$ ein lokaler Rahmen von TM, dann bilden $\tilde X_1,\dots,\tilde X_n\in\Gamma(H|_{p^{-1}(U)})$ einen Rahmen von $H|_{p^{-1}(U)}$ und für beliebige Schnitte $\xi=\xi^1\tilde X_1+\cdots+\xi^n\tilde X_n$, $\zeta=\zeta^1\tilde X_1+\cdots+\zeta^n\tilde X_n$ von $H|_{p^{-1}(U)}$, $\xi^i,\zeta^i\in C^\infty(p^{-1}(U))$, folgt, siehe [**3**, Abschnitt 2.14],

$$[\xi,\zeta]=\sum_{i,j=1}^k\xi^i\zeta^j[\tilde X_i,\tilde X_j]+\xi^i(\tilde X_i\cdot\zeta^j)\tilde X_j-(\tilde X_j\cdot\xi^i)\zeta^j\tilde X_i,$$

also hat auch $[\xi,\zeta]$ Werte im horizontalen Bündel. Die Implikation (c)⇒(d) folgt nun aus Satz II.4.5 oben.

Ist das horizontale Bündel $H\subseteq TE$ integrabel und $e\in E_x$, dann existiert eine Teilmannigfaltigkeit $S\subseteq E$ mit $e\in S$ und $TS=H|_S$. Die Einschränkung der Projektion $p|_S:S\to M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, denn ihre Tangentialabbildung ist ein Isomorphismus, $T_e(p|_S):T_eS=H_e\cong T_xM$. Es existiert daher eine lokale Umkehrabbildung $s : U \to S$, $p \circ s = \mathrm{id}_U$, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von x, dh. $s \in \Gamma(E|_U)$ und $s(x) = e$. Da die Tangentialabbildung Ts Werte im horizontalen Bündel $H = \ker(P)$ hat, folgt $\nabla s = 0$, siehe (II.6). Ist nun $e_1, \dots, e_k \in E_x$ eine Basis, so erhalten wir lokale Schnitte $s_i \in \Gamma(E|_U)$ mit $\nabla s_i = 0$ und $s_i(x) = e_i$. Durch Verkleinern von U können wir weiters erreichen, dass $s_1(y), \dots, s_k(y)$ für jedes $y \in U$ eine Basis von E_y bildet. Damit ist die Implikation (d)⇒(e) gezeigt.

Ein lokaler Rahmen paralleler Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ wie in (e) definiert eine Vektorbündelkarte $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$, $(x, t^1, \dots, t^k) \mapsto \sum_i t^i s_i(x)$, siehe Proposition II.1.5. Für einen beliebigen Schnitt $s = f^1 s_1 + \cdots + f^k s_k \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ mit $(f^1, \dots, f^k) \in C^\infty(U; \mathbb{R}^k)$, folgt mit der Leibniz Regel und $\nabla_X s_i = 0$,

$$\nabla_X^{E|_U} s = df^1(X) s_1 + \cdots + df^k(X) s_k,$$

also stimmt $\nabla^{E|_U}$ mit der trivialen Konnexion dieser Karte überein. Dies zeigt die Implikation (e)⇒(f).

Um die Implikation (f)⇒(g) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass wir durch Unterteilen des Definitionsbereiches von h annehmen dürfen, dass h Werte in einer offenen Teilmengen $U \subseteq M$ wie in (f) hat. O.B.d.A. sei daher $E = M \times V$ und $\nabla = d$ die triviale Konnexion. Fassen wir $v \in V$ als konstante Abbildung $v \in C^\infty(M, V) = \Gamma(E)$ auf, dann gilt also $\nabla v = 0$, und daher $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}(v) = v$, für jede Kurve $c : [t_0, t_1] \to M$.

Aus Proposition II.4.4 erhalten wir sofort die Implikation (g)⇒(a), denn nach Voraussetzung gilt $P_t = \mathrm{id}$, da die in dieser Proposition betrachteten Kurven homotop zu konstanten Kurven sind. □

II.4.7. Bemerkung. Ist E ein flaches Vektorbündel über M, dh. E ist mit einer flachen Konnexion ∇ ausgestattet, dann wird

$$H^q(M; E) := \frac{\ker\big(d^\nabla : \Omega^q(M; E) \to \Omega^{q+1}(M; E)\big)}{\mathrm{img}\big(d^\nabla : \Omega^{q-1}(M; E) \to \Omega^q(M; E)\big)}$$

die q-te *de Rham Kohomologie mit Werten im flachen Bündel* E genannt. Beachte, dass dies wegen $d^\nabla d^\nabla = 0$ wohldefiniert ist. Für $E = \xi^1$ mit der trivialen Konnexion erhalten wir die übliche de Rham Kohomologie $H^*(M)$ zurück.

II.4.8. Bemerkung. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen, $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ der duale lokale Korahmen, $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$, und $\omega_j^i \in \Omega^1(U)$ die Konnexionsformen, $\omega_j^i(X) = \sigma^i(\nabla_X s_j)$, siehe Bemerkung II.3.16. Für die Krümmung $R \in \Omega^2(U; \mathrm{end}(E)) = \Omega^2(U; E \otimes E')$ gilt dann

$$R_{X,Y} = \sum_{i,j=1}^k \Omega_j^i(X, Y) s_i \otimes \sigma^j,$$

wobei $\Omega^i_j \in \Omega^2(U)$ die sogenannten *Krümmungformen* bezeichnen, $\Omega^i_j(X,Y) := \sigma^i(R_{X,Y}s_j)$. Wir wollen nun die Krümmungsformen Ω^i_j aus den Konnexionsformen ω^i_j berechnen. Aus (II.29) erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}s_j &= \nabla_X\nabla_Y s_j - \nabla_Y\nabla_X s_j - \nabla_{[X,Y]}s_j \\
&= \nabla_X \sum_{l=1}^k \omega^l_j(Y)s_l - \nabla_Y \sum_{l=1}^k \omega^l_j(X)s_l - \sum_{l=1}^k \omega^l_j([X,Y])s_l \\
&= \sum_{l=1}^k \Big((X\cdot\omega^l_j(Y))s_l + \sum_{i=1}^k \omega^l_j(Y)\omega^i_l(X)s_i\Big) \\
&\qquad - \sum_{l=1}^k \Big((Y\cdot\omega^l_j(X))s_l + \sum_{i=1}^k \omega^l_j(X)\omega^i_l(Y)s_i\Big) - \sum_{l=1}^k \omega^l_j([X,Y])s_l \\
&= \sum_{l=1}^k (d\omega^l_j)(X,Y)s_l + \sum_{i,l=1}^k (\omega^i_l\wedge\omega^l_j)(X,Y)s_i
\end{aligned}$$

also

$$\Omega^i_j(X,Y) = \sigma^i(R_{X,Y}s_j) = (d\omega^i_j)(X,Y) + \sum_{l=1}^k (\omega^i_l\wedge\omega^l_j)(X,Y)$$

und somit

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_{l=1}^k \omega^i_l\wedge\omega^l_j. \tag{II.39}$$

Fassen wir Ω^i_j als $(k\times k)$-Matrix $\mathbf{\Omega}$ mit Eintragungen in $\Omega^2(U)$ auf, so lässt sich dies mittels Matrizenmultiplikation auch als

$$\mathbf{\Omega} = d\mathbf{w} + \mathbf{w}\wedge\mathbf{w} \tag{II.40}$$

schreiben.

II.5. Euklidische Bündel. Unter einer *Euklidischen Metrik* auf einem Vektorbündel E verstehen wir einen glatten Schnitt $g \in \Gamma(S^2E')$, der auf jeder Faser positiv definit ist, dh. für jedes $x \in M$ ist g_x eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf E_x, und diese hängt glatt von x ab. Jede Euklidische Metrik induziert einen Vektorbündelisomorphismus $\flat_g : E \to E'$, der faserweise durch $(\flat_g)_x : E_x \to E'_x$, $v_x \mapsto g_x(v_x,-)$ gegeben ist, siehe Proposition II.1.5, den Inversen bezeichnen wir mit $\sharp_g := \flat_g^{-1}$. Unter einem *Euklidischen Vektorbündel* verstehen wir ein Vektorbündel, das mit einer Euklidischen Metrik ausgestattet ist.

II.5.1. Proposition. *Jedes Vektorbündel E besitzt Euklidische Metriken. Jede solche Metrik induziert einen Isomorphismus $\flat = \sharp^{-1} : E \cong E'$.*

Beweis. Wir wählen einen Vektorbündelatlas $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ von E, dh. $\bigcup_i U_i = M$. Weiters wählen wir positiv definite innere Produkte $\tilde{g}_i$ auf V_i. Mit Hilfe der Vektorbündelkarten erhalten wir daraus Euklidische Metriken g_i auf den Vektorbündeln $E|_{U_i}$. Schließlich sei λ_i eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M, [0,1])$, $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Es ist dann $\lambda_i g_i \in \Gamma(S^2 E'|_{U_i})$, und dieser Schnitt lässt sich durch Null zu einem global definierten glatten Schnitt von $S^2 E'$ ausdehnen. Da die Partition der Eins lokal endlich ist, erhalten wir einen glatten Schnitt $g := \sum_i \lambda_i g_i \in \Gamma(S^2 E')$. Für jedes $x \in M$ ist g_x eine Konvexkombination von positiv semi-definiten symmetrischen Bilinearformen auf E_x, von denen mindestens eine positiv definit ist, denn es existiert i mit $\lambda_i(x) \neq 0$. Da die positiv definiten symmetrischen Bilinearformen eines Vektorraums eine konvexe Menge bilden, folgt nun, dass g faserweise positiv definit ist. □

II.5.2. Proposition. *Es sei E ein Euklidisches Vektorbündel über M mit Metrik $g \in \Gamma(S^2 E')$. Dann existiert um jeden Punkt von M ein* lokaler Orthonormalrahmen $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$, *dh. $g(s_i, s_j) = \delta_{i,j}$. Jeder solche lokale Orthonormalrahmen definiert eine isometrische Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, die jede Faser E_x isometrisch auf $\mathbb{R}^k$ mit dem Standardskalarprodukt abbildet, $x \in U$.*

Beweis. Wir beginnen mit einem beliebigen lokalen Rahmen $v_1, \dots, v_k \in \Gamma(E|_U)$ und wenden das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an. Genauer definieren wir induktiv $s_1 := v_1/\sqrt{g(v_1, v_1)}$ und

$$\tilde{s}_i := v_i - g(v_i, s_{i-1})s_{i-1} - \cdots - g(v_i, s_1)s_1, \qquad s_i := \tilde{s}_i/\sqrt{g(\tilde{s}_i, \tilde{s}_i)},$$

für $1 < i \leq k$. Wir erhalten $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ und nach Konstruktion gilt $g(s_i, s_j) = \delta_{i,j}$, also bildet s_i einen lokalen Orthonormalrahmen. Schließlich ist $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$, $(x, t^1, \dots, t^k) \leftrightarrow \sum_{i=1}^k t^i s_i(x)$, eine Vektorbündelkarte, die jede Faser E_x isometrisch auf $\mathbb{R}^k$ abbildet. □

II.5.3. Bemerkung. Ist $E \to M$ ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik g und $F \subseteq E$ ein Teilbündel, dann bildet das faserweise orthogonale Komplement $F^\perp := \bigcup_{x \in M} F_x^\perp$ ein zu F komplementäres Teilbündel, $F \oplus F^\perp = E$, denn $F^\perp = \ker(\pi)$ wobei $\pi : E \to E$ die faserweise Orthogonalprojektion auf F bezeichnet. Beachte, dass π glatt ist, denn mit Hilfe eines lokalen Orthonormalrahmen s_i von F, siehe Proposition II.5.2, lässt sich diese Projektion lokal als $\pi(v) = \sum_i g(s_i, v)s_i$ schreiben. Die komplementäre Orthogonalprojektion $\mathrm{id}_E - \pi : E \to F^\perp$ faktorisiert zu einem kanonischen Isomorphismus $E/F = F^\perp$.

II.5.4. Proposition. *Ist E ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik g, dann existieren lineare Konnexionen ∇ auf E, sodass $\nabla g = 0$, dh. g ist bezüglich der induzierten Konnexion auf $S^2 E'$ parallel, in anderen Worten*

$$X \cdot g(s_1, s_2) = g(\nabla_X s_1, s_2) + g(s_1, \nabla_X s_2) \tag{II.41}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ *und* $s_i \in \Gamma(E)$. *Ist* ∇ *so eine Konnexion,* $A \in \Omega^1(M; \operatorname{end}(E))$ *und* $\tilde\nabla = \nabla + A$, *dann gilt* $\tilde\nabla g = 0$ *genau dann wenn* $A \in \Omega^1(M; \mathfrak{o}(E))$, *wobei* $\mathfrak{o}(E) \subseteq \operatorname{end}(E)$ *das Teilbündel der faserweise schiefsymmetrischen Endomorphismen bezeichnet,*[7]

$$\mathfrak{o}(E)_x = \mathfrak{o}(E_x) = \big\{\varphi \in \operatorname{end}(E_x) \,\big|\, \forall v, w \in E_x : g_x(\varphi v, w) = -g_x(v, \varphi w)\big\}.$$

Die Menge der linearen Konnexionen für die g *parallel ist bildet daher einen affinen Raum über dem Vektorraum* $\Omega^1(M; \mathfrak{o}(E))$.

Beweis. Nach Proposition II.5.2 existiert ein isometrischer Vektorbündelatlas $\varphi^i : E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$, dh. $\bigcup_i U_i = M$, jeder der Vektorräume V_i ist mit einem Euklidischen Skalarprodukt ausgestattet, und $\varphi^i_x : E_x \cong V_i$ ist eine lineare Isometrie, für jedes $x \in U_i$. Beachte, dass für die mit diesen Karten assozierten trivialen Konnexionen $\nabla^{E|_{U_i}}$ auf $E|_{U_i}$ offensichtlich $\nabla^{E|_{U_i}}(g|_{U_i}) = 0$ gilt. Ist nun λ_i eine der Überdeckung U_i untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$, $\sum_i \lambda_i = 1$, so definiert $\nabla_X s := \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}_X s$ eine lineare Konnexion auf E und es folgt

$$\begin{aligned}(\nabla_X g)(s_1, s_2) &= X \cdot g(s_1, s_2) - g(\nabla_X s_1, s_2) - g(s_1, \nabla_X s_2)\\ &= \sum_i \lambda_i\big(X \cdot g(s_1, s_2) - g(\nabla^{E|_{U_i}}_X s_1, s_2) - g(s_1, \nabla^{E|_{U_i}}_X s_2)\big)\\ &= \sum_i \lambda_i (\nabla^{E|_{U_i}} g)(s_1, s_2) = 0,\end{aligned}$$

also $\nabla g = 0$ wie gewünscht. Sind ∇ und $\tilde\nabla$ zwei beliebige lineare Konnexionen auf E und bezeichnet $A := \tilde\nabla - \nabla \in \Omega^1(M; \operatorname{end}(E))$ dann gilt

$$(\tilde\nabla_X g)(s_1, s_2) = (\nabla_X g)(s_1, s_2) - g(A(X)s_1, s_2) - g(s_1, A(X)s_2)$$

woraus sofort die zweite Behauptung folgt. □

II.5.5. Bemerkung. Ist g eine Euklidische Metrik auf einem Vektorbündel E, dann induziert g Euklidische Metriken auf f^*E, E', $\otimes^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf E mit $\nabla g = 0$, dann sind auch die Metriken auf f^*E, E', $\otimes E^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$ parallel bezüglich der induzierten Konnexionen auf diesen Bündeln.

II.5.6. Proposition. *Es sei* $p : E \to M$ *ein Euklidisches Vektorbündel mit Metrik* g *und* ∇ *eine lineare Konnexion auf* E, *sodass* $\nabla g = 0$. *Dann gilt:*

(a) *Für jede glatte Kurve* $c : I \to M$ *ist der Paralleltransport* $\operatorname{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}$ *eine lineare Isometrie,* $t_0, t_1 \in I$, *dh.*

$$g_{c(t_1)}\big(\operatorname{pt}^c_{t_1,t_0}(v), \operatorname{pt}^c_{t_1,t_0}(w)\big) = g_{c(t_0)}(v, w),$$

für alle $v, w \in E_{c(t_0)}$.

[7]Schnitte von $\mathfrak{o}(E)$ können daher mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\phi : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ identifiziert werden, für die $g(\phi s_1, s_2) = -g(s_1, \phi s_2)$ gilt, $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

(b) Für die Krümmung von ∇ gilt $R \in \Omega^2(M; \mathfrak{o}(E))$, dh.

$$g(R_{X,Y}s_1, s_2) = -g(s_1, R_{X,Y}s_2),$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $s_i \in \Gamma(E)$.

Beweis. Betrachte das Pullback Bündel c^*E über I mit der induzierten Euklidischen Metrik $\tilde{g} := c^*g$ und der induzierten Konnexion $\tilde{\nabla} := \nabla^{c^*E}$. Weiters bezeichnen $\tilde{v}, \tilde{w} : I \to E$ die Kurven $\tilde{v}(t) := \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v)$ und $\tilde{w}(t) := \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(w)$. Da $p \circ \tilde{v} = c = p \circ \tilde{w}$ können wir $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ als Schnitte von c^*E auffassen, $\tilde{v}, \tilde{w} \in \Gamma(c^*E)$, und es gilt $\tilde{\nabla}\tilde{v} = 0 = \tilde{\nabla}\tilde{w}$. Nach Bemerkung II.5.5 gilt auch $\tilde{\nabla}\tilde{g} = 0$ und mit (II.41) daher

$$\partial_t \cdot \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{v}, \tilde{w}) + \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{w}) = 0 + 0 = 0,$$

wobei $\partial_t \in \mathfrak{X}(I)$. Zurückübersetzt bedeutet dies $\frac{\partial}{\partial t} g_{c(t)}\big(\mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v), \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(w)\big) = 0$, woraus nun (a) folgt. Nach (II.41) gilt:

$$\begin{aligned}
X \cdot Y \cdot g(s_1, s_2) &= g(\nabla_X \nabla_Y s_1, s_2) + g(\nabla_Y s_1, \nabla_X s_2) \\
&\qquad + g(\nabla_X s_1, \nabla_Y s_2) + g(s_1, \nabla_X \nabla_Y s_2) \\
-Y \cdot X \cdot g(s_1, s_2) &= -g(\nabla_Y \nabla_X s_1, s_2) - g(\nabla_X s_1, \nabla_Y s_2) \\
&\qquad - g(\nabla_Y s_1, \nabla_X s_2) - g(s_1, \nabla_Y \nabla_X s_2) \\
-[X, Y] \cdot g(s_1, s_2) &= -g(\nabla_{[X,Y]} s_1, s_2) - g(s_1, \nabla_{[X,Y]} s_2)
\end{aligned}$$

Aufaddieren ergibt $0 = g(R_{X,Y}s_1, s_2) + g(s_1, R_{X,Y}s_2)$, siehe (II.29). □

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts werden wir nun explizite Respräsentanten der Thom und Euler Klassen konstruieren, und damit dann einen Satz von Gauss–Bonnet–Chern zeigen, siehe Satz II.5.8 unten. Die Darstellung hier orientiert sich eng an der in [**11**, Section 1.6].

Sei also E ein Vektorbündel über M, g eine Euklidische Metrik auf E und ∇ eine kompatible Konnexion, $\nabla g = 0$. Zunächst können wir mittels g die Vektorbündel $\Lambda^2 E$ und $\mathfrak{o}(E)$ identifizieren, $\Lambda^2 E = \mathfrak{o}(E)$,

$$\omega(\flat s_1, \flat s_2) := g(\omega(s_1), s_2), \quad \omega \in \Gamma(\mathfrak{o}(E)),\ s_1, s_2 \in \Gamma(E). \tag{II.42}$$

Dies erlaubt es die Krümmung von ∇ als Element in $R \in \Omega^2(M; \Lambda^2 E)$ aufzufassen, siehe Proposition II.5.6(b). Da $\nabla g = 0$, stimmen die induzierten Konnexionen auf $\Lambda^2 E$ und $\mathfrak{o}(E)$ überein,

$$\nabla^{\Lambda^2 E} = \nabla^{\mathfrak{o}(E)}. \tag{II.43}$$

Die Bianchi Identität in Proposition II.4.2(a) ist daher zu

$$d^{\nabla^{\Lambda^2 E}} R = 0 \in \Omega^3(M; \Lambda^2 E) \tag{II.44}$$

äquivalent.

Auf dem graduierten Vektorraum $\Omega^*(M;\Lambda^*E)=\bigoplus_r\bigoplus_{p+q=r}\Omega^p(M;\Lambda^qE)$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$(\alpha\otimes a)\wedge(\beta\otimes b):=(-1)^{|a||\beta|}\alpha\wedge\beta\otimes a\wedge b, \tag{II.45}$$

wobei $\alpha,\beta\in\Omega^*(M)$ und $a,b\in\Gamma(\Lambda^*E)$. Dabei ist der Grad von $\alpha\otimes a\in\Omega^p(M;\Lambda^qE)$ durch $|\alpha\otimes a|:=|\alpha|+|a|=p+q$ gegeben. Dadurch wird $\Omega^*(M;\Lambda^*E)$ zu einer assotiativen und graduiert kommutativen Algebra, dh.

$$\sigma\wedge\tau=(-1)^{|\sigma||\tau|}\tau\wedge\sigma,\qquad\sigma,\tau\in\Omega^*(M;\Lambda^*E).$$

Darüberhinaus wird $d^{\nabla^{\Lambda^*E}}:\Omega^*(M;\Lambda^*E)\to\Omega^{*+1}(M;\Lambda^*E)$ zu einer graduierte Derivation, siehe Proposition II.4.1(d), dh.

$$d^{\nabla^{\Lambda^*E}}(\sigma\wedge\tau)=(d^{\nabla^{\Lambda^*E}}\sigma)\wedge\tau+(-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge d^{\nabla^{\Lambda^*E}}\tau,\qquad\sigma,\tau\in\Omega^*(M;\Lambda^*E). \tag{II.46}$$

Zusammen mit (II.44) impliziert dies, für jedes $r\in\mathbb{N}$,

$$d^{\nabla^{\Lambda^{2r}E}}R^r=0\in\Omega^{2r+1}(M;\Lambda^{2r}E), \tag{II.47}$$

wobei $R^r:=R\wedge\cdots\wedge R\in\Omega^{2r}(M;\Lambda^{2r}E)$.

Ist darüberhinaus E orientiert und $k:=\operatorname{rank}(E)$, dann kann das Linienbündel Λ^kE mittels g mit dem trivialen Linienbündel identifiziert werden, und bezüglich dieser Identifikation wird die induzierte Konnexion auf Λ^kE zur trivialen Konnexion,

$$\Lambda^kE=\xi^1=M\times\mathbb{R},\qquad\nabla^{\Lambda^kE}=d.$$

Dabei entspricht $t\in\xi^1_x=\mathbb{R}$ das Element $ts_1\wedge\cdots\wedge s_k\in\Lambda^kE$, wobei $s_1,\dots,s_k$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von E_x bezeichnet — das Resultat hängt nicht von der Wahl dieser positiv orientierte Orthonormalbasis ab. Diese Identifikation wird auch als *Berezin Integration* bezeichnet. Für geraden Rang k können wir daher $R^{k/2}\in\Omega^k(M;\Lambda^kE)=\Omega^k(M)$ auffassen, und aus (II.47) erhalten wir

$$dR^{k/2}=0\in\Omega^{k+1}(M). \tag{II.48}$$

Für gerades k definieren wir die *Euler Form (Pfaffsche der Krümmung) eines orientierten Euklidischen Bündels mit kompatibler Konnexion* durch

$$e(E,g,\nabla):=(-1)^{k(k-1)/2}(2\pi)^{-k/2}\frac{R^{k/2}}{(k/2)!}\in\Omega^k(M), \tag{II.49}$$

für ungerades k setzen wir $e(E,g,\nabla):=0$.

II.5.7. Proposition. *Es sei E ein orientiertes Vektorbündel über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M, g eine Euklidische Metrik auf E und ∇ eine kompatible lineare Konnexion, $\nabla g=0$. Dann ist die Euler Form $e(E,g,\nabla)$, siehe* (II.49), *geschlossen und repräsentiert die Euler Klasse, $[e(E,g,\nabla)]=e(E)\in H^k(M)$, siehe Definition II.2.2. Insbesondere ist die Euler Klasse eines Vektorbündels ungeraden Grades trivial.*

Beweis. Nach (II.48) gilt $de(E, g, \nabla) = 0$, also ist die Euler Form geschlossen. Es bezeichne nun $\tilde{E} := p^*E$ das Pullback Bündel über E und $\tilde{\nabla} := p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf $\tilde{E}$. Wie schon zuvor $\Omega^*(M; \Lambda^*\tilde{E})$, fassen wir auch $\Omega^*(E; \Lambda^*\tilde{E})$ als assotiative graduiert kommutative Algebra auf, siehe (II.45), $d^{\tilde{\nabla}} := d^{\tilde{\nabla}^{\Lambda^*\tilde{E}}}$ ist daher eine graduierte Derivation auf $\Omega^*(E; \Lambda^*\tilde{E})$, siehe (II.46). Weiters fassen die identische Abbildung $E \to E$ als Schnitt $\mathbf{x} \in \Gamma(\tilde{E})$ auf, und definieren eine lineare Abbildung $a_{\mathbf{x}} : \Omega^*(E; \Lambda^*\tilde{E}) \to \Omega^*(E; \Lambda^{*-1}\tilde{E})$ durch

$$a_{\mathbf{x}}(\beta \otimes b) := (-1)^{|\beta|}\beta \otimes i_{\tilde{\flat}\mathbf{x}} b, \qquad \beta \in \Omega^*(M),\, b \in \Gamma(\Lambda^*\tilde{E}),$$

wobei $i_{\tilde{\flat}\mathbf{x}} : \Lambda^*\tilde{E} \to \Lambda^{*-1}\tilde{E}$ die Kontraktion mit $\tilde{\flat}\mathbf{x} \in \Gamma(\tilde{E}')$ bezeichent, und $\tilde{\flat} : \tilde{E} \to \tilde{E}'$ mit der Euklidischen Metrik $\tilde{g} := p^*g$ auf $\tilde{E}$ definiert ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass auch $a_{\mathbf{x}}$ eine graduierte Derivation bildet, dh.

$$a_{\mathbf{x}}(\sigma \wedge \tau) = (a_{\mathbf{x}}\sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge a_{\mathbf{x}}\tau, \qquad \sigma, \tau \in \Omega^*(E; \Lambda^*\tilde{E}).$$

Betrachte nun die Funktion $-|\mathbf{x}|^2/2 := -\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x})/2 \in \Omega^0(E) = \Omega^0(E; \Lambda^0\tilde{E})$, $\tilde{\nabla}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; \tilde{E}) = \Omega^1(E; \Lambda^1\tilde{E})$ und die Krümmung von $\tilde{\nabla}$, $\tilde{R} \in \Omega^2(E; \mathfrak{o}(\tilde{E})) = \Omega^2(E; \Lambda^2\tilde{E})$. Aus $\tilde{\nabla}\tilde{g} = 0$, der Definition der Krümmung, siehe (II.28), und der Biancchi Identität, vgl. (II.44), erhalten wir sofort folgende Relationen:

$$\begin{gathered} d^{\tilde{\nabla}}(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2}) = a_{\mathbf{x}}\tilde{\nabla}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; \Lambda^0\tilde{E}) \\ d^{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}\mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\tilde{R} \in \Omega^2(E; \Lambda^1\tilde{E}) \\ d^{\tilde{\nabla}}\tilde{R} = 0 \in \Omega^3(E; \Lambda^2\tilde{E}) \end{gathered}$$

Aus diesen Gleichungen, und der trivialen Relation $a_{\mathbf{x}}(-|\mathbf{x}|^2/2) = 0$, erhalten wir

$$(d^{\tilde{\nabla}} - a_{\mathbf{x}})\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big) = 0.$$

Da $d^{\tilde{\nabla}} - a_{\mathbf{x}}$ eine graduierte Derivation ist, folgt

$$(d^{\tilde{\nabla}} - a_{\mathbf{x}})\Big(\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big)^r\Big) = 0,$$

für jedes $r \in \mathbb{N}_0$, und daher auch

$$(d^{\tilde{\nabla}} - a_{\mathbf{x}}) \exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big) = 0, \tag{II.50}$$

wobei

$$\exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \tfrac{1}{r!}\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big)^r = e^{-|\mathbf{x}|^2/2} e^{\tilde{\nabla}\mathbf{x}} e^{\tilde{R}} \in \bigoplus_p \Omega^p(E; \Lambda^p\tilde{E}).$$

Beachte, dass $\tilde{\nabla}\mathbf{x}$ und $\tilde{R}$ in $\Omega^*(E; \Lambda^*\tilde{E})$ kommutieren und beide nilpotent sind, die Exponentiale $e^{\tilde{\nabla}\mathbf{x}}$ und $e^{\tilde{R}}$ sind daher durch endliche Summen gegeben. Bezeichnet $o : M \to E$ den Nullschnitt, dann gilt weiters

$$o^* \exp\big(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde{\nabla}\mathbf{x} + \tilde{R}\big) = e^R \in \Omega^*(M; \Lambda^*E), \tag{II.51}$$

denn aus $\mathbf{x}\circ o = 0$ folgt $o^*\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} = 0$, $o^*(\tilde\nabla\mathbf{x}) = \nabla o^*\mathbf{x} = \nabla 0 = 0$ und $o^*\tilde R = o^*p^*R = (p\circ o)^*R = \mathrm{id}_M^* R = R$. Sei nun $x_0 \in M$ und E_{x_0} die Faser von E über x_0. Wähle eine positiv orientierte Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_k$ von E_{x_0} und betrachte die orientierungserhaltende lineare Isometrie $\iota : \mathbb{R}^k \to E_{x_0}$, $\iota(x^1,\dots,x^k) = x^1e_1 + \cdots + x^ke_k$. Ziehen wir die Konnexion $\tilde\nabla$ mit ι zurück, so erhalten wir die triviale Konnexion auf dem trivialen Vektorbündel $\iota^*\tilde E = \iota^*p^*E = (p\circ\iota)^*E = \mathrm{const}_{x_0}^* E = \mathbb{R}^k \times \Lambda^*E_{x_0}$ über $\mathbb{R}^k$. Es gilt daher $\iota^*\tilde\nabla\mathbf{x} = d\iota^*\mathbf{x} = d\sum_i x^i \otimes e_i = \sum_i dx^i \otimes e_i$, also $\iota^*\exp(\tilde\nabla\mathbf{x}) = \exp(\iota^*\tilde\nabla\mathbf{x}) = \prod_i \exp(dx^i\otimes e_i) = \prod_i(1 + dx^i \otimes e_i)$, und somit

$$\iota^*\exp\bigl(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde\nabla\mathbf{x} + \tilde R\bigr) = e^{-|x|^2/2}(1 + dx^1\otimes e_1)\wedge\cdots\wedge(1 + dx^k \otimes e_k), \qquad \text{(II.52)}$$

denn aufgrund der Natürlichkeit der Krümmung, siehe Proposition II.4.2(b), haben wir auch $\iota^*\tilde R = \iota^*R^{p^*\nabla} = \iota^*p^*R = (p\circ\iota)^*R = \mathrm{const}_{x_0}^* R = 0$ und somit $\iota^*(\exp\tilde R) = 1$.

Es bezeichne $\tilde\phi \in \Omega^k(E;\Lambda^k\tilde E) = \Omega^k(E)$ jenen Teil von

$$(-1)^{k(k-1)/2}(2\pi)^{-k/2}\exp\bigl(-\tfrac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \tilde\nabla\mathbf{x} + \tilde R\bigr)$$

der in $\Omega^k(E;\Lambda^k\tilde E)$ liegt, $k = \mathrm{rank}(E)$. Aus (II.50), (II.51) und (II.52) folgt:

$$d\tilde\phi = 0 \qquad \text{(II.53)}$$

$$o^*\tilde\phi = e(E,g,\nabla) \qquad \text{(II.54)}$$

$$\iota^*\tilde\phi = (2\pi)^{-k/2}e^{-|x|^2/2}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k \qquad \text{(II.55)}$$

Zusammen mit dem Gauß'schen Integral, $\int_{\mathbb{R}^k} e^{-|x|^2/2}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k = (2\pi)^{k/2}$, erhalten wir aus (II.55) auch

$$\int_{E_{x_0}}\tilde\phi = 1. \qquad \text{(II.56)}$$

Wir sehen daraus, dass $\tilde\phi \in \Omega^k(E)$ beinahe eine Thom Form darstellt, allerdings ist der Träger von $\tilde\phi$ nicht kompakt. Um dies zu korrigieren, betrachten wir die offene Teilmenge $BE := \{y \in E : |y| < 1\} \subseteq E$ und den Diffeomorphismus

$$f : BE \xrightarrow{\cong} E, \qquad f(y) := \frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Sezten wir die Form $\phi := f^*\tilde\phi \in \Omega^k(BE)$ durch Null auf ganz E fort, so erhalten wir eine glatte Form mit kompakten Träger, $\phi \in \Omega_c^k(E)$. Aus (II.53) und (II.56) folgt, dass ϕ die Thom Klasse repräsentiert, $[\phi] = \phi_E \in H_c^k(E)$, siehe Satz II.2.1, und aus (II.54) schließlich, dass $e(E,g,\nabla)$ die Euler Klasse repräsentiert, siehe Definition II.2.2. □

Aus Satz II.2.8 und Proposition II.5.7 erhalten wir nun

II.5.8. Satz (Gauß–Bonnet–Chern)**.** *Es sei M eine orientierte geschlossene n-Mannigfaltigkeit, g eine Euklidische Metrik auf TM und ∇ eine kompatible lineare Konnexion, $\nabla g = 0$. Dann gilt*

$$\int_M e(TM, g, \nabla) = \chi(M),$$

wobei $e(TM, g, \nabla) \in \Omega^n(M)$ die Euler Form (Pfaffsche der Krümmung) bezeichnet, siehe (II.49)*.*

II.6. Aufgaben zu Kapitel II.

30. Aufgabe. Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Zeige, dass die Inversion $\nu : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, $\nu(A) := A^{-1}$, glatt ist. *Hinweis:* Da $V \cong \mathbb{R}^k$ genügt es zu zeigen, dass die Inversion in $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ glatt ist.

31. Aufgabe. Zeige, dass für jedes Linienbündel L die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) L ist orientierbar.
(ii) L ist trivialisierbar.
(iii) L besitzt einen irgendwo verschwindenden Schnitt.

32. Aufgabe. Führe die Details in Bemerkung II.1.7 aus. *Hinweis:* Verwende die kanonischen Vektorbündelhomomorphismen $\pi_1 : E \times F \to E$ über p_1 und $\pi_2 : E \times F \to F$ über p_2, wobei $p_1, p_2 : M \times M \to M$ die beiden kanonischen Projektionen bezeichnen, $i = 1, 2$.

33. Aufgabe. Es sei W ein Teilraum in einem endlich dimensionalen Vektorraum V. Zeige, dass $\mathrm{GL}(V; W) := \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid A(W) = W\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(V)$ ist. Zeige weiters, dass die natürliche Abbildung $p : \mathrm{GL}(V; W) \to \mathrm{GL}(V/W)$ glatt ist. Zeige auch, dass glatte Abbildungen $s : \mathrm{GL}(V/W) \to \mathrm{GL}(V; W)$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(V/W)}$ existieren. Zeige schließlich, dass p und s zueinander inverse Homotopieäquivalenzen sind.

34. Aufgabe. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit. Zeige, dass TS ein Teilbündel von $TM|_S$ ist, ohne dabei auf Proposition II.1.10 zurückzugreifen, vgl. Beispiel II.1.11.

35. Aufgabe. Es sei W ein Teilraum eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Sind zwei der drei Vektorräume V, W, V/W orientiert, dann erbt der dritte in kanonischer Weise eine Orientierung.

36. Aufgabe. Es sei $0 \to F \to E \to G \to 0$ eine kurze exakte Seqeunz von Vektorbündeln über M. Sind zwei dieser Vektorbündel oreintiert, dann existiert auf dem dritten genau eine Orientierung, sodass der kanonische Isomorphismus $E/F = G$ orientierungsbewahrend ist.

37. Aufgabe. Zeige, dass das tautologische Linienbündel über $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ keinen nirgendwo verschwindenden Schnitt besitzt und daher nicht orientierbar und auch nicht trivialisierbar sein kann. Schließe daraus, dass auch das tautologische Linienbündel über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$, nicht orientierbar und nicht trivialisierbar ist. Zeige weiters, dass der Totalraum des tautologischen Linienbündels über $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ diffeomorph zum Möbiusband ist.

38. Aufgabe. Zeige $T\,\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \hom(\gamma, \gamma^\perp)$, siehe Beispiel II.1.22.

39. Aufgabe. Verifiziere die Details in Bemerkung II.1.24. Zeige weiters auch $T\,\mathrm{Gr}_{k,n} \cong \hom(\gamma^k, (\gamma^k)^\perp)$.

40. Aufgabe. Es seinen V und W zwei endlich dimensionale Vektorräume und M eine Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine Abbildung $f : M \to L(V, W)$ genau dann glatt ist, wenn für jedes $v \in V$ die Abbildung $M \to W$, $x \mapsto f(x) \cdot v$ glatt ist.

41. Aufgabe. Zeige $\Lambda^k(E \oplus F) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p E \otimes \Lambda^q F$ für je zwei Vektorbündel E und F über M.

42. Aufgabe. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M, $s \in \Gamma(E)$, $x \in M$ und $X \in T_x M$. Weiters sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Zeige

$$\nabla_X s = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}\big(\mathrm{pt}^c_{0,t}(s(c(t))) - s(x)\big),$$

vgl. Bemerkung II.3.15.

43. Aufgabe. Betrachte $\alpha := xdy + dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ und das Teilbündel $H := \ker(\alpha) \subseteq T\mathbb{R}^3$. Zeige, dass H nicht integrabel ist, vgl. Satz II.4.5.

44. Aufgabe. Es sei E ein Vektorbündel über M, das k punktweise linear unabhängige Schnitte besitzt. Zeige, dass ein Teilbündel $F \subseteq E$ mit $E \cong F \oplus \xi^k$ existiert, wobei $\xi^k = M \times \mathbb{R}^k$ das triviale Vektorbündel bezeichnet.

III. Riemannsche Geometrie

III.1. Levi–Civita Konnexion und Riemannkrümmung. Unter einer *Riemannschen Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Euklidische Metrik auf dem Tangentialbündle, $g \in \Gamma(S^2T^*M)$, vgl. Abschnitt II.5. Eine Riemannsche Metrik spezifiziert also ein positiv definites symmetrisches inneres Produkt auf jedem Tangentialraum T_xM, $x \in M$, und erlaubt es daher Längen und Winkel von Tangentialvektoren zu messen. Unter einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g. Auf einer orientierten Riemannschen n-Mannigfaltigkeit erhalten wir eine kanonische Volumsform, $\mathrm{vol} \in \Omega^n(M)$, in dem wir $\mathrm{vol}(X_1, \dots, X_n) = 1$ für eine (und dann jede) positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM fordern, $x \in M$.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten besitzen eine ausgezeichnete lineare Konnexion, die sogenannte *Levi–Civita Konnexion,* auf ihrem Tangentialbündel. Um die Bedingung, die diese Konnexion charakterisiert zu formulieren benötigen wir den Begriff der Torsion einer linearen Konnexion auf dem Tangentialbündel. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf TM, so definiert

$$\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) \tag{III.1}$$

einen Schnitt $\mathrm{Tor}^\nabla \in \Omega^2(M; TM)$, denn der Ausdruck (III.1) ist offensichtlich schiefsymmetrisch und $C^\infty(M)$ linear in X und Y. Dieses Tensorfeld wird als *Torsion* der Konnexion ∇ bezeichnet. Eine lineare Konnexion auf TM wird *torsionsfrei* genannt, wenn der Torsionstensor verschwindet, dh. $\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) = 0$ für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

III.1.1. Proposition (Levi–Civita Konnexion)**.** *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert genau eine torsionsfreie mit g kompatible lineare Konnexion ∇ auf TM, dh.* $\mathrm{Tor} = 0$ *und* $\nabla g = 0$*. Diese Konnexion wird die* Levi–Civita Konnexion *der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) genannt. Sie ist daher durch die Bedingungen*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{III.2}$$

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{III.3}$$

für je drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, eindeutig charakterisiert.

Beweis. Wir schreiben die Bedingung $\nabla g = 0$, siehe (III.3), drei mal an:

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\\
0 &= (\nabla_Y g)(Z, X) = Y \cdot g(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X)\\
0 &= -(\nabla_Z g)(X, Y) = -Z \cdot g(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

Da g symmetrisch ist, erhalten wir durch Aufaddieren dieser drei Gleichungen unter Verwendung von (III.2)

$$\begin{aligned}0 &= X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) \\ &\qquad - g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \\ &= X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) - 2g(\nabla_X Y, Z) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(&X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\Big).\end{aligned} \tag{III.4}$$

Da g nichtdegeneriert ist, sehen wir daraus bereits, dass es höchstens eine torsionsfreie mit g kompatible Konnexion auf TM geben kann. Um auch die Existenz einzusehen, versuchen wir $\nabla_X Y$ durch (III.4) zu definieren. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die rechte Seite dieser Gleichung $C^\infty(M)$ linear in Z ist. Wegen der Nichtdegeneriertheit von g definiert (III.4) also eine, offensichtlich bilineare Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$. Analoge Rechnungen zeigen, dass $\nabla_X Y$ auch $C^\infty(M)$ linear in X ist, und die Leibnitz Regel $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Z$ gilt. Zusammenfassend sehen wir also, dass (III.4) eine lineare Konnexion ∇ auf TM definiert. Es bleibt also noch zu zeigen, dass diese Konnexion ∇ tatsächlich torsionsfrei und mit g kompatibel ist. Aus (III.4) erhalten wir sofort

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y],Z),$$

also $g(\mathrm{Tor}(X,Y),Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], Z) = 0$ für jedes $Z \in \mathfrak{X}(M)$, und daher $\mathrm{Tor}(X,Y) = 0$. Schließlich folgt aus (III.4) auch

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = X \cdot g(Y,Z),$$

also $(\nabla_X g)(Y,Z) = X \cdot g(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ für alle $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, und somit $\nabla g = 0$. □

Unter dem *Riemannschen Krümmungstensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir die Krümmung, siehe Proposition II.4.2, der Levi–Civita Konnexion, dh.

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{III.5}$$

III.1.2. Proposition. *Der Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt folgende Symmetrien, $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$:*

(a) $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$
(b) $g(R_{X,Y}Z,W) = -g(R_{X,Y}W,Z)$
(c) $g(R_{X,Y}Z,W) = g(R_{Z,W}X,Y)$
(d) $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$ *(algebraische Bianchi Identität)*

(e) $0 = d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R \in \Omega^3(M; \mathrm{end}(TM))$, *dh.*

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z} \tag{III.6}$$

oder äquivalent

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z). \tag{III.7}$$

Diese Relation wird zweite oder differentielle Bianchi Identität genannt.

Beweis. Die erste Symmetrie (a) ist offensichtlich. Aus Proposition II.5.6(b) erhalten wir (b), denn $\nabla g = 0$. Die Bianchi Identität $d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R = 0$ haben wir allgemeiner in Proposition II.4.2(a) gezeigt, die Reformulierung (III.6) erhalten wir sofort mittels (II.27). Nach Abschnitt II.3 gilt

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} - R_{Y, \nabla_X Z}$$

und wegen der Torsionsfreiheit, $\nabla_X Z = \nabla_Z X - [Z,X]$, daher

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} + R_{\nabla_Z X, Y} - R_{[Z,X],Y}.$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefert

$$\sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z},$$

somit folgt (III.7) aus (III.6). Um (d) einzusehen, verwenden wir die Torsionsfreiheit und schreiben R in folgender Form an:

$$\begin{aligned} R_{X,Y} Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X,Y] - [[X,Y],Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_Z \nabla_Y X - [[X,Y],Z] \end{aligned}$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefern nun

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = - \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} [[X,Y],Z] = 0,$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Jacobi Identität verwendet haben. Um (c) einzusehen, schreiben wir (d) viermal an:

$$\begin{aligned} 0 &= g(R_{X,Y} Z, W) + g(R_{Y,Z} X, W) + g(R_{Z,X} Y, W) \\ 0 &= g(R_{Y,Z} W, X) + g(R_{Z,W} Y, X) + g(R_{W,Y} Z, X) \\ 0 &= -g(R_{Z,W} X, Y) - g(R_{W,X} Z, Y) - g(R_{X,Z} W, Y) \\ 0 &= -g(R_{W,X} Y, Z) - g(R_{X,Y} W, Z) - g(R_{Y,W} X, Z) \end{aligned}$$

Aufaddieren liefert, unter Verwendung von (a) und (b),

$$0 = 2g(R_{X,Y} Z, W) - 2g(R_{Z,W} X, Y)$$

und somit (c). $\square$

III.1.3. Satz. *Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sind äquivalent:*

(a) $R = 0$, dh. die Levi–Civita Konnexion ist flach.

(b) Lokal um jeden Punkt existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$g = du^1 \otimes du^1 + \cdots + du^n \otimes du^n, \tag{III.8}$$

dh. (M, g) ist lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.

In diesem Fall wird die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) flach genannt.

Beweis. Die Implikation (b)⇒(a) ist trivial, siehe Beispiel III.1.10. Für die umgekehrten Implikation (a)⇒(b) fixieren wir $x \in M$. Nach Satz II.4.6 existiert eine offene Umgebung U von x und ein lokaler Rahmen $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ paralleler Vektorfelder, $\nabla X_i = 0$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $X_1(x), \dots, X_n(x)$ eine Orthonormalbasis von T_xM bilden. Aus $\nabla g = 0$ folgt

$$Y \cdot g(X_i, X_j) = g(\nabla_Y X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_Y X_j) = 0 + 0 = 0,$$

für jedes $Y \in \mathfrak{X}(U)$, also ist $g(X_i, X_j)$ lokal konstant. Durch Verkleinern von U können wir also $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ erreichen, dh. $X_1, \dots, X_n$ bilden einen lokalen Orthonormalrahmen. Aus der Torsionsfreiheit der Levi–Civita Konnexion erhalten wir $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 - 0 = 0$, also kommutieren die Flüsse der Vektorfelder X_i, dh. $\mathrm{Fl}^{X_i}_t \circ \mathrm{Fl}^{X_j}_s = \mathrm{Fl}^{X_j}_s \circ \mathrm{Fl}^{X_i}_t$ für hinreichend kleine s und t. Somit liefert

$$u^{-1}(t_1, \dots, t_n) := (\mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}^{X_n}_{t_n})(x)$$

eine lokal um x definierte Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenvektorfeldern $\frac{\partial}{\partial u^i} = X_i$, vgl. den Beweis von Satz II.4.5. Insbesondere bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ einen lokalen Orthonormalrahmen, folglich ist g durch (III.8) gegeben. □

Unter der *Ricci Krümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verstehen wir folgende Kontraktion des Riemannschen Krümmungstensors

$$\mathrm{Ric} = -\operatorname{tr}_{24} R, \qquad \mathrm{Ric}(X, Y) := -\sum_{i=1}^n g(R_{X,e_i} Y, e_i), \quad X, Y \in T_xM,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, nach Proposition III.1.2(c) symmetrisch,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X), \qquad X, Y \in T_xM,$$

und definiert daher ein Tensorfeld, $\mathrm{Ric} \in \Gamma(S^2T^*M)$, vom selben Typ wie die Metrik g. Eine weitere Kontraktion führt zur sogenannten *Skalarkrümmung*, $r \in C^\infty(M)$,

$$r := \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric}, \qquad r(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i, e_i), \quad x \in M,$$

wobei dies wieder unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. Die sogenannte *Schnittkrümmung* ist eine Abbildung, die jedem zwei dimensionalen Teilraum $\xi \subseteq T_xM$, $x \in M$, die Zahl

$$K(\xi) := -g(R_{X,Y}X, Y)$$

zuordnet, wobei X, Y eine Orthonormalbasis von ξ bildet. Dies ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Orthonormalbasis, für eine beliebige Basis X, Y von ξ erhalten wir, vgl. Aufgabe 47,

$$K(\xi) = -\frac{g(R_{X,Y}X, Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \qquad X, Y \text{ Basis von } \xi \subseteq T_xM. \tag{III.9}$$

Der *Einstein Tensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch

$$G := \operatorname{Ric} - \tfrac{r}{2} g \in \Gamma(S^2T^*M)$$

definiert, dh. $G(X,Y) = \operatorname{Ric}(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y)$. Beachte, $G(X,Y) = G(Y,X)$.

III.1.4. Lemma. *Der Riemannsche Krümmungstensor R ist durch die Schnittkrümmung K vollständig bestimmt. Ist die Schnittkrümmung bei einem Punkt $x \in M$ konstant, dh. existiert eine Konstante c_x, sodass $K(\xi) = c_x$ für jede Ebene $\xi \subseteq T_xM$, dann gilt schon*

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -c_x\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big), \quad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

und somit auch $\operatorname{Ric}_x = (n-1)c_x g_x$ *und* $r(x) = n(n-1)c_x$.

Beweis. Da dies ein punktweises Problem ist, fixieren wir $x \in M$. Aufgrund von (III.9) bestimmt die Schnittkrümmung K alle Ausdrücke der Form

$$\rho(X,Y) := g(R_{X,Y}X, Y), \qquad X, Y \in T_xM.$$

Mit Hilfe der Symemtrien (a) bis (d) von R in Proposition III.1.2 erhalten wir durch direkte (langwierige) Rechnung [**7**, Lemma 3.3.3]

$$\begin{aligned} -6g(R_{X,Y}Z, W) = \rho(X+W, Y+Z) &- \rho(X+W, Y) - \rho(X+W, Z) \\ &- \rho(X, Y+Z) - \rho(W, Y+Z) + \rho(X,Z) + \rho(W,Y) \\ &- \rho(Y+W, X+Z) + \rho(Y+W, X) + \rho(Y+W, Z) \\ &+ \rho(Y, X+Z) + \rho(W, X+Z) - \rho(Y,Z) - \rho(W,X) \end{aligned}$$

Folglich ist R durch ρ und daher auch durch K bestimmt. Beachte, dass auch R^0,

$$R^0(X,Y,Z,W) := g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z), \qquad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

alle Symmetrien von R besitzt, dh. (a) bis (d) in Proposition III.1.2 gelten auch für R^0. Für $\rho^0(X,Y) := R^0(X,Y,X,Y)$ erhalten wir

$$\rho^0(X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2,$$

die mit R^0 assozierte "Schnittkrümmung" ist daher konstant, $K^0 = -1$, siehe (III.9). Daraus folgt nun sofort die zweite Behauptung des Lemmas. □

III.1.5. Bemerkung (Riemannsche Flächen)**.** Für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist der Krümmungstensor R also völlig durch die Skalarkrümmung r bestimmt. Genauer folgt aus Lemma III.1.4, $r = 2K$, $\mathrm{Ric} = Kg$, $G = 0$ und

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -K\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big).$$

Beachte, dass dieses K mit der Gaußkrümmung übereinstimmt, siehe [**3**, Abschnitt 3.7]. Aus Satz II.5.8 erhalten wir den klassischen Satz von Gauß und Bonnet für geschlossene, orientierbare 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,\mathrm{vol} = \chi(M), \tag{III.10}$$

denn für die Euler Form gilt in diesem Fall $e(TM, g, \nabla) = \frac{1}{2\pi}K\,\mathrm{vol}$, siehe (II.49).

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $A \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$, so definieren wir die *Divergenz,* $\mathrm{div}\,A \in \Gamma(\otimes^k T^*M)$, durch $\mathrm{div}\,A := \mathrm{tr}^g_{12}(\nabla A)$, dh

$$(\mathrm{div}\,A)(X_1, \dots, X_k) := \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}A)(e_i, X_1, \dots, X_k), \quad X_i \in T_xM,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis und erfüllt folgende Rechenregeln.

III.1.6. Lemma. *Für $A, B \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:*

(a) $\mathrm{div}(A + B) = \mathrm{div}\,A + \mathrm{div}\,B$
(b) $\mathrm{div}(fA) = f\,\mathrm{div}\,A + \mathrm{tr}^g_{12}(df \otimes A)$
(c) $\mathrm{div}(fg) = df$*.*
(d) $\mathrm{div}(a)\,\mathrm{vol} = di_{\sharp a}\,\mathrm{vol} = L_{\sharp\alpha}\,\mathrm{vol}$*, für $a \in \Omega^1(M)$.*
(e) $\int_M \mathrm{div}(a)\,\mathrm{vol} = 0$*, für $a \in \Omega^1_c(M)$.*

Beweis. Die erste Behauptung (a) ist trivial. Um die zweite Relation einzusehen, sei $X_i \in T_xM$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}(fA))(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(fA))(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\nabla_{e_i}A)(e_i, X_1, \dots, X_k) + (e_i \cdot f)A(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f\,\mathrm{div}\,A)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^n (df \otimes A)(e_i, e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f\,\mathrm{div}\,A)(X_1, \dots, X_k) + (\mathrm{tr}^g_{12}(df \otimes A))(X_1, \dots, X_k)
\end{aligned}$$

und somit (b). Aus $\nabla g = 0$ erhalten wir $\operatorname{div}(g) = 0$ und mittels (b) daher $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{tr}^g_{12}(df \otimes g) = df$, also (c). Für (d) verwenden wir Aufgabe 46 sowie $\nabla \operatorname{vol} = 0$, und erhalten

$$L_{\sharp a} \operatorname{vol} = di_{\sharp a} \operatorname{vol} = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{\sharp a} \operatorname{vol}) = \sum_{i=1}^n e^i \wedge (i_{\nabla_{e_i}\sharp a} \operatorname{vol})$$
$$= \sum_{i=1}^n e^i(\nabla_{e_i}\sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\nabla \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\sharp_2 \nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}^g(\nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{div}(a) \operatorname{vol}.$$

Die letzte Behauptung folgt aus (d) und dem Satz von Stokes. □

III.1.7. Proposition (Kontrahierte Bianchi Identität). *Der Einstein Tensor einer Riemannsche Mannigfaltigkeit erfüllt*

$$\operatorname{div} G = 0, \qquad \textit{dh. es gilt} \qquad \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \tfrac{1}{2} dr.$$

Beweis. Es sei $e_1, \dots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen. Die Bianchi Identität (III.7) besagt

$$(\nabla_{e_i} R)(e_j, X) + (\nabla_{e_j} R)(X, e_i) + (\nabla_X R)(e_i, e_j) = 0$$

also

$$g\big((\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0$$

und mittels der Symmetrien aus Proposition III.1.2

$$-g\big((\nabla_{e_i} R)(e_i, e_j)X, e_j\big) - g\big((\nabla_{e_j} R)(e_j, e_i)X, e_i\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0.$$

Summation über i und j liefert

$$-\sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_i} R)(e_i, X) - \sum_j (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_j} R)(e_j, X) + \sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_X R)(e_i, e_i) = 0$$

Da $\operatorname{tr}_{24}(\nabla_Y R) = \nabla_Y(\operatorname{tr}_{24} R) = -\nabla_Y \operatorname{Ric}$, erhalten wir

$$\sum_i (\nabla_{e_i} \operatorname{Ric})(e_i, X) + \sum_j (\nabla_{e_j} \operatorname{Ric})(e_j, X) - \sum_i (\nabla_X \operatorname{Ric})(e_i, e_i) = 0,$$

also

$$2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})(X) = \operatorname{tr}^g(\nabla_X \operatorname{Ric}) = \nabla_X(\operatorname{tr}^g \operatorname{Ric}) = \nabla_X r = X \cdot r = (dr)(X).$$

Dies zeigt die zweite Gleichung, $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr$. Zusammen mit Lemma III.1.6 folgt nun sofort $\operatorname{div} G = 0$. □

III.1.8. Satz (Schur). *Ist (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche n-Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(a) Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $G = fg$, dann ist f konstant.

Ist darüberhinaus $n \neq 2$, so gilt weiters:[8]

[8] Beachte jedoch, dass (a) für $n = 2$ trivialerweise erfüllt ist, da in diesem Fall ohnenhin stets $G = 0$ gilt, siehe Bemerkung III.1.5.

(b) *Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ric} = fg$, dann ist f konstant.*
(c) *Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $K_x(\xi) = f(x)$ für alle Ebenen $\xi \subseteq T_xM$, dann ist f konstant. In anderen Worten: ist die Schnittkrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.*[9]

Beweis. Ad (a): Aus $G = fg$ erhalten wir durch Kontraktion $\operatorname{tr} G = nf$, insbesondere muss f also glatt sein. Mit der kontrahierten Bianchi Identität in Proposition III.1.7 und Lemma III.1.6(c) folgt nun $0 = \operatorname{div} G = \operatorname{div}(fg) = df$, und somit muss f konstant sein. Ad (b): Aus $\mathrm{Ric} = fg$ folgt $G = (f - \frac{r}{2})g$ und mittels (a) sehen wir, dass $f - \frac{r}{2}$ konstant sein muss. Kontraktion liefert weiters $r = \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric} = \operatorname{tr}^g(fg) = nf$. Da $n \neq 2$ vorausgesetzt wurde, impliziert dies, dass auch f konstant ist. Ad (c): Mittels Lemma III.1.4 erhalten wir in diesem Fall $\mathrm{Ric} = (n-1)fg$, die Behauptung folgt daher aus (b). □

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi–Civita Konnexion ∇ und Riemannschen Krümmungstensor R. Weiters bezeichne $S \subseteq M$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Mittels $g|_S \in \Gamma(S^2T^*M|_S)$ erhalten wir eine orthogonale Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$. Die Einschränkung von $g|_S$ auf TS liefert eine Riemannsche Metrik $g_S \in \Gamma(S^2T^*S)$ auf S. Die Einschränkung von $g|_S$ auf $T^\perp S$ liefert eine Euklidische Metrik $g^\perp \in \Gamma(S^2(T^\perp S)^*)$ auf dem Normalenbündel $T^\perp S$. Wir bezeichnen die assozierten Orthogonalprojektionen mit $P : TM|_S \to TS$ und $Q : TM|_S \to T^\perp S$. Betrachte folgende die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\nabla^S_X Y &:= P(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\mathrm{II}(X, Y) &:= Q(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\nabla^\perp_X \xi &:= Q(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)\\
B_X(\xi) &:= -P(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)
\end{aligned}$$

Dabei wird II als *zweite Fundamentalform* bezeichnet, und B heißt *Weingartenabbildung.*

III.1.9. Satz. *Für $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ und $\xi, \eta \in \Gamma(T^\perp S)$ gilt:*
(a) *∇^S ist eine torsionsfreie mit g_S kompatible lineare Konnexion auf TS und stimmt daher mit der Levi–Civita Konnexion von (S, g_S) überein.*
(b) *$\nabla^\perp$ ist eine mit $g^\perp$ kompatible lineare Konnexion auf $T^\perp S$.*
(c) *Die zweite Fundamentalform* II *bildet ein Tensorfeld auf S, genauer haben wir $\mathrm{II} \in \Gamma(S^2T^*S \otimes T^\perp S)$, insbesondere also $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X)$.*

[9] Auch die ersten beiden Aussagen lassen sich ähnlich interpretieren. Etwa können wir die Ricci Krümmung äquivalent als eine Abbildung auffassen, die jeder Geraden $\xi \subseteq T_xM$ die Zahl $\mathrm{Ric}(X, X)/g(X, X)$ zuordnet, wobei X eine Basis des 1-dimensionalen Teilraums ξ bildet. Dies ist offensichtlich unabhängig vom verwendeten Basisvektor und enthält die volle Information über den Riccitensor, da dieser symmetrisch ist (Polarisieren). Behauptung (b) lässt sich daher auch wie folgt formulieren: ist die Riccikrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.

(d) *Die Weingartenabbildung B bildet ein Tensorfeld auf S, genauer haben wir $B \in \Gamma(T^*S \otimes (T^\perp S)^* \otimes TS)$, und es gilt die sogenannte* Weingarten Gleichung $g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) = g_S(Y, B_X\xi)$.

(e) *Bezeichnet R^S die Riemannkrümmung von (S, g_S), dann gilt die sogenannte* Gauß Gleichung, *vgl.* [**3**, Abschnitt 3.7],

$$g(R_{X,Y}Z,W) = g_S(R^S_{X,Y}Z,W) \\ + g^\perp\big(\mathrm{II}(X,Z),\mathrm{II}(Y,W)\big) - g^\perp\big(\mathrm{II}(Y,Z),\mathrm{II}(X,W)\big).$$

(f) *Bezeichnet $R^\perp$ die Krümmung der Konnexion $\nabla^\perp$ auf $T^\perp S$, dann gilt*

$$g(R_{X,Y}\xi,\eta) = g^\perp(R^\perp_{X,Y}\xi,\eta) - g_S(B_Y\xi, B_X\eta) + g_S(B_X\xi, B_Y\eta).$$

(g) *Es gilt die Codazzi–Mainardi Gleichung,*

$$g(R_{X,Y}Z,\xi) = g^\perp\big((\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z),\xi\big) - g^\perp\big((\tilde\nabla_Y \mathrm{II})(X,Z),\xi\big)$$

wobei $\tilde\nabla$ die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $S^2T^*S \otimes T^\perp S$ induziert Konnexion bezeichnet, dh. $(\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z) = \nabla^\perp_X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(\nabla^S_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, \nabla^S_X Z)$.

Beweis. Offensichtlich sind alle vier Ausdrücke $C^\infty(M)$ linear in X. Wenden wir auf die Gleichung $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X\cdot f)Y$ die Projektion P and so erhalten wir $\nabla^S_X(fY) = f\nabla^S_X Y + (X\cdot f)Y$, denn $P(Y) = Y$. Anwenden von Q liefert $\mathrm{II}(X, fY) = f\,\mathrm{II}(X,Y)$, denn $Q(Y) = 0$. Analog erhalten wir aus $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X\xi + (X\cdot f)\xi$ durch Anwenden von Q bzw. P die Gleichungen $\nabla^\perp_X(f\xi) = f\nabla^\perp_X\xi + (X\cdot f)\xi$ und $B_X(f\xi) = fB_X(\xi)$, denn $Q(\xi) = \xi$ und $P(\xi) = 0$. Wir schließen daraus, dass ∇^S und $\nabla^\perp$ lineare Konnexionen darstellen, und II und B Tensorfelder sind.

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$. Wenden wir darauf P folgt $\nabla^S_X Y - \nabla^S_Y X - [X,Y] = 0$, denn $P([X,Y]) = [X,Y]$. Somit ist auch ∇^S torsionsfrei. Wenden wir auf die selbe Gleichung Q an, so erhalten wir $\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = 0$, denn $Q([X,Y]) = 0$, also ist $\mathrm{II}(X,Y)$ symmetrisch in X und Y.

Wegen $\nabla g = 0$ gilt $Z\cdot g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ und somit auch $Z\cdot g_S(X,Y) = g_S(\nabla^S_Z X, Y) + g_S(X, \nabla^S_Z Y)$, also ist ∇^S mit g_S verträglich. Analog folgt aus $Z\cdot g(\xi,\eta) = g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta)$, dass $\nabla^\perp$ mit $g^\perp$ kompatibel ist. Schließlich erhalten wir aus $0 = X\cdot g(Y,\xi) = g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)$ auch $0 = g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) - g(Y, B_X\xi)$.

Damit sind (a) bis (d) gezeigt. Darüberhinaus gilt bezüglich der orthogonalen Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$,

$$\nabla^{TM|_S} = \nabla^S \oplus \nabla^\perp + \begin{pmatrix} 0 & -B \\ \mathrm{II} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Matrix als Element in $\Omega^1\big(S;\operatorname{end}(TS\oplus T^\perp S)\big)$ auffassen. Aus Proposition II.4.2(c)&(d) erhalten wir daraus

$$R^{TM|_S}=\begin{pmatrix}R^S & 0\\ 0 & R^\perp\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -d^{\nabla''}B\\ d^{\nabla'}\mathrm{II} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B\wedge\mathrm{II} & 0\\ 0 & \mathrm{II}\wedge B\end{pmatrix} \tag{III.11}$$

wobei ∇' bzw. ∇'' die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $\hom(TS,T^\perp S)$ bzw. $\hom(T^\perp S,TS)$ induzierten Konnexionen bezeichnen. Die beiden Gleichungen für die Diagonaleinträge liefern zusammen mit der Weingartengleichung (d) sofort (e) und (f). Wegen der Torsionsfreiheit gilt weiters $(d^{\nabla'}\mathrm{II})(X,Y,Z)=(\tilde\nabla_X\mathrm{II})(Y,Z)-(\tilde\nabla_Y\mathrm{II})(X,Z)$, folglich liefert der linke untere Eintrag in (III.11) die Codazzi–Mainardi Gleichung (g). $\square$

Unter einer (lokalen) *Isometrie* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir einen (lokalen) Diffeomorphismus $f\in\operatorname{Diff}(M)$ mit $f^*g=g$. Offensichtlich bildet die Menge aller Isometrien eine Untergruppe von $\operatorname{Diff}(M)$, die wir mit $\operatorname{Isom}(M,g)$ bezeichnen. Für jede Isometrie f gilt $f^*\nabla=\nabla$, denn die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ ist mit g kompatibel, $(f^*\nabla)g=(f^*\nabla)(f^*g)=f^*(\nabla g)=f^*0=0$, und torsionsfrei, $\operatorname{Tor}^{f^*\nabla}(f^*X,f^*Y)=(f^*\nabla)_{f^*X}(f^*Y)-(f^*\nabla)_{f^*Y}(f^*X)-[f^*X,f^*Y]=f^*(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y])=f^*\operatorname{Tor}^\nabla(X,Y)=f^*0=0$, und muss daher wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 mit der Levi–Civita Konnexion übereinstimmen, dh. $f^*\nabla=\nabla$. Für die Krümmung folgt $f^*R=R$, $f^*\operatorname{Ric}=\operatorname{Ric}$, $f^*r=r$ und $f^*K=K$, genauer $K(T_xf\cdot\xi)=K(\xi)$, für jede Ebene $\xi\subseteq T_xM$.

Der Fluss eines Vektorfeldes X ist genau dann eine (lokale) Isometrie, wenn $L_Xg=0$ gilt, denn $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Fl}^X_t)^*g=(\mathrm{Fl}^X_t)^*(L_Xg)$. Solche Vektorfelder werden *Killing Vektorfelder,* genannt sie können als *infinitesimale Isometrien* interpretiert werden. Eine einache Rechnung, vgl. Aufgabe 50, zeigt

$$L_Xg=2\operatorname{sym}\nabla X,\quad\text{dh.}\quad (L_Xg)(Y,Z)=g(\nabla_YX,Z)+g(\nabla_ZX,Y). \tag{III.12}$$

Killing Vektorfelder sind daher durch die Gleichung $\operatorname{sym}\nabla X=0$ charakterisiert. Insbesondere ist jedes parallele Vektorfeld $\nabla X=0$ auch ein Killing Vektorfeld.

III.1.10. Beispiel (Euklidische Geometrie, $K=0$)**.** Betrachte den Euklidischen Raum $\mathbb R^n$ mit der Riemannschen Metrik

$$g=dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^n\otimes dx^n.$$

Die triviale Konnexion auf $T\mathbb R^n=\mathbb R^n\times\mathbb R^n$ ist offensichtlich mit g kompatibel und torsionsfrei. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 sehen wir daher, dass die Levi–Civita Konnexion von $(\mathbb R^n,g)$ mit der trivialen Konnexion übereinstimmt. Insbesondere sind die Koordinatenvektorfelder parallel, dh. $\nabla\frac{\partial}{\partial x^i}=0$, und daher $R=0$. Der flache Euklidische Raum hat daher konstante Schnittkrümmung $K=0$. Beachte, dass jede affine Abbildung $f(x)=Ax+b$ mit $A\in\mathrm O_n$ und $b\in\mathbb R^n$, eine Isometrie von $(\mathbb R^n,g)$ ist.

Analog sieht man, dass der sogenannte *flache Torus*, $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ mit Riemannscher Metrik $g := \theta^1 \otimes \theta^1 + \cdots + \theta^n \otimes \theta^n$, eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K = 0$ darstellt. Hier ist $\theta^i := p_i^*\theta \in \Omega^1(T^n)$, wobei $p_i : T^n \to S^1$ die Projektion auf die i-te Koordinate und $\theta \in \Omega^1(S^1)$ die standard Winkelform bezeichnen. Beachte, dass die glatte Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$ eine lokale Isometrie bildet.

III.1.11. Beispiel (Sphärische Geometrie, $K > 0$)**.** Es sei $r > 0$ und es bezeichne $S := S^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre mit Radius r. Wir versehen S^n_r mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $g = \sum_{i=0}^n dx^i \otimes dx^i$ induzierten Riemannschen Metrik g_S. Betrachte das radiale Vektorfeld $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, $N(x) := x = \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Beachte, dass N normal auf S steht, und $g^\perp(N,N) = r^2$ gilt. Aus $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ folgt $\nabla N = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$, und mit Hilfe der Weingartengleichung, siehe Proposition III.1.9(d), daher $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$. Zusammen mit der Gauß Gleichung aus Proposition III.1.9(e), liefert dies

$$0 = g_S(R^S_{X,Y}X, Y) + \tfrac{1}{r^2} g_S(X,X) g_S(Y,Y) - \tfrac{1}{r^2} g_S(X,Y) g_S(X,Y).$$

Daraus folgt nun, dass S^n_r konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, dass jedes $A \in \mathrm{O}_{n+1}$ eine Isometrie von S^n_r darstellt, dh. $\mathrm{O}_{n+1} \subseteq \mathrm{Isom}(S^n_r)$. Wir werden später sehen, dass jede Isometrie der Sphäre von dieser Form ist, dh. $\mathrm{O}_{n+1} = \mathrm{Isom}(S^n_r)$.

III.1.12. Beispiel (Hyperbolische Geometrie, $K < 0$)**.** Betrachte wieder $\mathbb{R}^{n+1}$, nun aber mit der pseudo Riemannschen Metrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$. Für $r > 0$ bildet das Hyperboloid $S = H^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x,x) = -r^2\}$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit und g induziert eine (positiv definite) Riemannsche Metrik g_S auf H^n_r. Wie im vorangehenden Beispiel folgt $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$, jedoch gilt nun $g^\perp(N,N) = -r^2$, denn $g^\perp$ ist negativ definit. Aus der Gauß Gleichung folgt dann wie zuvor, dass H^n_r konstante Schnittkrümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, $\mathrm{O}(1,n) \subseteq \mathrm{Isom}(H^n_r)$, tatsächlich gilt auch hier wieder Gleichheit.

III.1.13. Proposition (Variationsformeln)**.** *Es sei (M,g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Volumsform* vol*, Levi–Civita Konnexion ∇, und assozierten Krümmungstensoren R,* Ric *und r. Weiters sei g_t, $t \in \mathbb{R}$, eine glatte Familie von Riemannmetriken auf M mit $g_0 = g$, und es bezeichne $\dot g := \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2T^*M)$. Schließlich definieren wir auf S^2T^*M eine Euklidische Metrik*

$$\langle h, k\rangle := \operatorname{tr}\operatorname{tr}_{13}(h \otimes k) = \sum_{i,j=1}^n h(e_i,e_j)k(e_i,e_j), \qquad h,k \in S^2T^*_xM,$$

wobei dies unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. In dieser Situation gelten die folgenden Variationsformeln, $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $\dot{\mathrm{vol}} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \mathrm{vol}^{g_t} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\dot g = \frac{1}{2}\langle g, \dot g\rangle$.

(b) Mit $\dot\nabla := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \nabla^{g_t} \in \Gamma(S^2T^*M \otimes TM)$ *gilt*

$$g(\dot\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z \dot g)(X,Y)\Big).$$

und daher auch $\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla = \frac{1}{2}d\operatorname{tr}(\dot g)$ *und* $\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla = \operatorname{div}\dot g - \frac{1}{2}d\operatorname{tr}(\dot g)$.

(c) Mit $\dot R := \frac{\partial}{\partial t}|_0 R^{g_t}$ *gilt* $\dot R_{X,Y}Z = (\nabla_X\dot\nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y\dot\nabla)(X,Z)$.

(d) Mit $\dot r := \frac{\partial}{\partial t}|_0 r^{g_t}$ *gilt*

$$\dot r = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla) - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla) = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}\operatorname{div}\dot g + \Delta\operatorname{tr}(\dot g),$$

wobei wird der Laplace Operator auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ *durch* $\Delta f := -\operatorname{div} df = -\operatorname{tr}\nabla\nabla f$ *definiert ist.*

Beweis. Es sei $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte orthonormale Basis von T_xM bezüglich $g = g_0$, und es bezeichnet $e^1, \dots, e^n \in T_x^*M$ die duale Basis, $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Für beliebiges t gilt dann

$$\operatorname{vol}_x^{g_t} = \sqrt{\det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big)}\, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n. \tag{III.13}$$

Zusammen mit $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}\big(\dot g(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}(\dot g) = \langle g, \dot g\rangle$ folgt nun (a). Ableiten von (III.4) liefert

$$\begin{aligned}
g(\dot\nabla_X Y, Z) + \dot g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\Big(X\cdot \dot g(Y,Z) + Y \cdot \dot g(Z,X) - Z\cdot \dot g(X,Y) \\
&\qquad + \dot g([X,Y],Z) - \dot g([Y,Z],X) + \dot g([Z,X],Y)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z \dot g)(X,Y) \\
&\qquad + 2\dot g(\nabla_X Y, Z)\Big)
\end{aligned}$$

und damit (b). Aus Proposition II.4.2(c) erhalten wir $\dot R = d^\nabla \dot\nabla$, dh.

$$\dot R_{X,Y}Z = (\nabla_X \dot\nabla_Y)Z - (\nabla_Y\dot\nabla_X)Z - \dot\nabla_{[X,Y]}Z.$$

Kombinieren wir dies mit $(\nabla_X\dot\nabla)(Y,Z) = (\nabla_X\dot\nabla_Y)Z - \dot\nabla_{\nabla_X Y}Z$ und $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ so folgt (c). Da $\operatorname{Ric}^{g_t} = -\operatorname{tr}_{24} R^{g_t}$ gilt $\dot{\operatorname{Ric}} = -\operatorname{tr}_{24}\dot R$. Weiters haben wir $r^{g_t} = \operatorname{tr}^{g_t}\operatorname{Ric}^{g_t} = \operatorname{tr}(\sharp_2^{g_t}\operatorname{Ric}^{g_t})$ und somit

$$\dot r = \operatorname{tr}(\dot\sharp_2 \operatorname{Ric}) + \operatorname{tr}(\sharp_2 \dot{\operatorname{Ric}}) = -\langle\operatorname{Ric},\dot g\rangle + \operatorname{tr}\dot{\operatorname{Ric}} = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle - \operatorname{tr}\operatorname{tr}_{24}\dot R.$$

Kombinieren wir dies mit (c) so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot r &= -\langle\operatorname{Ric},\dot g\rangle - \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_i}\dot\nabla)(e_j,e_i),e_j\big) + \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_j}\dot\nabla)(e_i,e_i),e_j\big), \\
&= -\langle\operatorname{Ric},\dot g\rangle - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla) + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla),
\end{aligned}$$

denn die Levi–Civita Konnexion vertauscht mit Kontraktionen. □

III.1.14. Beispiel (Einstein–Hilbert Wirkung)**.** Es sei M eine orientierte (geschlossene) Mannigfaltigkeit. Zu jeder Riemannschen Metrik g auf M betrachte

$$E(g) := \int_M r \operatorname{vol}, \tag{III.14}$$

wobei r und vol die Skalarkrümmung und Volumsform von g bezeichnen. Wir wollen nun die kritischen Punkte dieser Wirkung bestimmen. Dazu betrachten wir eine beliebige glatte 1-parameter Familie Riemannscher Metriken g_t (Variation der Metrik) mit $g_0 = g$. Setzen wir $\dot g = \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2T^*M)$, so erhalten wir mit Hilfe von Proposition III.1.13(a)&(d) und Lemma III.1.6(e),

$$\begin{aligned}\dot E := \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 E(g_t) &= \int_M \dot r \operatorname{vol} + r \dot{\operatorname{vol}} \\ &= -\int_M \langle \operatorname{Ric} - \tfrac{r}{2} g, \dot g\rangle \operatorname{vol} + \int_M \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla - \operatorname{tr}_{23}\dot\nabla) \operatorname{vol} = -\int_M \langle G, \dot g\rangle \operatorname{vol},\end{aligned}$$

wobei $G = \operatorname{Ric} - \frac{r}{2} g$ den Einsteintensor von g bezeichnet. Ist g kritisch, so muss $\dot E$, für jede solche Variation der Metrik verschwinden. Insbesondere können wir $g_t := g + tG$ betrachten, und erhalten aus obiger Formel $\int_M \langle G, G\rangle \operatorname{vol} = 0$, also $G = 0$. Wir sehen daher, dass die kritischen Punkte der Einstein–Hilbert Wirkung (III.14) genau die Riemannschen Metriken g mit verschwindendem Einsteintensor sind, $G = 0$. Für $\dim M \neq 2$ ist die Gleichung $G = 0$ zu $\operatorname{Ric} = 0$ äquivalent, denn $\operatorname{tr} G = (1 - \frac{n}{2})r$. Beachte, dass nach dem Satz von Gauß–Bonnet, siehe (III.10), die Wirkung $E(g)$ im 2-dimensionalen Fall unabhängig von g ist. Dies ist mit obiger Rechnung verträglich, denn im 2-dimensionalen Fall gilt ja stets $G = 0$, vgl. Bemerkung III.1.5.

III.1.15. Beispiel (Minimalflächen)**.** Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder (geschlossenen) orientierten Teilmannigfaltigkeit S ordnen wir ihr induziertes Volumen zu,

$$V(S) := \int_S \operatorname{vol}_S^g, \tag{III.15}$$

wobei vol_S^g die Volumsform der auf S von g induzierten Riemannschen Metrik g_S bezeichnet. Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Variation der Teilmannigfaltigkeit $S_t := \operatorname{Fl}_t^X(S)$, definiert für hinreichend kleines t. Mit Hilfe von (III.12) und Proposition III.1.13(a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_{S_t} \operatorname{vol}_{S_t}^g = \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_S \operatorname{vol}_S^{(\operatorname{Fl}_t^X)^* g} \\ &= \frac{1}{2}\int_S \operatorname{tr}_S\big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 (\operatorname{Fl}_t^X)^* g\big) \operatorname{vol}_S^g = \frac{1}{2}\int_S \operatorname{tr}_S(L_X g) \operatorname{vol}_S^g = \int_S \operatorname{tr}_S(\nabla X) \operatorname{vol}_S^g .\end{aligned}$$

Zerlegen wir nun X längs S in Tangential- und Normalteil, $X|_S = PX + QX$, dann folgt aus der Weingartengleichung $\operatorname{tr}_S(\nabla X) = \operatorname{tr}_S(\nabla(PX)) + \operatorname{tr}_S(\nabla(QX)) =$

$\operatorname{div}_S(X) - g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)$ und somit

$$\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) = \int_S \operatorname{div}(PX)\operatorname{vol}_S^g - \int_S g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)\operatorname{vol}_S^g = -\int_S g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)\operatorname{vol}_S^g.$$

Die kritischen Punkte von (III.15) sind daher genau jene Teilmannigfaltigkeiten S, deren *mittlere Krümmung* $H := \operatorname{tr}\mathrm{II} \in \Gamma(T^\perp S)$ verschwindet.

III.1.16. Bemerkung (Kartendarstellungen)**.** Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann existieren $g_{ij} \in C^\infty(U)$ mit

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Für jedes $x \in U$ bildet daher $g_{ij}(x)$ eine symmetrische positiv definite Matrix, $g_{ij} = g_{ji}$. Unter den mit der Karte u assozierten *Christoffel Symbolen* verstehen wir die durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \tfrac{\partial}{\partial u^j} =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial u^k}$$

eindeutig bestimmten lokal definierten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Aus der Formel für die Levi–Civita Konnexion (III.4) erhalten wir sofort

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial u^j} g_{li} - \tfrac{\partial}{\partial u^l} g_{ij}\Big) \tag{III.16}$$

wobei $g^{kl}(x)$ die zu $g_{ij}(x)$ inverse Matrix bezeichnet, $x \in U$, dh. $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Da die Levi–Civita Konexion torsionsfrei ist, gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Kartendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors $R_{ijk}^l \in C^\infty(U)$

$$R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k} =: \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \tfrac{\partial}{\partial u^l},$$

Aus (III.5) erhalten wir sofort

$$R_{kij}^l = \tfrac{\partial}{\partial u^i}\Gamma_{jk}^l - \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \Big(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\Big) \tag{III.17}$$

was, zusammen mit (III.16) die Berechung von R erlaubt, wenn die Koordinatendarstellung g_{ij} der Metrik bekannt ist. Beachte, dass die Riemannkrümmung R in nicht linearer Weise von Ableitungen bis zweiter Ordnung der Metrik g abhängt. Mit

$$R_{lkij} := g\big(R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k}, \tfrac{\partial}{\partial u^l}\big) = \sum_{m=1}^n R_{kij}^m g_{ml}$$

lassen sich die Symmetrien in Proposition III.1.2 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} R_{lkij} &= -R_{lkji} \\ R_{lkij} &= -R_{klij} \\ R_{lkij} &= R_{ijlk} \\ 0 &= R_{lkij} + R_{lijk} + R_{ljki} \end{aligned}$$

III.2. Hodge Theorie. Es sei M eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Riemannsche Metrik induziert Euklidische Metriken auf den Vektorbündeln $\Lambda^q T^*M$, die wie folgt charakterisiert werden können. Ist $e_1, \dots, e_n \in T_xM$ eine Orthonormalbasis von T_xM, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ die duale Basis von T^*_xM, dann bilden $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$, eine Orthonormalbasis von $\Lambda^q T^*_xM$. Wir werden dieses innere Produkt auf $\Lambda^q T^*_xM$ im folgenden mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen. Für $\alpha, \beta \in \Omega^q(M)$ erhalten wir daher $\langle \alpha, \beta \rangle \in C^\infty(M)$.

Unter dem *Hodge Sternoperator* verstehen wir den durch folgende Bedingung eindeutig charakterisierten Vektorbündelisomorphismus

$$\star : \Lambda^q T^*M \to \Lambda^{n-q} T^*M, \qquad \alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol}. \tag{III.18}$$

Dies ist tatsächlich wohldefiniert, denn $\Lambda^q T^*_xM \times \Lambda^{n-q} T^*_xM \xrightarrow{\wedge} \Lambda^n T^*_xM \cong \mathbb{R}$, ist eine nicht-degenerierte bilineare Paarung. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ die duale (orthonormale) Basis von T^*_xM, dann erhalten wir aus (III.18) und $\operatorname{vol}_x = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$, sofort

$$\star\, e^1 \wedge \cdots \wedge e^q = e^{q+1} \wedge \cdots \wedge e^n, \tag{III.19}$$

insbesondere also $\star f = f \operatorname{vol}$ für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Aus (III.19) folgt weiters

$$\star^2 = (-1)^{q(n-q)} : \Lambda^q T^*M \to \Lambda^q T^*M, \qquad \star\star\,\alpha = (-1)^{|\alpha|(n-|\alpha|)}\alpha. \tag{III.20}$$

Auf $\Omega^q_c(M)$ definieren wir ein inneres Produkt

$$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol} = \int_M \alpha \wedge \star\beta, \qquad \alpha, \beta \in \Omega^q_c(M). \tag{III.21}$$

Dies ist offensichlich bilinear und symmetrisch, es gilt aber auch $\langle\!\langle \alpha, \alpha \rangle\!\rangle \geq 0$ sowie $\langle\!\langle \alpha, \alpha \rangle\!\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. Dadurch wird $\Omega^q_c(M)$ also zu einem reellen (nicht vollständigen) PräHilbertraum.

Unter der sogenannten *Koableitung* verstehen wir den Operator

$$\delta := (-1)^q \star^{-1} d\star : \Omega^q(M) \to \Omega^{q-1}(M), \qquad \delta\alpha = (-1)^{|\alpha|} \star^{-1} d \star \alpha. \tag{III.22}$$

Die Vorzeichenkonvention ist durch folgendes Lemma motiviert.

III.2.1. Lemma. *Die Koableitung ist formal adjungiert zum deRham Differential, dh. es gilt $\langle\!\langle d\alpha, \beta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha, \delta\beta \rangle\!\rangle$, für alle $\alpha \in \Omega^{q-1}_c(M)$ und $\beta \in \Omega^q(M)$.*

Beweis. Mit Hilfe der Leibnizregel und des Satzes von Stokes erhalten wir aus (III.21) und (III.22) sofort

$$\begin{aligned}\langle\langle d\alpha, \beta\rangle\rangle = \int_M d\alpha \wedge \star\beta = \int_M d(\alpha \wedge \star\beta) + (-1)^q \alpha \wedge d \star \beta \\ = (-1)^q \int_M \alpha \wedge \star\star^{-1} d \star \beta = \int_M \alpha \wedge \star\delta\beta = \langle\langle \alpha, \delta\beta\rangle\rangle,\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Aus der Definition der Koableitung (III.22) und $d^2 = 0$, erhalten wir weiters

$$\delta^2 = 0, \quad \text{dh.} \quad \delta\delta\alpha = 0. \tag{III.23}$$

Unter dem *Hodge–Laplace Operator* auch *Laplace–Beltrami* oder *deRham–Laplace Operator*, verstehen wir

$$\Delta := d\delta + \delta d = (d + \delta)^2 : \Omega^q(M) \to \Omega^q(M). \tag{III.24}$$

Aus Lemma III.2.1 sehen wir, dass Δ formal selbstadjungiert ist, dh. es gilt

$$\langle\langle \Delta\alpha, \beta\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \Delta\beta\rangle\rangle, \qquad \alpha \in \Omega^q_c(M),\ \beta \in \Omega^q(M). \tag{III.25}$$

Darüber hinaus ist Δ positiv semidefinit, dh. es gilt

$$\langle\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\rangle \geq 0, \qquad \alpha \in \Omega^q_c(M),$$

denn aus Lemma III.2.1 folgt sofort $\langle\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\rangle = \langle\langle d\alpha, d\alpha\rangle\rangle + \langle\langle \delta\alpha, \delta\alpha\rangle\rangle$. Aus dieser Gleichung erhalten wir auch

$$\ker \Delta = \ker(d + \delta) = \ker d \cap \ker \delta. \tag{III.26}$$

Beachte weiters die Relationen

$$d\Delta = \Delta d, \quad \delta\Delta = \Delta\delta \quad \text{und} \quad \star\Delta = \Delta\star. \tag{III.27}$$

Weitere Details zu diesen Betrachtungen finden sich etwa in [**6**, Kapitel 12].

III.2.2. Satz (Hodge Zerlegung)**.** *Ist M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so haben wir eine orthogonale Zerlegung*

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \Delta.$$

Beweis. Beachte zunächst, dass die Inklusion $\ker \Delta \to \ker d$, siehe (III.26), eine injektive lineare Abbildung $\ker \Delta \to H^*(M)$ induziert, denn nach (III.26) und Lemma III.2.1 gilt $\ker \Delta \cap \operatorname{img} d \subseteq \ker \delta \cap \operatorname{img} d \subseteq \ker \delta \cap (\ker \delta)^\perp = 0$. Wir sehen daher, dass $\ker \Delta$ endlich dimensional ist, denn nach Korollar I.3.26 ist $H^*(M)$ endlich dimensional. Daraus erhalten wir eine orthogonale Zerlegung

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus (\ker \Delta)^\perp,$$

denn mit Hilfe einer Orthonormalbasis $\beta_1, \dots, \beta_N$ von $\ker \Delta$ lässt sich jede Form $\alpha \in \Omega^*(M)$ als

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \langle\!\langle \alpha, \beta_i \rangle\!\rangle \beta_i + \Big(\alpha - \sum_{i=1}^N \langle\!\langle \alpha, \beta_i \rangle\!\rangle \beta_i\Big)$$

schreiben, wobei der erste Summand in $\ker \Delta$, und der zweite in $(\ker \Delta)^\perp$ liegt. Aus (III.25) folgt weiters $\ker \Delta = (\operatorname{img} \Delta)^\perp$. Könnten wir daraus $(\ker \Delta)^\perp = \operatorname{img} \Delta$ schließen, so wäre der Beweis vollständig. Dieser Schritt lässt sich tatsächlich durführen, erfordert jedoch einige nicht-triviale analytische Überlegungen. Details finden sich etwa in [**12**, Theorem 5.5], [**7**, Section 2.2] oder [**11**]. Die oben erwähnte Analysis zeigt auch, dass $\ker \Delta$ endlich dimensional ist, ohne auf Korollar I.3.26 zurückzugreifen. □

III.2.3. Korollar (Hodge Zerlegung)**.** *Ist M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so haben wir eine orthogonale Zerlegungen*

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta. \tag{III.28}$$

Darüber hinaus gilt:

(a) $\operatorname{img} \Delta = \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta$
(b) $\ker d = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d$
(c) $\ker \delta = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \delta$

Beweis. Aus Lemma III.2.1 folgt $\operatorname{img} d \perp \ker \delta$ und $\ker d \perp \operatorname{img} \delta$. Da $\operatorname{img} d \subseteq \ker d$ erhalten insbesondere $\operatorname{img} d \perp \operatorname{img} \delta$. Zusammen mit (III.26) folgt weiters $\ker \Delta \perp \operatorname{img} d$ und $\ker \Delta \perp \operatorname{img} \delta$. Alle Summen im Korollar sind daher orthogonal und somit auch direkt.

Aus $\operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta \perp \ker \Delta$ und Satz III.2.2 folgt $\operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta \subseteq \operatorname{img} \Delta$ und somit (a), denn die umgekehrte Inklusion $\operatorname{img} \Delta \subseteq \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta$ ist offensichtlich. Zusammen mit Satz III.2.2 erhalten wir nun auch die Zerlegung (III.28). Aus $\ker d \perp \operatorname{img} \delta$ und (III.28) folgt $\ker d \subseteq \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d$ und somit (b), denn die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich. Analog erhalten wir aus $\ker \delta \perp \operatorname{img} d$ und (III.28) nun $\ker \delta \subseteq \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \delta$ und daher (c). □

Eine Differentialform $\alpha \in \Omega^q(M)$ wird *harmonisch* genannt, falls $\Delta \alpha = 0$. Nach (III.26) ist dies zu $d\alpha = 0 = \delta\alpha$ äquivalent. Aus Korollar III.2.3(b) erhalten wir sofort folgendes Resultat.

III.2.4. Korollar. *Auf einer geschlossenen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt jede deRham Kohomologieklasse einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten, dh.* $H^*(M) = \ker \Delta = \ker(d + \delta) = \ker d \cap \ker \delta$.

III.2.5. Bemerkung. Aus Korollar III.2.4 erhalten wir einen neuen Beweis der Poincaré Dualität für geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten. Nach (III.27) induziert der Hodge Sternoperator nämlich einen Isomorphismus $\star : \ker \Delta \cong \ker \Delta$, und liefert daher Isomorphismen $H^q(M) \cong H^{n-q}(M)$.

III.2.6. Lemma. *Ist e_j ein lokaler Orthonormalrahmen von TM, dann gilt*

$$\delta\alpha = -\sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M).$$

Beweis. Wir erinnern uns zunächst an die Formel, siehe Aufgabe 46,

$$d\alpha = \sum_j e^j \wedge \nabla_{e_j}\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M), \tag{III.29}$$

wobei e^j den zu e_j dualen lokalen Orthonormalrahmen von T^*M bezeichnet. Weiters gilt

$$\nabla\star = 0, \quad \text{dh.} \quad \nabla_X(\star\alpha) = \star\nabla_X\alpha, \quad \alpha \in \Omega^q(M),\ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{III.30}$$

Dies lässt sich durch Ableiten der definierenden Gleichung $\beta \wedge \star\alpha = \langle\beta, \alpha\rangle \operatorname{vol}$, vgl. (III.18), verifizieren. Daraus folgt nämlich unter Verwendung von $\nabla_X \operatorname{vol} = 0$,

$$\begin{aligned}\nabla_X\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge \nabla_X(\star\alpha) &= \nabla_X\big(\beta \wedge \star\alpha\big) = \nabla_X\big(\langle\beta, \alpha\rangle \operatorname{vol}\big)\\ &= \langle\nabla_X\beta, \alpha\rangle \operatorname{vol} + \langle\beta, \nabla_X\alpha\rangle \operatorname{vol} = \nabla_X\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge \star\nabla_X\alpha,\end{aligned}$$

also $\beta \wedge \nabla_X(\star\alpha) = \beta \wedge \star\nabla_X\alpha$ für alle β, und somit (III.30). Schließlich haben wir

$$\sigma \wedge \star\alpha = (-1)^{q-1} \star i_{\sharp\sigma}\alpha, \qquad \sigma \in \Omega^1(M),\ \alpha \in \Omega^q(M). \tag{III.31}$$

Diese letzte Relation lässt sich leicht aus (III.19) herleiten. Aus (III.29), (III.30) und (III.31) erhalten wir nun

$$d \star \alpha = \sum_j e^j \wedge \nabla_{e_j}(\star\alpha) = \sum_j e^j \wedge \star\nabla_{e_j}\alpha = (-1)^{q-1} \star \sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha,$$

und somit $\delta\alpha = (-1)^q \star^{-1} d \star \alpha = -\sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha$, wie behauptet. □

Wir wollen im verbleibenden Teil dieses Abschnitts noch die sogenannte *Bochner Methode* an einem Spezialfall, siehe Satz III.2.9 unten, besprechen. Bochners Argument basiert auf der sogenannten Weitzenböck Formel, die den Laplace–Beltrami Operator Δ mit dem Konnexions Laplace $\nabla^*\nabla$ in Zusammenhang bringt, vgl. Proposition III.2.8 unten.

Wir beginnen damit den Konnexions Laplace zu definieren. Sei dazu E ein Euklidisches Vektorbündel mit kompatibler Konnexion über einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Wir werden die Metriken auf TM, E und die davon induzierte Euklidische Metrik auf $T^*M \otimes E$ alle mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen.[10] Auf den Schnitten von E definieren wir analog zu (III.21) ein inneres Produkt,

$$\langle\!\langle s, t\rangle\!\rangle := \int_M \langle s, t\rangle \operatorname{vol}, \qquad s, t \in \Gamma_c(E).$$

[10] Die induzierte Euklidische Metrik auf $T^*M \otimes E$ kann wie folgt charakterisiert werden. Ist e^i eine Orthonormalbasis von T_x^*M und f_j eine Orthonormalbasis von E_x, dann bildet $e^i \otimes f_j$ eine Orthonormalbasis von $T_x^*M \otimes E_x$. Für zerlegbare Tensoren gilt daher $\langle\omega_1 \otimes s_1, \omega_2 \otimes s_2\rangle = \langle\omega_1, \omega_2\rangle\langle s_1, s_2\rangle$, wobei $\omega_i \in T_x^*M$ und $s_i \in E_x$, $x \in M$.

Da auch $T^*M\otimes E$ ein Euklidisches Vektorbündel ist, liefert dieselbe Konstruktion ein inneres Produkt auf $\Gamma_c(T^*M\otimes E)$.

Betrachte nun den Operator

$$\nabla^*\colon \Gamma(T^*M\otimes E)\to\Gamma(E),\qquad \nabla^*\alpha := -\operatorname{tr}_{12}\nabla\alpha.$$

Dabei bezeichnet ∇ die von der Konnexion auf E und der Levi–Civita Konnexion induzierte Konnexion auf $T^*M\otimes E$, dh. $\nabla\alpha\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M\otimes E)$, und tr_{12} steht für die Kontraktion der ersten beiden Faktoren unter Verwendung der Riemannmetrik. Ist e_i ein lokaler Orthonormalrahmen von TM, dann gilt

$$\nabla^*\alpha = \sum_i \alpha(\nabla_{e_i}e_i) - \nabla_{e_i}(\alpha(e_i)), \tag{III.32}$$

denn $\nabla^*\alpha = -\sum_i(\nabla_{e_i}\alpha)(e_i) = \sum_i \alpha(\nabla_{e_i}e_i) - \nabla_{e_i}(\alpha(e_i))$. Das Vorzeichen in der Definition von ∇^* ist durch folgendes Lemma motiviert.

III.2.7. Lemma. *Der Operator $\nabla^*\colon\Gamma(T^*M\otimes E)\to\Gamma(E)$ ist formal adjungiert zu $\nabla\colon\Gamma(E)\to\Gamma(T^*M\otimes E)$, dh. es gilt $\langle\!\langle\nabla s,\alpha\rangle\!\rangle = \langle\!\langle s,\nabla^*\alpha\rangle\!\rangle$, für alle $\alpha\in\Gamma(T^*M\otimes E)$ und $s\in\Gamma_c(E)$.*

Beweis. Es sei e_i ein lokaler Orthonormalrahmen von TM und es bezeichne e^i den dualen lokalen Orthonormalrahmen von T^*M. Dann gilt $\nabla s = \sum_i e^i\otimes\nabla_{e_i}s$, $\alpha = \sum_j e^j\otimes\alpha(e_j)$ und daher

$$\langle\nabla s,\alpha\rangle = \sum_{i,j}\big\langle e^i\otimes\nabla_{e_i}s, e^j\otimes\alpha(e_j)\big\rangle = \sum_i\langle\nabla_{e_i}s,\alpha(e_i)\rangle.$$

Aus (III.32) erhalten wir weiters

$$\langle s,\nabla^*\alpha\rangle = \sum_i\langle s,\alpha(\nabla_{e_i}e_i)\rangle - \langle s,\nabla_{e_i}(\alpha(e_i))\rangle.$$

Da die Metrik auf E parallel ist, gilt $e_i\cdot\langle s,\alpha(e_i)\rangle = \langle\nabla_{e_i}s,\alpha(e_i)\rangle + \langle s,\nabla_{e_i}(\alpha(e_i))\rangle$, und wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\langle\nabla s,\alpha\rangle - \langle s,\nabla^*\alpha\rangle &= \sum_i e_i\cdot\langle s,\alpha(e_i)\rangle - \langle s,\alpha(\nabla_{e_i}e_i)\rangle\\ &= \sum_i(\nabla_{e_i}\omega)(e_i) = \operatorname{tr}_{12}\nabla\omega = \operatorname{div}\omega,\end{aligned}$$

wobei die 1-Form $\omega\in\Omega^1_c(M)$ durch $\omega(X) := \langle s,\alpha(X)\rangle$ definiert ist, $X\in\mathfrak{X}(M)$. Mittels Lemma III.1.6(e) folgt nun durch Integration $\langle\!\langle\nabla s,\alpha\rangle\!\rangle = \langle\!\langle s,\nabla^*\alpha\rangle\!\rangle$. □

Die Komposition von $\nabla\colon\Gamma(E)\to\Gamma(T^*M\otimes E)$ mit $\nabla^*\colon\Gamma(T^*M\otimes E)\to\Gamma(E)$ liefert einen Operator

$$\nabla^*\nabla:\Gamma(E)\to\Gamma(E),\qquad \nabla^*\nabla s = -\operatorname{tr}_{12}\nabla\nabla s,$$

der als *Konnexions Laplace* bezeichnet wird. Aus Lemma III.2.7 erhalten wir

$$\langle\!\langle\nabla^*\nabla s,t\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\nabla s,\nabla t\rangle\!\rangle = \langle\!\langle s,\nabla^*\nabla t\rangle\!\rangle,\qquad s\in\Gamma(E),\ t\in\Gamma_c(E), \tag{III.33}$$

also ist $\nabla^*\nabla$ formal selbstadjungiert. Ist e_i ein lokaler Orthonormalrahmen, dann folgt aus (III.32)

$$\nabla^*\nabla s = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s + \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i}e_i} s, \qquad s \in \Gamma(E). \tag{III.34}$$

Der Konnexions Laplace auf $E = \Lambda^q T^*M$ unterscheidet sich vom Laplace–Beltrami Operator nur durch einen Krümmungsterm. Genauer, gilt die sogenannte *Weitzenböck Formel,* siehe etwa [**7**, Theorem 3.3.3], [**11**, equation (3.16)] oder [**12**, Corollary 8.3].

III.2.8. Proposition (Weitzenböck Formel)**.** *Für jedes $\alpha \in \Omega^1(M)$ gilt*

$$\Delta\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \operatorname{Ric}(\sharp\alpha, -).$$

Allgemeiner gilt für $\alpha \in \Omega^q(M)$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j,k,l}\langle R_{e_i,e_j}e_k, e_l\rangle\; e^i \wedge i_{e_j}(e^l \wedge i_{e_k}\alpha) \\ &= \nabla^*\nabla\alpha + \sum_{i,j,k,l}\langle R_{e_i,e_j}e_k, e_l\rangle\; e^i \wedge e^l \wedge i_{e_j} i_{e_k}\alpha + \sum_{i,k}\operatorname{Ric}(e_i,e_k) e^i \wedge i_{e_k}\alpha,\end{aligned} \tag{III.35}$$

wobei e_i einen lokalen Orthonormalrahmen von TM bezeichnet.

Beweis. Aus Aufgabe 46 und Lemma III.2.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}d\delta\alpha &= -\sum_{i,j} e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha) \\ &= -\sum_{i,j} e^i \wedge i_{\nabla_{e_i}e_j}\nabla_{e_j}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha \\ &= \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{\nabla_{e_i}e_j}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha\end{aligned} \tag{III.36}$$

sowie

$$\begin{aligned}\delta d\alpha &= -\sum_{i,j} i_{e_j}\nabla_{e_j}(e^i \wedge \nabla_{e_i}\alpha) \\ &= -\sum_{i,j} i_{e_j}\big((\nabla_{e_j}e^i) \wedge \nabla_{e_i}\alpha\big) - \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha\big) \\ &= \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{\nabla_{e_j}e_i}\alpha\big) - \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha\big) \\ &= \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{\nabla_{e_j}e_i}\alpha - \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\alpha + \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha\end{aligned} \tag{III.37}$$

Aus (III.36), (III.37) und (III.34) folgt nun

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= d\delta\alpha + \delta d\alpha \\ &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha - \nabla_{\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i}\alpha\big) \\ &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j} R^{\Lambda^q T^*M}_{e_i,e_j}(\alpha), \end{aligned} \tag{III.38}$$

wobei $R^{\Lambda^q T^*M}$ die Krümmung der Konnexion auf $\Lambda^q T^*M$ bezeichnet. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\beta \in \Omega^p(M)$ gilt $\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X\beta$ und daher $R^{\Lambda^{p+q}T^*M}_{X,Y}(\alpha \wedge \beta) = R^{\Lambda^q T^*M}_{X,Y}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge R^{\Lambda^p T^*M}_{X,Y}(\beta)$, dh. die Krümmung wirkt als Derivation. Daraus folgt nun

$$R^{\Lambda^q T^*M}_{X,Y}(\alpha) = \sum_{k,l} \langle R_{X,Y}e_k, e_l\rangle e^l \wedge i_{e_k}\alpha, \tag{III.39}$$

denn auch die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Derivation, und beide Seiten stimmen auf 1-Formen überein. Um die letzte Behauptung einzusehen, bemerken wir, dass $\nabla\sharp = 0$, dh. $\nabla_X(\sharp\omega) = \sharp\nabla_X\omega$, somit $R_{X,Y}(\sharp\omega) = \sharp R^{T^*M}_{X,Y}(\omega)$, für $\omega \in \Omega^1(M)$, und daher $R^{T^*M}_{X,Y}(\omega) = R^{T^*M}_{X,Y}\big(\sum_k e^k i_{e_k}\omega\big) = \sum_k \flat R_{X,Y}(e_k) i_{e_k}\omega = \sum_{k,l}\langle R_{X,Y}e_k, e_l\rangle e^l \wedge i_{e_k}\omega$. Kombinieren wir (III.38) mit (III.39) so erhalten wir (III.35). Die verbleibenden Aussagen der Proposition sind nun offensichtlich. □

III.2.9. Satz (Bochner)**.** *Es sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte Riemannsche n-Mannigfaltigkeit und* $\mathrm{Ric} \geq 0$.[11] *Dann ist jede harmonische 1-Form parallel und $b_1(M) \leq n$. Existiert darüber hinaus ein Punkt $x \in M$ mit* $\mathrm{Ric}_x > 0$,[12] *dann sind alle harmonischen 1-Formen trivial und $b_1(M) = 0$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, dh. $\Delta\alpha = 0$. Aus der Weitzenböck Formel in Proposition III.2.8 und (III.33) erhalten wir

$$0 = \langle\!\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \nabla\alpha, \nabla\alpha\rangle\!\rangle + \int_M \mathrm{Ric}(\sharp\alpha, \sharp\alpha)\,\mathrm{vol}\,.$$

Zusammen mit der Annahme $\mathrm{Ric} \geq 0$ folgt $\nabla\alpha \equiv 0$ und $\mathrm{Ric}(\sharp\alpha, \sharp\alpha) \equiv 0$. Insbesondere sind alle harmonischen 1-Formen parallel. Beachte, dass parallele Schnitte lokal konstante Länge haben, denn $X \cdot |\alpha|^2 = 2\langle\nabla_X\alpha, \alpha\rangle$. Wegen des Zusammenhangs von M folgt daraus, dass die Auswertung paralleler 1-Formen bei einem Punkt $x \in M$,

$$\{\alpha \in \Omega^1(M) : \nabla\alpha = 0\} \to T^*_x M, \quad \alpha \mapsto \alpha_x,$$

eine injektive lineare Abbildung ist. Somit hat der Vektorraum der parallelen 1-Formen höchstens Dimension n. Nach dem zuvor gezeigten, hat also auch der Vektorraum der harmonischen 1-Formen höchstens Dimension n. Aus Korollar III.2.4

[11] d.h. $\mathrm{Ric}_x(X, X) \geq 0$, für alle $x \in M$ und alle $X \in T_x M$.
[12] d.h. $\mathrm{Ric}_x(X, X) > 0$, für alle $0 \neq X \in T_x M$.

schließen wir nun $b_1(M) \leq n$. Existiert ein Punkt $x \in M$ mit $\mathrm{Ric}_x > 0$ und ist α harmonisch, dann folgt aus $\mathrm{Ric}(\sharp\alpha, \sharp\alpha) \equiv 0$ nun $\alpha_x = 0$ und damit $\alpha \equiv 0$. In diesem Fall gibt es daher keine nicht-trivialen harmonischen 1-Formen und aus Korollar III.2.4 erhalten wir $b_1(M) = 0$. □

III.2.10. Beispiel. Aus Satz III.2.9 folgt etwa, dass auf dem Torus T^n keine Riemannsche Metrik mit $\mathrm{Ric} > 0$ existiert, denn $b_1(T^n) = n \neq 0$. Etwas allgemeiner folgt, dass es auch auf $S^1 \times M$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Ricci Krümmung geben kann.

III.3. Geodäten und Vollständigkeit. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir werden die Riemannsche Metrik oft mit $\langle X, Y\rangle := g(X, Y)$ bezeichnen, $X, Y \in T_xM$, und schreiben $|X| := \langle X, X\rangle^{1/2}$, $X \in T_xM$, für die assozierte Norm auf T_xM. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I = [a, b]$, $a < b$, und $c : I \to M$ eine glatte Kurve, so wird

$$\mathrm{length}(c) := \int_I |c'(t)|dt = \int_a^b |c'(t)|dt = \int_a^b g(c'(t), c'(t))^{1/2}dt$$

die *Länge von c* genannt. Hierbei bezeichnet $c' : I \to TM$, $c'(t) := \frac{\partial}{\partial t}c(t)$, die Ableitung von c. Die Länge von Kurven ist reparametrisierungsinvariant.

III.3.1. Lemma. *Es sei $\phi : J \to I$ ein, möglicherweise orentierungsumkehrender glatter Homöomorphismus zwischen kompakten Intervallen, $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Für jede glatte Kurve $c : I \to M$ ist dann auch $c \circ \phi : J \to M$ glatt, und es gilt*

$$\mathrm{length}(c \circ \phi) = \mathrm{length}(c).$$

Beweis. Aus der Kettenregel erhalten wir $(c \circ \phi)'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$, folglich $|(c \circ \phi)'(t)| = |c'(\phi(t))||\phi'(t)|$ und somit

$$\mathrm{length}(c \circ \phi) = \int_J |(c \circ \phi)'(t)|dt = \int_J |c'(\phi(t))||\phi'(t)|dt = \int_I |c'(s)|ds = \mathrm{length}(c),$$

nach der Substitutionsformel für eindimensionale Integrale. □

Es wird sich als hilfreich erweisen den Begriff der Länge auf eine etwas größere Klasse von Kurven auszudehnen. Unter einer *stückweise glatten* Kurve in M verstehen wir eine stetige Abbildung $c : [a, b] \to M$, für die eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ existiert, sodass die Einschränkung $c|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to M$ glatt ist, für jedes $1 \leq i \leq N$. In dieser Situation definieren wir

$$\mathrm{length}(c) := \sum_{i=1}^N \mathrm{length}\big(c|_{[t_{i-1},t_i]}\big) = \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} |c'(t)|dt. \tag{III.40}$$

Es ist leicht einzusehen, dass dies unabhängig von der Unterteilung t_i ist, und im Fall glatter Kurven mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt, siehe Aufgabe 52. Die Länge stückweise glatter Kurven ist invariant unter Reparametrisierungen mit stückweise glatten Homöomorphismen zwischen Intervallen. Der angenehme Vorteil stückweise glatter Kurven besteht darin, dass Konkatenationen stückweise glatter Kurven wieder stückweise glatt sind. Jede stückweise glatte Kurve $c : I \to M$ lässt sich glatt parametrisieren, dh, es existiert ein stückweise glatter Homöomorphismus $\phi : I \to I$, sodass $c \circ \phi : I \to M$ glatt ist.

III.3.2. Proposition. *Ist M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert*

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= \inf\bigl\{\operatorname{length}(c) \bigm| c \textit{ stückweise glatte Kurve von } x \textit{ nach } y\bigr\} \\ &= \inf\bigl\{\operatorname{length}(c) \bigm| c \textit{ glatte Kurve von } x \textit{ nach } y\bigr\}, \qquad x,y \in M, \end{aligned}$$

eine Metrik auf M, die die Topologie von M erzeugt. Diese Metrik besitzt folgende Eigenschaft: Sind $x, y \in M$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $d(x,y) < r_1 + r_2$, dann gilt

$$B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y) \neq \emptyset, \tag{III.41}$$

wobei $B_r(x) := \{z \in M \mid d(x,z) < r\}$ die offenen metrischen Bälle bezeichnen.

Beweis. Da M zusammenhängend ist, können je zwei Punkte $x, y \in M$ mit einer (stückweise) glatten Kurve verbunden werden, also gilt $d(x,y) < \infty$, siehe Aufgabe 55. Aus der Definition folgt auch sofort $d(x,y) \geq 0$, denn $\operatorname{length}(c) \geq 0$ für jede stückweise glatte Kurve c. Die Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$ folgt aus der Reparametrisierungsinvarianz der Länge. Genauer, ist $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$, dann ist $\bar{c} : [-b,-a] \to M$, $\bar{c}(t) := c(-t)$, eine stückweise glatte Kurve von $\bar{c}(-b) = y$ nach $\bar{c}(-a) = x$ und es gilt $\operatorname{length}(\bar{c}) = \operatorname{length}(c)$. Um die Dreiecksungleichung einzusehen, sei $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c_1(a_1) = x$ nach $c_1(b_1) = y$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c_2(a_2) = y$ nach $c_2(b_2) = z$. Durch affines Reparametrisieren dürfen wir o.B.d.A. $b_1 = a_2$ annehmen. Die Konkatenation

$$c := c_2 c_1 : [a_1, b_2] \to M, \qquad c(s) := \begin{cases} c_1(s) & \text{falls } s \in [a_1, b_1] \\ c_2(s) & \text{falls } s \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

bildet dann eine stückweise glatte Kurve von $c(a_1) = x$ nach $c(b_2) = z$ mit $\operatorname{length}(c) = \operatorname{length}(c_1) + \operatorname{length}(c_2)$. Daraus erhalten wir sofort die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $x, y, z \in M$.

Sei $x \in M$ und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $x \in U$ und $u(x) = 0$. Wähle $r > 0$, sodass $D_r^{\text{eukl}}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\} \subseteq u(U)$, wobei $|x|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die auf $u(U)$ induzierte Riemannsche Metrik $(u^{-1})^* g$ bezeichnen wir wieder mit g. Bezüglich dieser Riemannmetrik gilt dann $\operatorname{length}(u^{-1} \circ c) = \operatorname{length}(c)$, für jede stückweise glatte Kurve c in $u(U)$. Wegen der Kompaktheit von $D_r^{\text{eukl}}(0)$ existieren $\kappa > 0$ und $K > 0$, sodass

$$\kappa |X| \leq g(X,X)^{1/2} \leq K|X|,$$

für alle $X \in T_y\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ und $y \in D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$. Ist $y \in D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$, dann liegt die affine Kurve $t \mapsto ty$, $t \in [0,1]$, zur Gänze in $D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$, und wir erhalten

$$\mathrm{length}(c) = \int_0^1 g(c'(t), c'(t))^{1/2} dt \leq K \int_0^1 |c'(t)| dt = K \int_0^1 |y| dt = K|y|.$$

Daraus folgt nun

$$u^{-1}(D_\rho^{\mathrm{eukl}}(0)) \subseteq D_{K\rho}(x), \qquad \text{für alle } 0 < \rho \leq r. \tag{III.42}$$

Ist $c : [a,b] \to D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$ eine beliebige stückweise glatte Kurve von $c(a) = 0$ nach $c(b) = y$, so gilt andererseits

$$\kappa|y| = \kappa\Big|\int_a^b c'(t) dt\Big| \leq \kappa \int_a^b |c'(t)| dt \leq \int_a^b g(c'(t), c'(t))^{1/2} dt = \mathrm{length}(c).$$

Dies zeigt

$$B_{\kappa\rho}(x) \subseteq u^{-1}(D_\rho^{\mathrm{eukl}}(0)), \qquad \text{für alle } 0 < \rho \leq r. \tag{III.43}$$

Insbesondere sehen wir daraus, dass $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y \in M$. Folglich definiert d tatsächlich eine Metrik auf M. Aus (III.42) ud (III.43) folgt nun, dass d die Topologie von M induziert.

Für die verbleibende Behauptung seien $x, y \in M$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $d(x, y) < r_1+r_2$. O.B.d.A. sei $r_1 \leq d(x, y)$, andernfalls ist (III.41) trivialerweise erfüllt. Nach Definition der Metrik existiert $\varepsilon > 0$ und eine stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit $\mathrm{length}(c) \leq r_1+r_2-\varepsilon$. Aus Stetigkeitsgründen, und weil $l(c) \geq d(x, y) \geq r_1$, existiert $t \in [a,b]$, sodass $r_1-\varepsilon < \mathrm{length}(c|_{[a,t]}) < r_1$. Für den Punkt $z := c(t)$ gilt daher $d(x, z) \leq \mathrm{length}(c|_{[a,t]}) < r_1$, also $z \in B_{r_1}(x)$. Weiters folgt

$$\mathrm{length}(c|_{[t,b]}) = \mathrm{length}(c) - \mathrm{length}(c|_{[a,b]}) < \mathrm{length}(c) - r_1 + \varepsilon \leq r_2,$$

also $d(z, y) \leq \mathrm{length}(c|_{[t,b]}) < r_2$, und damit auch $z \in B_{r_2}(y)$. Dies zeigt $z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$, folglich ist der Durchschnitt nicht leer. $\square$

III.3.3. Definition (Vollständigkeit)**.** Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit wird *vollständig* genannt, wenn der metrische Raum (M, d) vollständig ist, dh. alle Cauchy Folgen bezüglich d konvergieren in M.

III.3.4. Beispiel. Jede kompakte Riemannmannigfaltigkeit ist vollständig.

III.3.5. Beispiel. Für $\mathbb{R}^n$ mit der flachen standard Riemannschen Metrik $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ gilt $d(x, y) = |y - x|$. Einerseits ist nämlich $d(x, y) \leq |y - x|$, da die affine Kurve $t \mapsto (1-t)x+ty$, $t \in [0,1]$, Länge $|y-x|$ hat. Andererseits haben wir für jede stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ die Abschätzung

$$|y - x| = \Big|\int_a^b c'(t) dt\Big| \leq \int_a^b |c'(t)| dt = \mathrm{length}(c),$$

und somit auch $d(x, y) \geq |y - x|$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^n, g)$ ist daher vollständig. Entfernen wir einen Punkt $* \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir eine nicht vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Auch die induzierte Riemannsche Metrik auf $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ ist nicht vollständig. Beachte, dass aufgrund der Konvexität von B_r die Einschränkung der Standardmetrik auf B_r mit der von der Riemannmetrik auf B_r induzierten Metrik übereinstimmt.

III.3.6. Bemerkung. Betrachte $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der standard Riemannmetrik $g = dx^2 + dy^2$. Für die induzierte Metrik gilt wieder $d(x, y) = |y - x|$, obwohl etwa die beiden Punkte $x = (-1, 0)$ und $y = (1, 0)$ nicht durch eine Kurve der Länge $d(x, y) = 2$ verbunden werden können, sondern nur mit Kurven der Länge $2 + \varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$. Dies zeigt, dass wir uns i.A. keine Distanz-realisierenden Kurven erwarten dürfen.

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ definieren wir ihren *Durchmesser* als

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Eine Teilmenge wird beschränkt genannt, falls sie endlichen Durchmesser hat. Beachte, dass jede kompakte Teilmenge abgeschlossen und beschränkt ist.

III.3.7. Proposition (Heine–Borel)**.** *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:*

(a) M ist vollständig.
(b) Jede beschränkte Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge.
(c) Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von M ist kompakt.
(d) Die abgeschlossenen Bälle $D_r(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$ sind kompakt, für jedes $x \in M$ und $r \geq 0$.

Beweis. Um (d) $\Rightarrow$ (c) einzusehen, sei $A \subseteq M$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge. Wegen der Beschränktheit von A existiert $x \in M$ und $r > 0$, sodass $A \subseteq D_r(x)$. Nach Voraussetzung ist $D_r(x)$ kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist daher auch A kompakt. Für den Beweis der Implikation (c) $\Rightarrow$ (b) sei x_n eine beschränkte Folge in M, dh. $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bildet eine beschränkte Teilmenge von M. Ihr Abschluss $\bar{B}$ ist dann ebenfalls beschränkt, und nach Voraussetzung daher kompakt. Da kompakte Räume folgenkompakt sind, besitzt x_n eine in $\bar{B}$ konvergente Teilfolge. Um (b) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, sei nun x_n eine Cauchy Folge in M. Da Cauchy Folgen stets beschränkt sind, besitzt x_n nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge. Da Cauchy Folgen höchstens einen Häufungspunkt besitzen, muss x_n also konvergieren. Widmen wir uns schließlich der Implikation (a) $\Rightarrow$ (d). Für fixes $x \in M$, betrachte die Menge

$$R := \big\{r \in [0, \infty) : D_r(x) \text{ ist kompakt}\big\}.$$

Offensichtlich ist $R \neq \emptyset$, denn $0 \in R$. Es genügt nun zu zeigen, dass R sowohl offen als auch abgeschlossen in $[0, \infty)$ ist, denn dann folgt wegen des Zusammenhangs des Intervalls, $R = [0, \infty)$, und somit ist $D_r(x)$ für jedes $r \geq 0$ kompakt.

Wir beginnen damit die Offenheit von R nachzuweisen. Sei dazu $r \in R$, also $D_r(x)$ kompakt. Da M lokal kompakt ist, existieren endlich viele offene Teilmengen U_i von M, $1 \leq i \leq N$, die $D_r(x)$ überdecken, $D_r(x) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N$, und deren Abschlüsse $\bar{U}_i$ kompakt sind. Da $U := U_1 \cup \cdots \cup U_N$ eine Umgebung von $D_r(x)$ bildet, und weil $D_r(x)$ kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass die ε-Umgebung von $D_r(x)$ in U enthalten ist, in Zeichen $\mathcal{U}_\varepsilon(D_r(x)) := \{y \in M \mid d(z, D_r(x)) < \varepsilon\} \subseteq U$. Nach (III.41) gilt aber $B_{r+\varepsilon}(x) = \mathcal{U}_\varepsilon(D_r(x))$. Folglich ist $D_{r+\varepsilon}(x)$ kompakt, denn es liegt abgeschlossen in der kompakten Menge $\bar{U}$. Wir schließen $[0, r+\varepsilon] \subseteq R$, denn offensichtlich gilt: $0 \leq r' \leq r'' \in R \Rightarrow r' \in R$. Dies zeigt, dass r innerer Punkt von R ist, damit ist R also offen.

Um die Abgeschlossenheit von R zu überprüfen, sei $r \in \bar{R}$. Weiters sei y_n eine Folge in $D_r(x)$. Es genügt zu zeigen, dass y_n eine Cauchy-Teilfolge besitzt, denn wegen der Vollständigkeits-Voraussetzung würde diese konvergiert, somit wäre $D_r(x)$ (folgen)kompakt,[13] dh. $r \in R$, und damit R abgeschlossen. Um eine Cauchy-Teilfolge von y_n zu konstruieren sei $\varepsilon > 0$. Da $r \in \bar{R}$, existiert $\tilde{r} \in R$ mit $r < \tilde{r} + \varepsilon/4$. Nach (III.41) existiert eine Folge $\tilde{y}_n \in D_{\tilde{r}}(x)$, sodass $d(\tilde{y}_n, y_n) < \varepsilon/4$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $D_{\tilde{r}}(x)$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\tilde{y}_{n_k}$. Es bezeichne $\tilde{y}_\infty := \lim_{k\to\infty} \tilde{y}_{n_k}$ deren Grenzwert. Durch Verwerfen endlich vieler Folgenglieder dürfen wir o.B.d.A. $d(\tilde{y}_{n_k}, \tilde{y}_\infty) < \varepsilon/4$ annehmen, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt nun $d(y_{n_k}, \tilde{y}_\infty) \leq d(y_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}) + d(\tilde{y}_{n_k}, \tilde{y}_\infty) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, und dann $d(y_{n_k}, y_{n_l}) \leq d(y_{n_k}, \tilde{y}_\infty) + d(\tilde{y}_\infty, y_{n_l}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend sehen wir, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge y'_n von y_n existiert, sodass $d(y'_k, y'_l) < \varepsilon$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert eine Teilfolge y^1_n von y_n mit $d(y^1_k, y^1_l) < 1$, und diese besitzt eine Teilfolge y^2_n mit $d(y^2_k, y^2_l) < 1/2$, und diese besitzt eine Teilfolge y^3_n mit $d(y^3_k, y^3_l) < 1/2$ usw. Induktiv erhalten wir zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge y^m_n von y^{m-1}_n, sodass $d(y^m_k, y^m_l) \leq 1/m$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Die Diagonalfolge y^n_n ist daher eine Cauchy-Teilfolge von y_n. □

III.3.8. Bemerkung. Wir werden weiter unten, im Beweis des Satzes III.3.27, einen anderen Beweis für die nicht triviale Implikation (a) $\Rightarrow$ (d) in Proposition III.3.7 geben, der auf der Lösung der Geodätengleichung, einer gewöhnlichen Differentialgleichung, beruht.

Für jede glatte Kurve $c : I \to M$ definieren wir ihre *Energie* durch

$$E(c) := \frac{1}{2}\int_I |c'(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_I g(c'(t), c'(t)) dt. \tag{III.44}$$

Die Energie von Kurven ist *nicht* invariant unter Reparametrisierungen, selbst eine affine Reparametrisierung, $t \mapsto \lambda t + a$, lässt die Energie i.A. nur dann unverändert, wenn $\lambda = \pm 1$.

[13] Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist kompakt.

III.3.9. Lemma. *Für jede glatte Kurve $c : [a, b] \to M$ gilt*

$$\operatorname{length}(c)^2 \leq 2(b-a)E(c).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, dh. wenn $|c'(t)|$ konstant in t ist.

Beweis. Nach der Cauchy–Schwarz Ungleichung gilt

$$\operatorname{length}(c)^2 = \Big(\int_a^b 1 \cdot |c'(t)| dt\Big)^2 \leq \int_a^b 1^2 dt \int_a^b |c'(t)|^2 dt = 2(b-a)E(c),$$

mit Gleichheit genau dann wenn $|c'(t)|$ konstant ist. $\square$

III.3.10. Lemma. *Es sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit minimaler Energie, dh. für jede weitere glatte Kurve $\bar{c} : [a, b] \to M$ von $\bar{c}(a) = x$ nach $\bar{c}(b) = y$ gilt $E(\bar{c}) \geq E(c)$. Dann erfüllt c die Differentialgleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$, dh. das Vektorfeld $c' := \frac{\partial c}{\partial t}$ über c ist horizontal. Schreiben wir in einer Karte $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, dann bedeuted dies $(c^i)'' + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} (c^j)'(c^k)' = 0$ oder expliziter*

$$(c^i)''(t) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}\big(c^1(t), \dots, c^n(t)\big)\,(c^j)'(t)\,(c^k)'(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{III.45}$$

wobei Γ^i_{jk} die Christoffel Symbole der Karte bezeichnen.

Beweis. Betrachte eine Variation von Kurven die x mit y verbinden, dh. eine glatte Abbildung $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ mit $\tilde{c}(s, a) = x$ und $\tilde{c}(s, b) = y$, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist daher $\tilde{c}_s : [a, b] \to M$, $\tilde{c}_s(t) := \tilde{c}(s, t)$, eine glatte Kurve von x nach y, und $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, a) = 0 = \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, b)$, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Hat $c = \tilde{c}_0$ minimale Energie, dann gilt $E(\tilde{c}_s) \geq E(\tilde{c}_0)$ und daher $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0$, für jede solche Variation. Da ∇ torsionsfrei ist, haben wir $\nabla_{\partial s} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = \nabla_{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}$, zusammen mit $\nabla g = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde{c}_s) &= \tfrac{\partial}{\partial s} \tfrac{1}{2} \int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b g\big(\nabla_{\partial s} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b g\big(\nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t} g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt - \int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= -\int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt
\end{aligned}$$

Setzen wir $\xi(t) := \frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}(0,t)$, so erhalten wir

$$0 = \int_a^b g\big(\xi, \nabla_{\partial t} c'\big)(t)dt$$

Ist c eine Kurve minimaler Energie von x nach y, so muss dies für jede Variation verschwinden, und daher die Gleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$ gelten.

In einer Karte haben wir $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, dh. $c = \sum_i c^i e_i$, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Es gilt dann $c' = \sum_i^n (c^i)' \partial_i$ und daher

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{c'} c' = \nabla_{c'} \sum_i (c^i)'\partial_i &= \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_i (c^i)' \nabla_{c'}\partial_i \\ &= \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_{i,j} (c^i)'(c^j)'\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_{i,j,k} (c^i)'(c^j)'\Gamma^k_{ji}\partial_k. \end{aligned}$$

Für jedes i gilt daher $0 = (c^i)'' + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(c^j)'(c^k)'$. □

III.3.11. Definition (Geodäten)**.** Unter einer Geodäte verstehen wir eine glatte auf einem Intervall definierte Kurve $c : I \to M$, die die Differentialgleichung $\nabla_{\partial_t} c' = 0$ erfüllt. Dies sind genau die kritischen Punkte des Energiefunktionals (III.44).

III.3.12. Lemma. *Jede Geodäte ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Ist c eine Geodäte und $a, \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $t \mapsto c(\lambda t + a)$ eine Geodäte.*

Beweis. Aus $\nabla g = 0$ und der Geodätengleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$ erhalten wir sofort $\frac{\partial}{\partial t}|c'(t)|^2 = 2g\big(\nabla_{\partial t} c'(t), c'(t)\big) = 0$, also ist $|c'(t)|$ konstant in t. Für die zweite Behauptung sei $\tilde{c}(t) := c(\lambda t + a)$, also $\tilde{c}'(t) = \lambda c'(\lambda t + a)$. Da c' parallel über c ist, ist auch das reparametrisierte skalierte Vektorfeld $\lambda c'(\lambda t + a)$ parallel über der entsprechend reparametrisierten Kurve $c(\lambda t + a)$, dh. $\nabla_{\partial_t} \tilde{c}' = 0$, vgl. Satz II.3.11(d). □

III.3.13. Beispiel. Betrachte wieder $\mathbb{R}^n$ mit der flachen Riemannmetrik $g = \sum_i dx^i \otimes dx^i$. In diesem Fall verschwinden die Christoffel Symbole, $\Gamma^k_{ij} = 0$, die Geodätengleichung lautet daher $c'' = 0$. Die Geodäten in $\mathbb{R}^n$ sind daher genau die affinen Kurven $c(t) = tv + a$, wobei $a, v \in \mathbb{R}^n$.

III.3.14. Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten)**.** *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(a) Zu jedem $X \in T_xM$ existiert ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine Geodäte $c : I \to M$ mit $0 \in I$, $c(0) = x$ und $c'(x) = X$.

(b) Sind $c_1 : I_1 \to M$ und $c_2 : I_2 \to M$ zwei Geodäten und $t_0 \in I_1 \cap I_2$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$, dann stimmen diese auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $I_1 \cap I_2$ überein, dh. $c_1|_{I_1 \cap I_2} = c_2|_{I_1 \cap I_2}$.

(c) Zu jedem $X \in T_xM$ existiert eine maximale Geodäte $c : I \to M$ mit $0 \in I$, $c(0) = x$ und $c'(0) = X$, dh. c kann nicht zu einer Geodäte auf einem echt

größeren Intervall ausgedehnt werden. Diese maximale Geodäte ist eindeutig und wird mit $\mathrm{geo}_X : I_X \to M$ *bezeichnet,* $\mathrm{geo}'_X(0) = X$, $X \in TM$.

(d) Ist $t \in I_X$*, dann gilt* $\mathrm{geo}_{\mathrm{geo}'_X(t)}(s) = \mathrm{geo}_X(t+s)$ *für alle* $s \in I_{\mathrm{geo}'_X(t)} = I_X - t$.

(e) Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$*, dann gilt* $\mathrm{geo}_{\lambda X}(t) = \mathrm{geo}_X(\lambda t)$ *für alle* $t \in I_{\lambda X} = I_X/\lambda$.

(f) Für $0_x \in T_xM$ *gilt* $I_{0_x} = \mathbb{R}$ *und* $\mathrm{geo}_{0_x}(t) = x$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(g) Die Menge $\mathcal{G} := \{(X,t) \mid t \in I_X\}$ *ist offen in* $TM \times \mathbb{R}$*, und* $\mathrm{geo} : \mathcal{G} \to M$, $(X,t) \mapsto \mathrm{geo}_X(t)$*, ist eine glatte Abbildung.*

Beweis. Die erste Behauptung (a) folgt aus dem Existenzaussage im Satz von Picard–Lindelöf, denn die Geodätengleichung (III.45) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um Behauptung (b) einzusehen, betrachte die Menge $\{t \in I_1 \cap I_2 \mid c_1(t) = c_2(t) \text{ und } c_1'(t) = c_2'(t)\}$. Nach Voraussetzung ist diese nicht leer, denn $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Menge auch abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$. Aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard–Lindelöf folgt, dass diese Menge auch offen in $I_1 \cap I_2$ ist, folglich muss sie mit $I_1 \cap I_2$ übereinstimmen, denn als Durchschnitt zweier Intervalle ist $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend. Behauptung (c) ist eine formale Konsequenz von (a) & (b).

Nach der zweiten Aussage in Lemma III.3.12 ist die Abbildung $s \mapsto \mathrm{geo}_X(t+s)$ eine auf dem Intervall $I_X - t$ definierte maximale Geodäte. Aus der Eindeutigkeit maximaler Geodäten folgt daher $I_X - t = I_{\mathrm{geo}'_X(t)}$ und $\mathrm{geo}_X(t+s) = \mathrm{geo}_{\mathrm{geo}'_X(t)}(s)$ für alle $s \in I_X - t = I_{\mathrm{geo}'_X(t)}$, denn beide Geodäten haben bei $s = 0$ dieselbe Ableitung, nämlich $\mathrm{geo}'_X(t)$. Dies zeigt Behauptung (d).

Um (e) einzusehen, gehen wir analog zum Beweis von (d) vor. Nach der zweiten Aussage in Lemma III.3.12 ist die Abbildung $t \mapsto \mathrm{geo}_X(\lambda t)$ eine auf dem Intervall I_X/λ definierte maximale Geodäte. Aus der Eindeutigkeit maximaler Geodäten folgt daher $I_X/\lambda = I_{\lambda X}$ und $\mathrm{geo}_X(\lambda t) = \mathrm{geo}_{\lambda X}(t)$ für alle $t \in I_X/\lambda = I_{\lambda X}$, denn beide Geodäten haben bei $t = 0$ die Ableitung λX. Behauptung (f) ist trivial, denn offensichtlich sind die konstanten Kurven Geodäten.

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf hängen die Lösungen der Geodätengleichung (III.45) glatt vom Anfangswert $X \in TM$ ab. Es existiert daher eine offene Umgebung U von $TM \times \{0\}$ in $TM \times \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathcal{G}$ und so, dass $\mathrm{geo}|_U : U \to M$ glatt ist. Für $X \in TM$ betrachte nun die Menge

$$J_X := \left\{ t \in I_X \;\middle|\; \begin{array}{c} (X,t) \text{ liegt im Inneren von } \mathcal{G} \text{ und geo ist glatt} \\ \text{auf einer offenen Umgebung von } (X,t) \end{array} \right\}$$

Offensichtlich genügt es $J_X = I_X$ zu zeigen. Beachte $J_X \neq \emptyset$, denn $0 \in J_X$ da ja $(X,0) \in U \subseteq \mathcal{G}$ und geo auf der offenen Menge U glatt ist. Nach Konstruktion ist J_X auch offen in I_X. Da I_X zusammenhängend ist, genügt es die Abgeschlossenheit von J_X in I_X nachzuweisen. Sei dazu $t \in \bar{J}_X \cap I_X$. Da U offen ist, existiert eine offene Umgebung V von $\mathrm{geo}'_t(X)$ in TM und $\varepsilon > 0$, sodass $V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$. Da $t \in \bar{J}_X$, existiert $t_0 \in J_X$ mit $|t - t_0| < \varepsilon$. Da $\mathrm{geo}_X : I_X \to M$ glatt ist, dürfen wir auch $\mathrm{geo}'_X(t_0) \in V$ annehmen. Nach Konstruktion von J_X existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq TM \times \mathbb{R}$ mit $(X, t_0) \in W \subseteq \mathcal{G}$ und so, dass geo auf W glatt ist.

Betrachte die offene Umgebung $W_0 := \{Y \in TM \mid (Y, t_0) \in W\}$ von X in TM. Durch Verkleinern von W können wir auch erreichen, dass $\mathrm{geo}'_Y(t_0) \in V$, für alle $Y \in W_0$. Wir erhalten eine wohldefinierte glatte Abbildung

$$W_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad (Y, s) \mapsto \mathrm{geo}(\mathrm{geo}'_Y(t_0), s).$$

Nach (d) ist geo daher auf der offenen Menge $W_0 \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ definiert und glatt. Nach Konstruktion liegt (X, t) in dieser Menge, woraus wir nun $t \in J_X$ schließen. Folglich ist J_X abgeschlossen in I_X, und somit (g) gezeigt. $\square$

III.3.15. Bemerkung (Geodätischer Fluss)**.** Auf dem Totalraum von TM betrachte das eindeutige horizontale Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, sodass $T_X\pi \cdot \xi_X = X$, für alle $X \in TM$, wobei $\pi : TM \to M$ die Vektorbündelprojektion bezeichnet. Dieses Vektorfeld wir als *geodätischer Spray* bezeichnet. Die Integralkurven von ξ sind glatte Kurven $\tilde{c} : I \to TM$ für die $\tilde{c}'(t) = \xi(\tilde{c}(t))$ gilt, $t \in I$. Nach Definition von ξ sind dies genau jene horizontalen glatten Kurven $\tilde{c} : I \to TM$, für die $(\pi \circ \tilde{c})'(t) = T_{\tilde{c}(t)}\pi \cdot \tilde{c}'(t) = \tilde{c}(t)$ gilt. Setzen wir $c(t) := \pi(\tilde{c}(t))$, dann bedeutet dies gerade, dass $c'(t) = \tilde{c}(t)$ horizontal über c ist. In anderen Worten, die Integralkurven von ξ entsprechen genau den Ableitungen von Geodäten in M. Wenden wir den Satz in [**3**, Abschnitt 2.11] auf das Vektorfeld ξ an, so erhalten wir erneut einen Beweis von Satz III.3.14. Dies ist der übliche Trick, mit dem die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Der Fluss des geodätischen Sprays ξ wird als *geodätischer Fluss* bezeichnet. Da Geodäten stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, lässt der geodätische Fluss die Sphärenbündel $\{X \in TM : |X| = r\}$ invariant, $r \geq 0$. Für jedes $\lambda \neq 0$ haben wir schließlich einen durch Multiplikation mit λ definierten Diffeomorphismus $\lambda : TM \to TM$, und nach Definition des geodätischen Sprays gilt offenbar $\lambda_*\xi = \lambda\xi$. Diese Symmetrie ist für die in Satz III.3.14(e) formulierte Symmetrie von geo verantwortlich.

III.3.16. Korollar (Exponentialabbildung)**.** *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit der Notation von Satz III.3.14 gilt dann:*

(a) Die Menge $\mathcal{D} := \{X \in TM \mid 1 \in I_X\} \subseteq TM$ ist eine offene Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM$, die sogenannte Exponentialabbildung,

$$\exp : \mathcal{D} \to M, \qquad \exp(X) := \mathrm{geo}_X(1),$$

ist eine glatte Abbildung, und es gilt $\exp|_M = \mathrm{id}_M$.

(b) Für $X \in TM$ gilt $\{t \in \mathbb{R} : tX \in \mathcal{D}\} = I_X$ und $\exp(tX) = \mathrm{geo}_X(t)$, $t \in I_X$.

(c) Für jedes $x \in M$ ist $\mathcal{D}_x := \mathcal{D} \cap T_xM$ eine offene Umgebung von $0 \in T_xM$, die Einschränkung der Exponentialbbildung $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M$ ist glatt, und es gilt $\exp_x(0) = x$ sowie $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \exp(tX) = X$ für alle $X \in T_xM$. Bis auf die kanonische Identifikation $T_0\mathcal{D}_x = T_0T_xM = T_xM$ gilt daher $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$.

(d) *Zu jedem $x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von $0 \in T_xM$ mit $U_x \subseteq \mathcal{D}_x$ und so, dass $\exp_x : U_x \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $x \in M$ ist. (Riemannsche Normalkoordinaten)*

(e) *Es existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq TM$ des Nullschnitts $M \subseteq TM$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, und so, dass die Einschränkung $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ einen Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$ bildet. Dabei bezeichnet $\pi : TM \to M$ die Vektorbündelprojektion.*

Beweis. Behauptung (a) folgt aus Satz III.3.14(g)&(f). Behauptung (b) folgt sofort aus Satz III.3.14(e). Behauptung (c) folgt aus (a)&(b), denn $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \exp(tX) = \frac{\partial}{\partial t}|_0 \operatorname{geo}_X(t) = X$. Behauptung (d) folgt aus dem inversen Funktionensatz und (c). Für $x \in M$, und bis auf die kanonischen Identifikationen $T_xTM = T_xM \oplus T_xM$ und $T_{(x,x)}(M \times M) = T_xM \oplus T_xM$, hat die Tangentialabbildung von $(\pi, \exp)$ bei x die Gestalt

$$T_x(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_xM} & 0 \\ * & \mathrm{id}_{T_xM} \end{pmatrix}.$$

Aus dem inversen Funktionensatz folgt daher, dass $(\pi, \exp) : \mathcal{D} \to M \times M$ längs des Nullschnitts $M \subseteq \mathcal{D}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Genauer, existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung V_x von x in M und $\varepsilon_x > 0$, sodass $\tilde{V}_x := \{Y \in T_yM \mid y \in V_x, |Y| < \varepsilon_x\} \subseteq \mathcal{D}$ und so, dass die Einschränkung $(\pi, \exp)|_{\tilde{V}_x}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von (x, x) in $M \times M$ wird. Setzen wir nun $\mathcal{U} := \bigcup_{x \in M} \tilde{V}_x$, dann ist $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung des Nullschnitts, es gilt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, und $(\pi, \exp)|_{\mathcal{U}}$ ist ein lokaler Diffeomorphismus. Nach Konstruktion von $\mathcal{U}$ ist $(\pi, \exp)$ auf $\mathcal{U} \cap T_xM$ injektiv. Daraus folgt sofort, dass $(\pi, \exp)$ auf $\mathcal{U}$ injektiv ist, folglich ist $(\pi, \exp)|_{\mathcal{U}}$ ein Diffeomorphismus auf sein (offenes) Bild. Damit ist auch (e) gezeigt. □

III.3.17. Bemerkung (Riemannsche Normalkoordinaten)**.** Die lokal um $0 \in T_xM$ definierte Exponentialabbildung $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M$ liefert kanonische Koordinaten um jeden Punkt $x \in M$, siehe Korollar III.3.16(c). Wählen wir eine Orthonormalbasis von T_xM und identifizieren damit $T_xM \cong \mathbb{R}^n$, dann liefert die (Umkehrabbildung der) Exponentialabbildung eine Karte $u = (u^1, \dots, u^n) = \exp_x^{-1}$. Diese Karte ist bei x zentriert, dh. $u(x) = 0$. Bezeichnet $g = \sum_{ij} g_{ij} du^i \otimes du^j$ die Kartendarstellung der Metrik, dann gilt

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{III.46}$$

denn $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$. Nach Definition der Exponentialabbildung entsprechen die Geodäten durch x den affin parametrisierten Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Geodätengleichung (III.45) und der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ folgt daraus

$$\Gamma_{ij}^k(x) = 0, \qquad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{III.47}$$

Aus (III.16) erhalten wir daher $\big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\big)(x) = 0$, und durch zyklische Permutation der Indizes auch $\big(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\big)(x) = 0$. Aufsummieren dieser beiden Relationen liefert, unter Verwendung der Symmetrie $g_{ki} = g_{ik}$, nun

$$\tfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(x) = 0, \qquad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{III.48}$$

Aus (III.16) folgt nun auch

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l}(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^l \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}\Big)(x),$$

und mit Hilfe von (III.17) nun

$$R^l_{kij}(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^l \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^l \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial u^k \partial u^j}\Big)(x), \tag{III.49}$$

für alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Es sei nochmals betont, dass die Gleichungen (III.46) bis (III.49) nur im Zentrum x der Riemannschen Normalkoordinaten gelten, dh. in jenem Punkt, der $0 \in \mathbb{R}^n$ entspricht.

III.3.18. Satz (Lemma von Gauß)**.** *Es seien $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ so, dass die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus zwischen dem offenen Ball $B_\varepsilon(0) \subseteq T_xM$ und einer offenen Umgebung von $x \in M$ definiert, vgl. Korollar III.3.16(d). Dann gilt*

- *(a) Ist $X \in T_xM$ und $|X| = 1$, dann trifft die Geodäte $c : [0, \varepsilon) \to M$, $c(t) := \exp_x(tX)$, die Bilder der Euklidischen Sphären $\exp_x(S_r(0))$, $0 < r < \varepsilon$, orthogonal, $S_r(0) = \{Y \in T_xM : |Y| = r\}$.*
- *(b) Ist $0 < r < \varepsilon$, dann hat jede stückweise glatte Kurve $c : [a, b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) \in \exp_x(S_r(0))$ Länge $\operatorname{length}(c) \geq r$. Gleichheit tritt genau dann ein wenn die Kurve, bis auf monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von der Form $\exp_x(tX)$, $t \in [0, r]$, ist mit $X \in T_xM$, $|X| = 1$.*
- *(c) Jeder Punkt $y \in \exp_x(B_\varepsilon(0))$ lässt sich mit x durch eine, bis auf affine Reparametrisierung eindeutige Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbinden. Bis auf Reparametrisierung, ist dies die eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge von x nach y.*
- *(d) Die Distanzfunktion erfüllt $d(x, \exp_x(X)) = |X|$, $X \in B_\varepsilon(0)$.*
- *(e) Die Exponentialabbildung bildet die Euklidischen Sphären diffeomorph auf die metrischen Sphären ab, dh. $\exp_x(S_r(0)) = S_r(x)$ für $0 < r < \varepsilon$.*
- *(f) Die Exponentialabbildung bildet die Euklidischen Bälle diffeomorph auf die metrischen Bälle ab, dh. $\exp_x(B_r(0)) = B_r(x)$ für $0 < r \leq \varepsilon$.*

Beweis. Wir beginnen damit (a) zu zeigen. Sei dazu $s \mapsto X_s$ eine lokal um $s = 0$ definierte glatte Kurve in $S_1(0) \subseteq T_xM$ mit $X_0 = X$. Betrachte nun die Variation $\tilde{c}_s(t) := \tilde{c}(s, t) := \exp_x(tX_s)$, $t \in [0, r]$, $0 < r < \varepsilon$. Jedes $\tilde{c}_s : [0, r] \to M$ ist daher ein Geodäte von $\tilde{c}_s(0) = x$ nach $\tilde{c}_s(r) = \exp_x(rX_s) \in \exp_x(S_r(0))$. Da $|\tilde{c}_s'(t)| = |\tilde{c}_s'(0)| = |X_s| = 1$, haben alle diese Geodäten dieselbe Energie,

$E(\tilde{c}_s) = r/2$. Die Variationsrechnung im Beweis von Lemma III.3.10 liefert daher

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde{c}_s) &= \int_0^r \tfrac{\partial}{\partial t} g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t)\big) dt - \int_0^r g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t)\big) dt \\ &= g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,r), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,r)\big), \end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t) = 0$ da jedes $\tilde{c}_s$ Geodäte ist, und $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,0) = 0$ da jedes $\tilde{c}_s$ bei $\tilde{c}_s(0) = x$ startet. Durch Auswerten bei $s = 0$ erhalten wir

$$g\big(\tfrac{\partial}{\partial s}|_0 \exp_x(rX_s), c'(r)\big) = 0.$$

Da dies für jede glatte Kurve X_s in $S_1(0)$ gilt, folgt $c'(r) \perp \exp_x(S_r(0))$.

Um (b) einzusehen sei $0 < \delta < r$. Jede stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) \in \exp_x(S_r(0))$ besitzt einen Teilabschnitt $\tilde{c} := c|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$, $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$, der zur Gänze in $\exp_x\big(B_\varepsilon(0) \backslash \{0\}\big)$ liegt und $\tilde{c}(\tilde{a}) \in \exp_x(S_\delta(0))$ mit $\tilde{c}(\tilde{b}) \in \exp_x(S_r(0))$ verbindet. Es existieren daher stückweise glatte Abbildungen (Polarkoordinaten) $\rho : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to (0, \varepsilon)$ und $X : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to S_1(0)$, sodass $\tilde{c}(t) = \exp_x(\rho(t) X(t))$. Beachte $\rho(\tilde{a}) = \delta$ sowie $\rho(\tilde{b}) = r$. Für die Ableitung erhalten wir

$$\tilde{c}'(t) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(s) X(t)\big) + \tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(t) X(s)\big).$$

Nach (a) stehen die beiden Summanden orthogonal aufeinander. Nach dem Satz von Pythagoras, und weil $\big|\frac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(s) X(t)\big)\big| = |\rho'(t)|$, gilt daher

$$|\tilde{c}'(t)|^2 = |\rho'(t)|^2 + \big|\tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x(\rho(t) X(s))|^2.$$

Insbesondere haben wir $|\tilde{c}'(t)| \geq |\rho'(t)|$, und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $X(t)$ konstant in t ist. Es folgt

$$\operatorname{length}(\tilde{c}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{c}'(t)| dt \geq \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\rho'(t)| dt \geq \left| \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \rho'(t) dt \right| = \rho(\tilde{b}) - \rho(\tilde{a}) = r - \delta,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $X(t) = \text{const}$ und $\rho' \geq 0$, dh. genau dann wenn $\tilde{c}$ eine monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von $\exp_x(tX)$ ist, $X \in S_1(0)$, $t \in [\delta, r]$. Da dies für jedes $\delta > 0$ gilt, und weil offensichtlich $\operatorname{length}(c) \geq \operatorname{length}(\tilde{c})$, erhalten wir $\operatorname{length}(c) \geq r$, und somit (b).

Die verbleibenden Behauptungen folgen unmittelbar aus (b). $\square$

III.3.19. Bemerkung (Riemannsche Polarkoordinaten)**.** Wir führen auf T_xM Polarkoordinaten ein, dh. $T_xM \setminus \{0\} \cong (0, \infty) \times S^{n-1}$, $tX \leftrightarrow (t, X)$, wobei $S^{n-1} := \{X \in T_xM : |X| = 1\}$ die Einheitssphäre in T_xM bezeichnet. Sind darüber hinaus $(\varphi^2, \dots, \varphi^n)$ (lokal definierte) Winkelkoordinaten auf S^{n-1}, so erhalten wir lokale Koordinaten $(t, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ auf $T_xM \setminus \{0\}$. Zusammen mit der Exponentialabbildung liefert dies eine Karte $(u^1, \dots, u^n) = (t, \varphi^2, \dots, \varphi^n) \circ \exp_x^{-1}$ auf M. Nach Satz III.3.18(a) hat die Riemannsche Metrik in diesen Koordinaten eine Darstellung der Form

$$g = du^1 \otimes du^1 + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}(u^1, \dots, u^n) du^i \otimes du^j.$$

III.3.20. Korollar. *Es existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ des Nullschnitts $M \subseteq TM$, sodass $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ einen Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$ bildet, und die darüberhinaus folgende Eigenschaft besitzt. Für jedes $X \in \mathcal{U}$ gilt $d(\pi(X), \exp(X)) = |X|$, und die Geodäte $\exp(tX)$, $t \in [0,1]$, ist die eindeutige (stückweise) glatte Kurve minimaler Länge von $\pi(X)$ nach $\exp(X)$, bis auf Reparametrisierung.*

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{U} \subseteq TM$ die Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.16(e), dh. $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ ist ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$. Durch Verkleinern von $\mathcal{U}$ können wir erreichen, dass diese Umgebung von der Form $\mathcal{U} = \{X \in TM : |X| < \varepsilon(\pi(X))\}$ ist, für eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0, \infty)$, vgl. Aufgabe 57. Für jedes $x \in M$ ist daher auch $\exp_x : B_{\varepsilon(x)}(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Das Korollar folgt daher aus Satz III.3.18(b)&(d). □

III.3.21. Korollar. *Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq M$ exsitiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft. Für $x \in K$ und $X \in T_xM$ mit $|X| = 1$, ist die Geodäte geo_X zumindest auf dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ definiert, dh. $I_X \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{U} \subseteq TM$ die Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.20. Da K kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass $\{Y \in T_yM : y \in K, |Y| \leq \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}$. Ist nun $x \in K$ und $X \in T_xM$, $|X| = 1$, dann folgt $\pm\varepsilon X \in \mathcal{U}$, also ist $\mathrm{geo}_X(\pm\varepsilon) = \mathrm{geo}_{\pm\varepsilon X}(1) = \exp(\pm\varepsilon X)$ wohldefiniert, dh. $I_X \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, vgl. Satz III.3.14(e) □

III.3.22. Korollar. *Geodäten sind lokal Distanz minimierende Kurven, dh. ist $c : I \to M$ eine Geodäte, dann besitzt jeder Punkt in I eine Umgebung $J \subseteq I$, sodass für je zwei Punkte $s, t \in J$, $s < t$, die Geodäte $c|_{[s,t]}$ die bis auf Reparametrisierung eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge $d(c(s), c(t))$ von $c(s)$ nach $c(t)$ darstellt.*

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{U} \subseteq TM$ die offene Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM$ aus Korollar III.3.20. Weiters sei nun $t_0 \in I$. Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Umgebung J von t_0, sodass $(t-s)c'(s) \in \mathcal{U}$, für alle $s, t \in J$. Da c Geodäte ist, gilt weiters $c(t) = \exp((t-s)c'(s))$, $t, s \in I$. Nach der in Korollar III.3.20 formulierten Eigenschaft von $\mathcal{U}$, ist also $c|_{[s,t]}$ die eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge von $c(s)$ nach $c(t)$. □

III.3.23. Korollar. *Es existiert eine Umgebung U der Diagonale in $M \times M$, sodass sich je zwei Punkte $x, y \in M$ mit $(x, y) \in U$ durch eine, bis auf affine Reparametrisierung eindeutige Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbinden lassen. Bis auf Reparametrisierung ist dies die eindeutige (stückweise) glatte Kurve* *minimaler Länge von x nach y. Diese Geodäte ist von der Form $t \mapsto \exp_x(tX_{x,y})$, $t \in [0,1]$, für ein $X_{x,y} \in T_xM$, das glatt von (x,y) abhängig gewählt werden kann.*

Beweis. Bezeichnet $\mathcal{U} \subseteq TM$ die offene Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.20, dann hat $U := (\pi, \exp)(\mathcal{U}) \subseteq M \times M$ offensichtlich die gewüschten Eigenschaften. □

III.3.24. Korollar. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit minimaler Länge, dh.* $\operatorname{length}(c) = d(x,y)$*, dann kann c glatt nach Bogenlänge parametrisiert werden, und diese Reparametrisierung ist eine (ungebrochene) Geodäte.*

Beweis. Es sei $t \in [a,b]$. Wähle $a \leq \tilde{a} \leq t \leq \tilde{b} \leq b$, sodass $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ eine Umgebung von t in $[a,b]$ bildet und so, dass $(c(\tilde{a}), c(\tilde{b})) \in U$, wobei U die Umgebung der Diagonale in $M \times M$ aus Korollar III.3.23 bezeichnet. Beachte, dass auch das Teilstück $\tilde{c} := c|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ minimale Länge hat, $\operatorname{length}(\tilde{c}) = d(\tilde{c}(\tilde{a}), \tilde{c}(\tilde{b}))$. Aus Korollar III.3.23 folgt daher, dass sich $\tilde{c}$ glatt nach Bogenlänge parametrisieren lässt und in dieser Parametrisierung eine Geodäte ist. Das Korollar folgt nun unmittelbar. □

III.3.25. Beispiel (Geodäten in S^n)**.** Wir betrachten die Einheitssphäre $M = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit der von der flachen standard Riemannmetrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik, vgl. Beispiel III.1.11. Wir wollen nun zeigen, dass die Geodäten Großkreise in S^n parametrisieren, dh. die Bilder der Geodäten sind gerade die Durchschnitte $S^n \cap E \cong S^1$, wobei $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einen 2-dimensionalen linearen Teilraum bezeichnet. Dazu erinnern wir uns, dass die orthogonale Gruppe O_{n+1} auf S^n durch Isometrien wirkt. Insbesondere liefert die Spiegelung an einem 2-dimensionalen linearen Teilraum $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Isometrie $\varphi \in \operatorname{Isom}(S^n)$ mit Fixpunktmenge $\{x \in S^n : \varphi(x) = x\} = S^n \cap E$. Es sei nun $x \in S^n \cap E$ und $X \in T_xS^n$ tangential an $S^n \cap E$. Jede Isometrie bildet Geodäten auf Geodäten ab, genauer haben wir aufgrund der Eindeutigkeit, $\varphi(\exp(tY)) = \exp(tT_y\varphi \cdot Y)$, $Y \in T_yM$. Da $T_x\varphi \cdot X = X$, folgt $\varphi(\exp(tX)) = \exp(tX)$, die Geodäte $\exp(tX)$ muss daher zur Gänze in der Fixpunktmenge $S^n \cap E$ liegen. Ist $X \neq 0$, dann muss das Bild der Geodäte aus Dimensionsgründen mit $S^n \cap E$ übereinstimmen. Ist $|X| = 1$ und fassen wir $X \in T_xS^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ auf, so gilt

$$\operatorname{geo}_X(t) = \cos(t)x + \sin(t)X, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

denn dies ist eine Bogenlängenparametrisierung von $S^n \cap E$, wobei E den von x und X erzeugten Teilraum bezeichnet. Auf der Sphäre lassen sich daher je zwei Punkte durch eine Geodäte verbinden, diese Geodäte ist aber i.A. nicht eindeutig, $x \in S^n$ lässt sich mit $-x$ durch viele verschiedene Geodäten gleicher (minimaler) Länge verbinden. Beachte auch, dass jede Geodäte in S^n geschlossen (periodisch) ist.

III.3.26. Proposition. *Es sei $x \in M$ und $R > 0$ so, dass die Exponentialabbildung $\exp_x : B_R(0) \to M$ definiert ist, vgl. Korollar III.3.16(c). Dann kann jeder*

Punkt $y \in B_R(x)$ *durch eine (i.A. nicht eindeutige) Geodäte der Länge* $d(x,y)$ *mit* x *verbunden werden. Insbesondere gilt daher* $\exp_x(B_r(0)) = B_r(x)$ *für alle* $0 < r \leq R$ *und* $\exp_x(D_r(0)) = D_r(x)$ *für alle* $0 < r < R$.

Beweis. Setze $r := d(x,y) < R$. Weiters sei $\varepsilon > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_x : B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, vgl. Korollar III.3.16(d). Wähle $0 < \delta < \min\{r, \varepsilon\}$. Da $S_\delta(x) = \exp_x(S_\delta(0))$ kompakt ist, vgl. Satz III.3.18(e), existiert $X \in T_xM$ mit $|X| = 1$ und

$$d(\exp_x(\delta X), y) = d(S_\delta(x), y).$$

Die Geodäte $c : [0,r] \to M$, $c(t) := \exp_x(tX)$, ist wohldefiniert, startet bei $c(0) = x$ und hat Länge $\operatorname{length}(c) = r = d(x,y)$. Da $\delta < r = d(x,y)$, muss jeder stückweise glatte Weg von x nach y die Sphäre $S_\delta(x)$ treffen, und wir erhalten

$$r = d(x,y) = \min_{z \in S_\delta(x)} \big(d(x,z) + d(z,y)\big) = \delta + d(S_\delta(x), y) = \delta + d(c(\delta), y),$$

also $d(c(\delta), y) = r - \delta$. Betrachte nun

$$t' := \sup\big\{t \in [0,r] : d(c(t), y) = r - t\big\} \geq \delta.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt daher auch $d(c(t'), y) = r - t'$. Es genügt nun $t' = r$ zu zeigen, denn dann $d(c(r), y) = r - r = 0$ und somit $c(r) = y$, also wäre c die gesuchte Geodäte.

Wir gehen indirekt vor und nehmen $\delta \leq t' < r$ an. Es sei $\varepsilon' > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_{c(t')} : B_{\varepsilon'}(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Wähle $0 < \delta' < \min\{r - t', \varepsilon'\}$. Da $S_{\delta'}(c(t')) = \exp_{c(t')}(S_{\delta'}(0))$ kompakt ist, existiert $z' \in S_{\delta'}(c(t'))$ mit $d(z', y) = d(S_{\delta'}(c(t')), y)$. Da $\delta' < r - t' = d(c(t'), y)$, muss jeder stückweise glatte Weg von $c(t')$ nach y die Sphäre $S_{\delta'}(c(t'))$ treffen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} r - t' = d(c(t'), y) &= \min_{s \in S_{\delta'}(c(t'))} \big(d(c(t'), s) + d(s, y)\big) \\ &= \delta' + d(S_{\delta'}(c(t')), y) = \delta' + d(z', y), \end{aligned}$$

also

$$d(z', y) = r - (t' + \delta'). \tag{III.50}$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir daraus $r = d(x,y) \leq d(x,z') + d(z',y) = d(x,z') + r - (t' + \delta')$ und somit

$$d(x, z') \geq t' + \delta'. \tag{III.51}$$

Nach Satz III.3.18(c) existiert eine Geodäte γ von $c(t')$ nach z' mit $\operatorname{length}(\gamma) = d(c(t'), z') = \delta'$. Konkatenation von $c|_{[0,t']}$ mit γ liefert eine stückweise glatte Kurve von x nach z' mit Länge $t' + \delta'$. Kombinieren wir dies mit (III.51), so folgt $d(x, z') = t' + \delta'$. Aus Korollar III.3.24 folgt daher, dass z' auf der Geodäte c liegen muss, $c(t' + \delta') = z'$. Zusammen mit (III.50) folgt $d(c(t' + \delta'), y) = r - (t' + \delta')$, ein Widerspruch zur Definition von t'. Somit muss $t' = r$ gelten, und der Beweis der Proposition ist vollständig. $\square$

III.3.27. Satz (Hopf–Rinow)**.** *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) M ist vollständig, dh. Cauchy Folgen bzgl. d konvergieren.
(b) Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge ist kompakt.
(c) Es existiert $x \in M$, sodass $\exp_x : T_xM \to M$ global definiert ist.
(d) M ist geodätisch vollständig, dh. die Exponentialabbildung $\exp : TM \to M$ ist global definiert.

In diesem Fall können je zwei Punkte $x, y \in M$ durch eine (i.A. nicht eindeutige) Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbunden werden.

Beweis. Die Implikation (d) $\Rightarrow$ (c) ist trivial. Um (c) $\Rightarrow$ (b) einzusehen, sei $x \in M$, sodass $\exp_x : T_xM \to M$ global definiert ist. Nach Proposition III.3.26 ist daher $\exp_x : D_r(0) \to D_r(x)$ surjektiv, für jedes $r > 0$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $D_r(0)$ ist $D_r(x)$ also kompakt. Da jede beschränkte Teilmenge in einem solchen Ball $D_r(x)$ enthalten sein muss, sind beschränkte abgeschlossene Teilmengen folglich kompakt. Die elementare Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) wurde bereits in Proposition III.3.7 nachgewiesen. Es bleibt noch (a) $\Rightarrow$ (d) zu zeigen. Wir gehen indirekt vor und nehmen an es existiere $x \in M$ und $X \in T_xM$, sodass die Geodäte $\mathrm{geo}_X : I_X \to M$ nicht global definiert ist, dh. für das maximale Definitionsintervall gilt $I_X \neq \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei $|X| = 1$ und $\sup I_X = r < \infty$. Da Geodäten proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, gilt

$$d\big(\mathrm{geo}_X(s), \mathrm{geo}_X(t)\big) \leq \mathrm{length}\big(\mathrm{geo}_X|_{[s,t]}\big) = |t - s|, \qquad s, t \in I_X,\ s \leq t.$$

Wegen der Vollständigkeitsvoraussetzung (a) existiert daher der Grenzwert $y := \lim_{t\to r} \mathrm{geo}_X(t)$ in M. Nach Korollar III.3.21 existiert eine Umgebung K von y in M und $\varepsilon > 0$, sodass $\mathrm{geo}_Y(\varepsilon)$ definiert ist, für alle $Y \in T_yM$ mit $|Y| = 1$, $y \in K$. Nach Konstruktion existiert $t \in I_X$ mit $t > r - \varepsilon$ und $\mathrm{geo}_X(t) \in K$. Setzen wir $Y := \mathrm{geo}'_X(t)$, dann ist also $\mathrm{geo}_Y(\varepsilon)$ definiert. Nach Satz III.3.14(d) ist daher auch $\mathrm{geo}_X(t+\varepsilon)$ definiert. Da $t+\varepsilon > r$, erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von r. Somit muss $I_X = \mathbb{R}$ gelten, M ist daher geodätisch vollständig. Damit ist die Äquivalenz der vier Aussagen gezeigt. Die letzte Behauptung folgt nun sofort aus Proposition III.3.26. □

III.3.28. Korollar. *Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich je zwei Punkte durch eine (i.A. nicht eindeutige, vgl. Beispiel III.3.25) Geodäte minimaler Länge verbinden.*

III.3.29. Beispiel (Geodäten im Hyperbolischen Raum)**.** Wir versehen $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der pseudo Riemannmetrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ und betrachten $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x, x) = -1,\ x^0 > 0\}$ mit der davon induzierten Riemannschen Metrik. In Beispiel III.1.12 haben wir gesehen, dass H^n konstante negative Schnittkrümmung besitzt, $K = -1$. Von Beispiel III.1.12 abweichend, betrachten wir hier nur eine der beiden Zusammenhangskomponenten des Hyperboloids.

Sei nun $x \in H^n$ und $X \in T_x H^n = x^\perp$ mit $|X| = 1$. Bezeichnet E den von x und X erzeugten linearen Teilraum, dann liefert die Spiegelung an E eine Isometrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(H^n)$, die x und X festhält. Wie in Beispiel III.3.25 folgt, dass $E \cap H^n = \{y \in H^n : \varphi(y) = y\}$ Bild einer Geodäte ist. Genauer haben wir

$$\mathrm{geo}_X(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)X,$$

denn dies ist eine Bogenlängenparametrisierung von $H^n \cap E$. Insbesondere ist H^n (geodätisch) vollständig, je zwei Punkte in H^n lassen sich daher durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden, vgl. Satz III.3.27. Aus der expliziten Beschreibung der Geodäten sehen wir sogar, dass sich je zwei Punkte in H^n durch eine *eindeutige* Geodäte verbinden lassen, denn zwei solche Punkte liegen in genau einem 2-dimensionalen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir schließen, dass $\exp_x : T_x H^n \to H^n$ eine glatte Bijektion (sogar ein Diffeomorphismus) ist, für jedes $x \in H^n$. Um diese Geodäten explizit anzugeben, seien $x, y \in H^n$ und $X := (g(x,y)^2 - 1)^{-1/2}(g(x,y)x + y) \in T_x H^n = x^\perp$, $|X| = 1$. Die Geodäte $\mathrm{geo}_X(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)X$ startet bei $\mathrm{geo}_X(0) = x$ und trifft den Punkt y zu jenem Zeitpunkt $t \geq 0$, für den $\cosh(t) = -g(x,y)$ gilt. Für die Distanz erhalten wir daraus

$$\cosh(d(x,y)) = -g(x,y), \qquad x, y \in H^n. \tag{III.52}$$

Beachte, dass die Gruppe $\mathrm{O}_+(1,n) := \{A \in \mathrm{O}(1,n) : g(Ae_0, e_0) < 0\}$ durch Isometrien auf H^n wirkt, $\mathrm{O}_+(1,n) \subseteq \mathrm{Isom}(H^n)$. Wir wollen nun zeigen, dass dies schon die volle Isometriegruppe des hyperbolischen Raums ist,

$$\mathrm{Isom}(H^n) \cong \mathrm{O}_+(1,n). \tag{III.53}$$

Sei dazu $\psi \in \mathrm{Isom}(H^n)$ beliebig. Da $\mathrm{O}_+(1,n)$ transitiv auf H^n wirkt, existiert $A \in \mathrm{O}_+(1,n)$, sodass die Isometrie $\psi_1 := A^{-1} \circ \psi$ den Punkt e_0 festhält, $\psi_1(e_0) = e_0$. Da $T_{e_0}\psi_1$ eine orthogonale Abbildung ist, existiert $B \in \{1\} \times \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{O}_+(1,n)$, sodass die Isometrie $\psi_2 := B^{-1} \circ \psi_1$ nun $\psi_2(e_0) = e_0$ und $T_{e_0}\psi_2 = \mathrm{id}_{T_{e_0}H^n}$ erfüllt. Daraus folgt, dass ψ_2 Punkte, die auf Geodäten durch e_0 liegen festhält. Somit gilt $\psi_2 = \mathrm{id}_{H^n}$, also $\psi = AB \in \mathrm{O}_+(1,n)$. Dies zeigt (III.53). Für die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien, $\mathrm{Isom}_+(H^n)$, erhalten wir daraus

$$\mathrm{Isom}_+(H^n) \cong \mathrm{SO}_+(1,n). \tag{III.54}$$

Ein analoges Argument zeigt auch $\mathrm{Isom}(S^n) = \mathrm{O}(n+1)$, vgl. Beispiel III.1.11.

III.3.30. Beispiel (Poincaré Scheibenmodell)**.** Wir wollen nun das *Poincaré Scheibenmodell* des hyperbolischen Raums beschreiben. Dazu identifizieren wir den Einheitsball $\mathbb{E}^n := \{u \in \mathbb{R}^n : |u| < 1\}$ durch stereographische Projektion mit dem Hyperboloid H^n, dh. wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{E}^n \to H^n, \qquad f(u) := \frac{1}{1-|u|^2}\big(1+|u|^2, 2u\big) = (x^0, x), \tag{III.55}$$

mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : H^n \to \mathbb{E}^n, \qquad f^{-1}(x^0, x) = \frac{1}{1+x^0} x = u.$$

Ziehen wir die Riemannsche Metrik auf H^n, siehe Beispiel III.3.29, mittels f auf den Einheitsball zurück, so erhalten wir

$$g_{\mathbb{E}^n} := f^* g = \frac{4 g_0}{(1-|u|^2)^2}, \tag{III.56}$$

wobei $g_0 = \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i$ die Einschränkung der Standard Riemannmetrik auf $\mathbb{E}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Um dies einzusehen, beachte

$$dx^0 = d\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2} = \frac{\sum_i 2u^i du^i (1-|u|^2) + (1+|u|^2) \sum_i 2u^i du^i}{(1-|u|^2)^2} = \frac{4 \sum_i u^i du^i}{(1-|u|^2)^2}$$

also

$$dx^0 \otimes dx^0 = \frac{16}{(1-|u|^2)^4} \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j$$

und

$$dx^j = d\frac{2u^j}{1-|u|^2} = \frac{2du^j(1-|u|^2) + 4u^j \sum_i u^i du^i}{(1-|u|^2)^2}, \qquad 1 \le j \le n,$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n dx^j \otimes dx^j = \frac{1}{(1-|u|^2)^4} \Bigg(& 4(1-|u|^2)^2 \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j \\ & + 16(1-|u|^2) \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j + 16 \sum_{j=1}^n (u^j)^2 \sum_{i,k=1}^n u^i u^k du^i \otimes du^k \Bigg) \\ = \frac{1}{(1-|u|^2)^4} \Bigg(& 4(1-|u|^2)^2 \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j + 16 \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j \Bigg)\end{aligned}$$

und somit

$$f^* g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_j dx^j \otimes dx^j = \frac{4}{(1-|u|^2)^2} \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j = \frac{4g_0}{(1-|u|^2)^2},$$

wie behauptet.

Aus (III.52) und (III.55) erhalten wir für die Hyperbolische Distanz

$$\cosh(d_{\mathbb{E}^n}(u,v)) = 1 + \frac{2|u-v|^2}{(1-|u|^2)(1-|v|^2)}, \qquad u, v \in \mathbb{E}^n.$$

Insbesondere daher

$$\cosh(d_{\mathbb{E}^n}(u,0)) = \frac{1+|u|^2}{1-|u|^2}, \qquad u \in \mathbb{E}^n. \tag{III.57}$$

Aus (III.56) folgt für die Volumsform $\mathrm{vol}_{B^n} \in \Omega^n(B^n)$, vgl. Aufgabe 58,

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{E}^n} = \Big(\frac{2}{1-|u|^2}\Big)^n du^1 \wedge \cdots \wedge du^n.$$

Das Volumen der hyperbolischen Bälle $D_r^{\mathbb{E}^n} := \{u \in \mathbb{E}^n : d_{\mathbb{E}^n}(u,0) \leq r\}$ ist

$$\mathrm{Vol}\big(D_r^{\mathbb{E}^n}\big) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \sinh^{n-1}(\rho) d\rho, \tag{III.58}$$

denn nach (III.57) gilt $D_r^{\mathbb{E}^n} = \big\{u \in \mathbb{E}^n : |u| < \frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}\big\}$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\big(D_r^{\mathbb{E}^n}\big) &= \int_{|u| \leq \frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}} \Big(\frac{2}{1-|u|^2}\Big)^n du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}} \Big(\frac{2}{1-t^2}\Big)^n t^{n-1} dt = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \sinh^{n-1}(\rho) d\rho,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $t = \frac{\sinh(\rho)}{1+\cosh(\rho)}$ verwendet haben, $\frac{2}{1-t^2} = 1 + \cosh(\rho)$, $dt = \frac{d\rho}{1+\cosh(\rho)}$. Das Volumen der hyperbolischen Bälle wächst daher exponentiell mit dem Radius r. Durch Ableiten erhalten wir aus (III.58) auch das Volumen der hyperbolischen Sphären,

$$\mathrm{Vol}\big(S_r^{\mathbb{E}^n}\big) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sinh^{n-1}(r),$$

auch dies wächst exponentiell mit dem Radius.

Die Bilder der Geodäten in $\mathbb{E}^n$ sind Kreise, die den Rand der von $\mathbb{E}^n$ orthogonal treffen, bzw. Geraden durch den Mittelpunkt $0 \in \mathbb{E}^n$. Um dies einzusehen betrachten wir eine Ebene

$$E = \big\{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; x^0 \sin\theta = x^1 \cos\theta, x^3 = 0, \dots, x^n = 0\big\}, \tag{III.59}$$

wobei $|\theta| < \pi/4$. Das Bild der Geodäte $f^{-1}(E \cap H^n)$ in $\mathbb{E}^n$ ist daher, vgl. (III.55), durch das Gleichungssysthem

$$\big(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2\big) \sin\theta = 2u^1 \cos\theta, u^3 = 0, \dots, u^n = 0$$

beschrieben. Für $\theta = 0$ liefert dies eine Geraden, und für $\theta \neq 0$ die Gleichung eines Kreises, der den Rand von $\mathbb{E}^n$ in den beiden Punkten $(v^1, \pm v^2, 0, \dots, 0)$ trifft, wobei $v^1 = \tan\theta$ und $v^2 = \pm\sqrt{1-(v^1)^2}$. Die Tangenten in diesen Punkten sind durch

$$u^2 v^2 \sin\theta = u^1(\cos\theta - v^1 \sin\theta), u^3 = 0, \dots, u^n = 0$$

gegeben, gehen also durch den Ursprung, folglich schneidet der Kreis den Rand von $\mathbb{E}^n$ orthogonal. Beachte, dass jede Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ die H^n schneidet durch eine Isometrie in $\{1\} \times \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{O}(1,n)$ auf eine Ebene der Form (III.59) abgebildet werden kann, und dass der Diffeomorphismus (III.55) $\mathrm{O}(n)$-äquivariant ist, dh. obige Beobachtung bleibt für beliebige Geodäten in $\mathbb{E}^n$ richtig.

III.3.31. Beispiel (Poincaré Halbraummodell)**.** Schließlich wollen wir noch das *Poincaré Halbraummodell* des hyperbolischen Raums beschreiben. Dazu identifizieren wir den Halbraum $\mathbb{H}^n = \{(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n : y^1 > 0\}$ durch Inversion bei $P := (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ mit dem Einheitsball, dh. wir betrachten den Diffeomorphismus

$$h : \mathbb{H}^n \to \mathbb{E}^n, \qquad h(y) := P + \frac{2(y-P)}{|y-P|^2} = u, \tag{III.60}$$

mit Umkehrabbildung

$$h^{-1} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{H}^n, \qquad h^{-1}(u) = P + \frac{2(u-P)}{|u-P|^2} = x.$$

Da

$$|h(y)|^2 = 1 + \frac{4\langle y, P\rangle}{|y-P|^2}, \tag{III.61}$$

gilt $h(y) \in \mathbb{E}^n$ genau dann wenn $y \in \mathbb{H}^n$. Beachte auch

$$\begin{aligned} |h(y) - h(z)|^2 &= \frac{4}{|y-P|^2} + \frac{4}{|z-P|^2} - \frac{8\langle y-P, z-P\rangle}{|y-P|^2|z-P|^2} \\ &= \frac{4|(y-P)-(z-P)|^2}{|y-P|^2|z-P|^2} = \frac{4|y-z|^2}{|y-P|^2|z-P|^2} \end{aligned}$$

also mit (III.61)

$$\frac{|h(y)-h(z)|^2}{(1-|h(y)|^2)(1-|h(z)|^2)} = \frac{4|y-z|^2}{16\langle y, P\rangle\langle z, P\rangle} = \frac{|y-z|^2}{4y^1z^1}$$

und nach (III.57) daher

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(y,z)) = 1 + \frac{|y-z|^2}{2y^1z^1}, \qquad y, z \in \mathbb{H}^n.$$

Ziehen wir die Riemannsche Metrik $g_{\mathbb{E}^n}$ mit h auf den Halbraum zurück, so erhalten wir

$$g_{\mathbb{H}^n} := h^* g_{\mathbb{E}^n} = \frac{dy^1 \otimes dy^1 + \cdots + dy^n \otimes dy^n}{(y^1)^2} = \frac{g_0}{(y^1)^2},$$

denn $u^1 = -1 + \frac{2(y^1+1)}{|y-P|^2}$, also

$$du^1 = \frac{1}{|y-P|^4}\Big(2|y-P|^2dy^1 - 4(y^1+1)^2dy^1 - 4(y^1+1)\sum_{i=2}^n y^i dy^i\Big)$$

und $u^i = \frac{2y^i}{|y-P|^2}$, $2 \le i \le n$, also

$$du^i = \frac{1}{|y-P|^4}\Big(2|y-P|^2dy^i - 4y^i(y^1+1)dy^1 - 4y^i\sum_{j=2}^n y^j dy^j\Big), \quad 2 \le i \le n,$$

und durch direkte Rechnung
$$h^*g_0 = \frac{4g_0}{|y-P|^4}$$
und daher mittels (III.56) & (III.61)
$$h^*g_{\mathbb{E}^n} = \frac{16g_0}{(1-|h(y)|^2)^2|y-P|^4} = \frac{16g_0}{16\langle y,P\rangle^2} = \frac{g_0}{(y^1)^2}.$$
Da die Inversion bei P Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbildet sehen wir, dass die Bilder von Geodäten in $\mathbb{H}^n$ Kreise oder Geraden bilden die den Rand von $\mathbb{H}^n$ orthogonale treffen.

III.3.32. Beispiel (Hyperbolische Ebene)**.** Wir wollen nun noch den 2-dimensionalen Hyperbolischen Raum besprechen. Das Poincaré Scheibenmodell, siehe Beispiel III.3.30, $\mathbb{E} := \mathbb{E}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit Metrik
$$g_{\mathbb{E}} = \frac{4g_0}{(1-|z|^2)^2},$$
und das Poincaré Halbraummodell $\mathbb{H} := \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ mit Metrik
$$g_{\mathbb{H}} = \frac{g_0}{\operatorname{Im}(z)^2},$$
siehe Beispiel III.3.31, wobei g_0 wieder die standard Riemannmetrik auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir bezeichnen die Möbiustransformationen mit
$$\psi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\pm 1.$$
Es gilt
$$\psi_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm 1,$$
und jedes solche ψ_A wirkt als orientierungsbewahrende Isometrie auf $\mathbb{H}$. Da H^2 und $\mathbb{H}$ isometrische Riemannmannigfaltigkeiten bilden, vgl. Beispiel III.3.31, erhalten wir mit (III.54) nun leicht
$$\mathrm{SO}_+(1,2) \cong \mathrm{Isom}_+(H^2) \cong \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm 1.$$
Die volle Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ wird von $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H})$ und der orientierungsumkehrenden Isometrie $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$, erzeugt. Ebenso haben wir
$$\psi_A(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{SU}(1,1)/\pm 1,$$
und jedes solche ψ_A wirkt als orientierungsbewahrende Isometrie auf $\mathbb{E}$. Da H^2 und $\mathbb{E}$ isometrische Riemannmannigfaltigkeiten bilden, erhalten wir analog
$$\mathrm{SO}_+(1,2) \cong \mathrm{Isom}_+(H^2) \cong \mathrm{Isom}_+(\mathbb{E}) \cong \mathrm{SU}(1,1)/\pm 1.$$
Die volle Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ wird von $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{E})$ und der orientierungsumkehrenden Isometrie $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \bar{z}$, erzeugt. Beachte auch, dass die Möbiustransformation
$$\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \qquad \psi(z) := \frac{\mathbf{i}z+1}{z+\mathbf{i}},$$

eine Isometrie $\mathbb{H} \cong \mathbb{E}$ liefert, denn $\psi(z) = \overline{h(z)}$, vgl. (III.60).

III.3.33. Bemerkung (Total geodätische Teilmannigfaltigkeiten)**.** Eine Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M wird *total geodätisch* genannt, wenn jede Geodäte von S (bzgl. der von M induzierten Riemannmetrik) auch Geodäte in M ist. Wir erinnern uns an

$$\nabla_X Y = \nabla^S_X Y + \mathrm{II}(X,Y), \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(S), \tag{III.62}$$

wobei $\mathrm{II} \in \Gamma(S^2T^*S \otimes T^\perp S)$ die zweite Fundamentalform von S bezeichnet, siehe Satz III.1.9(c). Ist nun $c : I \to S$ eine Geodäte in S, die gleichzeitig Geodäte in M ist, dann gilt $\nabla^S_{c'}c' = 0 = \nabla_{c'}c'$ und wegen (III.62) daher $\mathrm{II}(c',c') = 0$. Da die zweite Fundamentalform symmetrisch ist, folgt nun, dass S genau dann total geodätisch ist wenn die zweite Fundamentalform von S verschwindet, $\mathrm{II} = 0$. Beispiele: affine Teilräume im flachen $\mathbb{R}^n$ bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten; Durchschnitte linearer Teilräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit S^n bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten der runden Sphäre; Durchschnitte linearer Teilräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit H^n bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten im hyperbolischen Raum; ist das Bild einer Geodäte eine Teilmannigfaltigkeit, dann ist diese offensichtlich total geodätisch.

III.3.34. Korollar. *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist der Raum der stetigen Abbildungen $C(X,M)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, lokal kontrahierbar. Insbesondere existiert zu $f \in C(X,M)$ ein $\varepsilon > 0$, sodass jede stetige Abbildung $h : X \to M$ mit $\max_{x\in X} d(f(x),h(x)) < \varepsilon$ homotop zu f ist.*

Beweis. Nach Korollar III.3.20 existiert eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0,\infty)$, sodass die offene Umgebung des Nullschnitts $\mathcal{U} := \{\xi \in TM : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\}$ durch $(\pi, \exp)$ diffeomorph auf eine offene Umgebung der Diagonale U abgebildet wird. Ist nun $f \in C(X,M)$, dann bildet

$$\mathcal{C}_f(X,M) := \big\{h \in C(X,M) \;\big|\; \forall x \in X : (f(x),h(x)) \in U\big\}$$

eine kontrahierbare Umgebung von f, eine entsprechende Kontraktion ist durch

$$\mathcal{C}_f(X,M) \times [0,1] \to \mathcal{C}_f(X,M), \quad (h,t) \mapsto \exp\circ\big(t((\pi,\exp)^{-1}\circ(f,h))\big),$$

gegeben, dh. $h_t(x) = \exp_{f(x)}(t\exp^{-1}_{f(x)}(h(x)))$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = h$. □

III.3.35. Definition (Geodätisch konvexe Teilmengen)**.** Eine Teilmenge A in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird *geodätisch konvex* genannt, wenn zu je zwei Punkten $x,y \in A$ genau eine Geodäte minimaler Länge $d(x,y)$ von x nach y existiert und diese zur Gänze in A liegt. Beachte, dass der Durchschnitt geodätisch konvexer Teilmengen offensichtlich wieder geodätisch konvex ist.

III.3.36. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $x \in M$, dann sind die Bälle $B_\rho(x)$, für hinreichend kleine $\rho > 0$, geodätisch konvex.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ wie in Satz III.3.18. Durch Verkleinern von ε dürfen wir annehmen, dass je zwei Punkte in $B_\varepsilon(x)$ durch eine eindeutige Geodäte minimaler Länge verbunden werden können, siehe Korollar III.3.23. Wir wählen eine Orthonormalbasis von T_xM, betrachten die damit assozierten Riemannschen Normalkoordinaten, vgl. Bemerkung III.3.17, und bezeichnen die entsprechenden Christoffel Symbole mit Γ_{ij}^k. Nach (III.47) gilt daher $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$. Durch weiteres Verkleinern von ε können wir also auch erreichen, dass

$$\Biggl(\sum_{k=1}^n\Bigl(\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(y)v^iv^j\Bigr)^2\Biggr)^{1/2} \leq |v|^2, \qquad y \in B_\varepsilon(x),\ v = (v^1,\dots,v^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ist c eine Geodäte in $B_\varepsilon(x)$ und bezeichnen $\tilde c = (\tilde c^1,\dots,\tilde c^n)$ die Komponenten von $\tilde c$ in Riemannschen Normalkoordinaten, dann folgt aus der Geodätengleichung $(\tilde c^k)'' = -\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\tilde c^i)'(\tilde c^j)'$, siehe Lemma III.3.10, zusammen mit obiger Abschätzung

$$|\tilde c''(t)| \leq |\tilde c'(t)|^2. \tag{III.63}$$

Setzen wir weiters $\varepsilon \leq 1$ voraus, dann gilt auch, vgl. Satz III.3.18(d),

$$1 - |\tilde c(t)| \geq 0. \tag{III.64}$$

Sei nun $0 < \rho \leq \varepsilon/3$. Wir werden unten zeigen, dass der Ball $B_\rho(x)$ geodätisch konvex ist. Seien dazu $y, z \in B_\rho(x)$. Nach Konstruktion existiert eine eindeutige Geodäte minmaler Länge, die y mit z verbindet. Da $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < 2\rho$, liegt diese zur Gänze in $B_{2\rho}(y) \subseteq B_{3\rho}(x) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Wir bezeichnen diese Geodäte mit $c : [a,b] \to B_\varepsilon(x)$. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild von c sogar im Ball $B_\rho(x)$ liegt. Betrachte dazu die glatte Abbildung

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad r(t) := d(x,c(t))^2/2 = |\tilde c(t)|^2/2, \tag{III.65}$$

wobei $\tilde c = (\tilde c^1,\dots,\tilde c^n)$ die Komponenten der Geodäte in Riemannschen Normalkoordinaten bezeichnen, vgl. Satz III.3.18(d). Beachte, $r'(t) = \langle \tilde c(t), \tilde c'(t)\rangle$ und

$$r''(t) = |\tilde c'(t)|^2 + \langle \tilde c(t), \tilde c''(t)\rangle \geq |\tilde c'(t)|^2 - |\tilde c(t)||\tilde c''(t)| \geq |\tilde c'(t)|^2\bigl(1 - |\tilde c(t)|\bigr) \geq 0$$

nach Cauchy–Schwarz, (III.63) und (III.64). Somit ist (III.65) eine konvexe Funktion. Für jedes $t \in [a,b]$ gilt daher $r(t) \leq \max\{r(a), r(b)\} < \rho^2/2$, also liegt c zur Gänze im Ball $B_\rho(x)$. $\square$

III.3.37. Satz. *Jede nicht-leere, hinreichend kleine, offene, geodätisch konvexe Teilmenge einer Riemannschen n-Mannigfaltigkeit M ist zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorph. Genauer existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq M$ ein $\varepsilon > 0$, sodass jede offene, geodätisch konvexe Teilmenge $U \subseteq K$ mit $\operatorname{diam}(U) \leq \varepsilon$ schon diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ sein muss.*

Beweis. Sei also U eine offene, geodätisch konvexe Teilmenge und $x \in U$. Da U offen ist, bildet

$$V := \bigl\{\xi \in T_xM \bigm| \forall t \in [0,1] : \exp_x(t\xi) \in U\bigr\}$$

eine offene Umgebung von 0 in T_xM. Da U geodätisch konvex ist, liefert die Exponentialabbildung $\exp_x : V \to U$ eine glatte Bijektion. Ist U hinreichend klein, dann ist dies ein Diffeomorphismus, $V \cong U$. Der Satz folgt daher aus Lemma III.3.38 unten. □

III.3.38. Lemma. *Jede sternförmige, offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. O.B.d.A. sei 0 Zentrum von U, dh. für jedes $x \in U$ liegt die affine Strecke von 0 nach x zur Gänze in U. Durch Anwenden des radialen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \cong B^n$, $x \mapsto x(1+|x|^2)^{-1/2}$, dürfen wir weiters $U \subseteq B^n$ annehmen. Mit Hilfe einer Partition der Eins lässt sich leicht eine glatte Funktion $\chi : U \to (0,\infty)$ konstruieren, sodass

$$\chi(x) < d(x, \mathbb{R}^n \setminus U), \qquad x \in U. \tag{III.66}$$

Betrachte nun die glatte Funktion $\lambda : U \to (0,\infty)$, $\lambda(x) := \int_0^1 \frac{dt}{\chi(tx)}$, und definiere eine glatte Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x) := \lambda(x)x. \tag{III.67}$$

Um zu verstehen wie f auf radialen Strahlen wirkt, fixieren wir $\xi \in S^{n-1}$ und setzen $r := \sup\{s \geq 0 \mid s\xi \in U\} \leq 1$. Für $s \in [0,r)$ gilt $\lambda(s\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{\chi(ts\xi)} = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}$, also

$$f(s\xi) = \int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}\xi, \qquad s \in [0,r).$$

Beachte, dass $s \mapsto \int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}$ streng monoton wachsend ist, denn $\chi > 0$. Aus (III.66) erhalten wir weiters $\chi(s\xi) \leq r - s$, woraus wir $\int_0^r \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)} \geq \int_0^r \frac{d\tau}{r-\tau} = \infty$ schließen. Dies zeigt, dass f den Strahl $U \cap ([0,\infty)\xi)$ diffeomorph auf den Strahl $[0,\infty)\xi$ abbildet. Folglich ist (III.67) eine glatte Bijektion. Für die Ableitung von f gilt

$$D_xf \cdot X = d\lambda_x(X)x + \lambda(x)X, \qquad x \in U,\ X \in \mathbb{R}^n,$$

woraus wir sehen, dass D_xf invertierbar ist. Nach dem inversen Funktionensatz ist (III.67) daher ein Diffeomorphismus. □

III.3.39. Bemerkung. Nach Satz III.3.36 besitzt jede Riemannsche Mannigfaltigkeit eine offene Überdeckung durch geodätisch konvexe Teilmengen, und diese Überdeckung kann so gewählt werden, dass sie einer vorgegebenen offenen Überdeckung untergeordnet ist. Jede Überdeckung durch offene, geodätisch konvexe Teilmengen ist gut im Sinn von Definition I.3.24. Dies folgt aus Satz III.3.37, denn jeder nicht-leere Durschnitt endlich vieler offener, geodätisch konvexer Teilmengen ist offensichtlich wieder offen und geodätisch konvex. Damit ist also Satz I.3.25 bewiesen.

Als weitere Anwendung von Korollar III.3.16 wollen nun noch die Existenz tubulärer Umgebungen beweisen, vgl. Satz II.1.16 oben.

III.3.40. Satz (Tubuläre Umgebungen)**.** *Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit mit Normalenbündel $T^\perp S = TM|_S/TS$. Dann existiert eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : T^\perp S \cong U$ mit $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}$, wobei wir S mit dem Nullschnitt in $T^\perp S$ identifizieren.*

Beweis. Wir fixieren eine Riemannmetrik auf M und identifizieren $T^\perp S = \{X \in TM|_S : X \perp S\}$. Nach Korollar III.3.16(a) existiert eine offene Umgebung des Nullschnitts $\mathcal{D} \subseteq T^\perp S$, sodass $\varphi := \exp|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to M$ wohldefiniert ist. Offensichtlich gilt $\varphi(x) = x$ für $x \in S$ und somit auch $T_x\varphi \cdot X = X$ für $X \in T_xS$. Aus Korollar III.3.16(c) erhalten wir weiters $T_x\varphi \cdot X = X$, für $x \in S$ und $X \in T_x^\perp S$. Bis auf die Identifikationen $T_xT^\perp S = T_xS \oplus T_x^\perp S = T_xM$ hat die Ableitung von φ bei $x \in S$ daher die Form

$$T_x\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_xS} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{T_x^\perp S} \end{pmatrix}.$$

Durch Verkleineren von $\mathcal{D}$ können wir erreichen, dass die Ableitung $T_\xi\varphi$ bei jedem $\xi \in \mathcal{D}$ invertierbar ist. Nach dem inversen Funktionensatz ist $\varphi|_{\mathcal{D}}$ somit ein lokaler Diffeomorphismus. Es bleibt nun zu zeigen, dass durch weiteres Schrumpfen von $\mathcal{D}$ auch Injektivität von $\varphi|_{\mathcal{D}}$ erreicht werden kann, vgl. [**2**, §12] oder [**4**, Chapter 4§5].

Durch weiteres Verkleinern von $\mathcal{D}$ können wir zunächst sicher stellen, dass $d(\pi(\xi), \varphi(\xi)) = |\xi|$, für alle $\xi \in \mathcal{D}$, siehe Korollar III.3.20. Es existiert eine glatte Funktion $\varepsilon : S \to (0, \infty)$, sodass für jedes $x \in S$

$$V_x := \big\{\xi \in T^\perp S : d(\pi(\xi), x) < \varepsilon(x),\ |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\big\} \subseteq \mathcal{D}$$

und $\varphi|_{V_x}$ ein Diffeomorphismus ist.[14] Wir werden nun zeigen, dass φ auf der offenen Umgebung des Nullschnitts $V := \{\xi \in T^\perp S : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))/2\} \subseteq \mathcal{D}$ injektiv ist. Seien dazu $\xi, \eta \in V$ mit $\varphi(\xi) = \varphi(\eta)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(\pi(\xi), \pi(\eta)) &\leq d(\pi(\xi), \varphi(\xi)) + d(\varphi(\eta), \pi(\eta)) \\ &= |\xi| + |\eta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon(\pi(\xi)) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(\pi(\eta)) \leq \max\{\varepsilon(\pi(\xi)), \varepsilon(\pi(\eta))\}. \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $d(\pi(\xi), \pi(\eta)) < \varepsilon(\pi(\eta))$. Dann ist $\xi \in V_{\pi(\eta)}$, und trivialerweise auch $\eta \in V_{\pi(\eta)}$. Da φ auf $V_{\pi(\eta)}$ ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir $\xi = \eta$, also ist φ auf V injektiv. Somit liefert φ einen Diffeomorphismus von V auf die offene Umgebung $U := \varphi(V)$ von S in M. Setzen wir φ noch mit dem radialen Diffeomorphismus

$$T^\perp S \xrightarrow{\cong} V, \qquad \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + (2|\xi|/\varepsilon(\pi(\xi))^2}}\,\xi,$$

zusammen, so erhalten wir den gewünschten Diffeomorphismus $T^\perp S \cong U$. □

[14] Zu jedem $y \in S$ existiert $\rho_y > 0$, sodass $W_y := \{\xi \in T^\perp S : |\xi| < \rho_y,\ d(\pi(\xi), y) < \rho_y\} \subseteq \mathcal{D}$ und $\varphi|_{W_y}$ ein Diffeomorphismus ist. Dies folgt daraus, dass φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, es geht aber auch ein, dass S die Teilraumtopologie von M trägt. Mit Hilfe einer Partition der Eins auf S lässt sich damit die gesuchte Funktion ε konstruieren.

III.4. Überlagerungen. In diesem Abschnitt wiederholen wir zuerst die Grundlagen der Überlagerungstheorie topologischer Räume, siehe etwa [**5**, Kapitel IX], [**14**, Chapter 1.3], [**18**, Kapitel II.6], [**16**, Kapitel III.6], [**17**, Chapter 2] oder [**15**, Chapter 3]. Anschließend zeigen wir, dass jede endlich präsentierbare Gruppe als Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden glatten orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit vorgegebener Dimension $n \geq 4$ realisiert werden kann, siehe Satz III.4.34 unten. Die Überlagerungstheorie glatter Mannigfaltigkeiten ist daher sehr reichhaltig. Im letzten Teil dieses Abschnitts widmen wir uns Riemannschen Überlagerungen. Unter anderem werden wir sehen, dass die Exponentialabbildung einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit eine Überlagerung ist, wenn sie in jedem Punkt invertierbare Ableitung hat, siehe Korollar III.4.40 unten. In diesem Fall ist die universelle Überlagerung daher zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorph, eine starke Einschränkung an die Topologie solcher Mannigfaltigkeiten. Im nächsten Abschnitt werden wir dies auf Mannigfaltigkeiten mit nicht positiver Schnittkrümmung anwenden.

Eine Überlagerung ist eine surjektive stetige Abildung $p : \tilde{X} \to X$ mit folgender Eigenschaft. Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x, ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, sodass $\mathrm{pr}_1 \circ \phi = p|_{p^{-1}(U)}$, wobei $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ die kanonische Projektion bezeichnet.[15] In dieser Situation werden X und $\tilde{X}$ als *Basis* und *Totalraum* der Überlagerung bezeichnet, p wird *Überlagerungsabbildung* oder *Projektion* genannt. Für $x \in X$ wird der diskrete Raum $F_x := p^{-1}(x)$ als Faser über x bezeichnet. Die Kardinalität der Faser F_x ist lokal konstant in x, für zusammenhängendes X ist sie daher konstant. Besteht jede Faser aus k Elementen, dann sprechen wir von einer *k-blättrigen Überlagerung.* Zwei Überlagerungen $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ und $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ von X werden isomorph genannt, falls ein Homöomorphismus $\psi : \tilde{X}_1 \xrightarrow{\cong} \tilde{X}_2$ mit $p_2 \circ \psi = p_1$ existiert. Unter einer Decktransformation einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, verstehen wir einen Homöomorphismus $\phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $p \circ \phi = p$. Die Menge der Decktransformationen bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die als Symmetriegruppe der Überlagerung verstanden werden kann und mit $\mathrm{Deck}(p)$ oder $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ bezeichnet wird.

III.4.1. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f, g : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p \circ f = p \circ g$. Dann ist die Menge $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ offen und abgeschlossen in Y. Insbesondere ist die Fixpunktmenge einer Decktransformation stets offen und abgeschlossen. Für zusammenhängendes $\tilde{X}$ wirkt die Gruppe der Deckransformationen daher frei, und sogar strikt diskontinuierlich[16] auf $\tilde{X}$.*

[15] Überlagerungen sind daher lokal triviale Faserbündel mit diskreten Fasern.

[16] Eine Gruppenwirkung $G \times Y \to Y$ auf einem topologischen Raum Y wird strikt diskontinuierlich genannt, falls jeder Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $gU \cap U = \emptyset$, für alle $1 \neq g \in G$. Strikt diskontinuierliche Wirkungen müssen insbesondere frei sein, die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht.

Beweis. Die Offenheit von $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ folgt daraus, dass Überlagerungsabbildungen lokal injektiv sind. Da Punkte einer Faser durch offene Mengen getrennt werden können ist diese Menge auch abgeschlossen. Sei nun $\tilde{X}$ zusammenhängend, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $\tilde{x}$ auf der p injektiv ist. Weiters sei $\phi \in \operatorname{Deck}(\tilde{X})$ mit $\phi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Dann existiert $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\phi(\tilde{y}) \in \tilde{U}$ und $p(\tilde{y}) = p(\phi(\tilde{y}))$, also $\phi(\tilde{y}) = \tilde{y}$ wegen der Injektivität von $p|_{\tilde{U}}$. Da die Menge der Fixpunkte von ϕ offen und abgeschlossen ist, folgt $\phi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Dies zeigt, dass $\operatorname{Deck}(\tilde{X})$ strikt diskontinuierlich auf $\tilde{X}$ wirkt. $\square$

III.4.2. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine surjektive stetige Abbildung mit folgender Eigenschaft: zu jedem Punkt $x \in X$ existiere eine offene Umgebung U von x und paarweise disjunkte offene Umgebungen $U_{\tilde{x}}$ von $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$, sodass $p|_{U_{\tilde{x}}} : U_{\tilde{x}} \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Dann ist p eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. Es seien x, U und $U_{\tilde{x}}$ wie in der Formulierung des Lemmas. Wir versehen $F := p^{-1}(x)$ mit der diskreten Topologie und betrachte die Abbildung

$$\phi : U \times F \to p^{-1}(U) \subseteq \tilde{X}, \qquad \phi(y, \tilde{x}) := (p|_{U_{\tilde{x}}})^{-1}(y).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass ϕ ein Homöomorphismus ist, der die kanonische Projektion $U \times F \to U$ mit $p|_{p^{-1}(U)}$ identifiziert. Da dies für jedes $x \in X$ gilt, ist p eine Überlagerung. $\square$

III.4.3. Beispiel. Ist X ein topologischer Raum und F diskret, dann bildet die kanonische Projektion $X \times F \to X$ eine Überlagerung. Jede zu einer solchen Überlagerung isomorphe Überlagerung wird als *triviale Überlagerung* bezeichnet.

III.4.4. Beispiel. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $A \subseteq X$, dann ist auch $p : p^{-1}(A) \to A$ eine Überlagerung, sie wird mit $\tilde{X}|_A$ bezeichnet.

III.4.5. Beispiel. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \tilde{Y} \to Y$ zwei Überlagerungen, dann ist auch $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. Mittels Induktion folgt, dass endliche Produkte von Überlagerungen wieder Überlagerungen sind. Für unendlich viele Faktoren bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe etwa [**17**, Example 2.2.9].

III.4.6. Bemerkung. Die Komposition zweier Überlagerungen ist i.A. keine Überlagerung, siehe etwa [**17**, Example 2.2.8].

III.4.7. Beispiel. Ist $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$ eine Gruppe von Homöomorphismen, die auf X strikt diskontinuierlich wirkt, dann bildet die kanonische Projektion auf den Orbitraum, $p : X \to X/G$, eine Überlagerung, vgl. Lemma III.4.2. Die Blätterzahl dieser Überlagerung stimmt mit der Ordnung von G überein, denn G wirkt frei und transitiv auf jeder Faser. Offensichtlich ist jedes Element von G eine Decktransformation, $G \subseteq \operatorname{Deck}(X \to X/G)$. Für zusammenhängendes X gilt sogar $G = \operatorname{Deck}(X \to X/G)$. Dies folgt aus Lemma III.4.1, da G transitiv auf den Fasern wirkt.

III.4.8. Beispiel. Die kanonische Projektion $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(S^n \to \mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

III.4.9. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) := e^{\mathbf{i}t}$, ist eine ∞-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}$.

III.4.10. Beispiel. Die Abbildung $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := e^z$, ist eine ∞-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}$.

III.4.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p : S^1 \to S^1$, $p(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_n$.

III.4.12. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_n$.

III.4.13. Satz (Homotopieliftungseigenschaft)**.** *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Y \times I \to X$ stetig und $\tilde{h} : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p(\tilde{h}(y)) = H(y, 0)$ für alle $y \in Y$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbidlung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$, sodass $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{h}(y)$ für alle $y \in Y$.*

Beweis. Zu jedem Punkt $y \in Y$ existiert eine offene Umgebung V von y und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$, sodass für jedes $i = 1, \dots, N$, das Bild $H(V \times [t_{i-1}, t_i])$ in einer offenen Teilmenge $U_i \subseteq X$ liegt, über der die Überlagerung trivial ist, $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times F_i$. Durch Verkleinern von V können wir auch erreichen, dass $\tilde{h}(V) \subseteq U_1 \times \{f_1\}$, für ein $f_1 \in F_1$. Die Abbildung $H|_{V \times [t_0, t_1]}$ lässt sich dann leicht zu einer Abbildung $\tilde{H} : V \times [t_0, t_1] \to \tilde{X}$ liften, sodass $\tilde{H}_{t_0} = \tilde{h}|_V$. Durch Verkleinern von V können wir auch $\tilde{H}_{t_1}(V) \subseteq U_2 \times \{f_2\}$ erreichen, $f_2 \in F_2$, und dann die Abbildung $H|_{V \times [t_1, t_2]}$ zu einer Abbildung $\tilde{H} : V \times [t_1, t_2] \to \tilde{X}$ liften, sodass diese mit dem schon konstruierten Teil von $\tilde{H}$ auf $V \times \{t_1\}$ übereinstimmt. Induktiv fortfahrend erhalten wir eine stetige Abbildung $\tilde{H} : V \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}|_V$.

Ist $\tilde{G} : W \times I \to \tilde{X}$ eine weitere stetige Abbildung mit $p \circ \tilde{G} = H|_{W \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_W$, dann müssen G und H auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $(V \cap W) \times I$ übereinstimmen, denn für fixes $y \in V \cap W$ ist die Menge $\{t \in I \mid \tilde{G}(y, t) = \tilde{H}(y, t)\}$ offen und abgeschlossen, siehe Lemma III.4.1, und enthält 0. Die lokal konstruierten Lifts von H fügen sich daher zu einer global definierten stetigen Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ mit den gewünschten Eigenschaften zusammen. □

III.4.14. Korollar (Liften von Wegen)**.** *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\gamma : I \to X$ ein Weg und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = \gamma(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Beweis. Die folgt aus Satz III.4.13 mit $Y = \{*\}$. □

Zwei Wege $\alpha, \beta : I \to X$ werden *homotop relativ Endpunkten* genannt, falls eine Homotopie $H : I \times I \to X$ existiert, sodass $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$,

$H(0,t) = \text{const} = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(1,t) = \text{const} = \alpha(1) = \beta(1)$, für alle $s, t \in I$. Jede solche Homotopie wird eine *Homotopie relativ Endpunkten von α nach β* genannt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in X, die Äquivalenzklassen werden als *Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten* bezeichnet.

III.4.15. Korollar. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege die homotop relativ Endpunkten sind, und $\tilde\alpha, \tilde\beta : I \to \tilde X$ Lifts, $p \circ \tilde\alpha = \alpha$, $p \circ \tilde\beta = \beta$, zum gleichen Anfangspunkt, $\tilde\alpha(0) = \tilde\beta(0)$. Dann sind auch $\tilde\alpha$ und $\tilde\beta$ homotop relativ Endpunkten und haben daher gleiche Endpunkte, $\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H : I \times I \to X$ mit $H(s,0) = \alpha(s)$, $H(s,1) = \beta(s)$, $H(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$, für alle $s, t \in I$. Nach Satz III.4.13 lässt sich H zu einer Homotopie $\tilde H : I \times I \to \tilde X$ liften, $p \circ \tilde H = H$, sodass $\tilde H(s,0) = \tilde\alpha(s)$. Die Wege $t \mapsto \tilde H(0,t)$ bzw. $t \mapsto \tilde H(1,t)$ sind Lifts der konstanten Wege $\alpha(0) = \beta(0)$ bzw. $\alpha(1) = \beta(1)$, und daher selbst konstant. Somit ist $\tilde H$ eine Homotopie relativ Endpunkten. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar III.4.14 folgt $\tilde H(s,1) = \tilde\beta(s)$, denn beide Seiten sind Lifts von β zum Anfangswert $\tilde H(0,1) = \tilde H(0,0) = \tilde\alpha(0) = \tilde\beta(0)$. Also ist $\tilde H$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $\tilde\alpha$ nach $\tilde\beta$. □

Ist $x_0 \in X$ ein Basispunkt, dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten, die bei x_0 starten und enden. Solche Wege werden auch *Schleifen bei x_0* genannt. Die *Konkatenation* von Wegen definiert eine, i.A. nicht abelsche Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$. Das neutrale Element wird durch den konstanten Weg x_0 repräsentiert, das Inverse durch den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird als *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* von X beim Basispunkt x_0 bezeichent. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, und diese Zuordnung ist funktoriell, dh. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Ist σ ein Weg in X von $\sigma(0) = x_0$ nach $\sigma(1) = x_1$, dann definiert Konjugation mit σ einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, $[\alpha] \leftrightarrow [\sigma^{-1}\alpha\sigma]$.[17] Für wegzusammenhängendes X wird die Fundamentalgruppe daher oft als $\pi_1(X)$ notiert.

III.4.16. Proposition (Einfacher Zusammenhang)**.** *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dann sind äquivalent:*

(a) Zu $x, y \in X$ gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen von x nach y.
(b) Für alle $x_0 \in X$ gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$.
(c) Es existiert $x_0 \in X$ mit $\pi_1(X, x_0) = 0$.
(d) Jede Schleife $\gamma : S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

[17] Dieser Isomorphismus ist jedoch nicht kanonisch, er hängt i.A. von der Wahl (der Homotopieklasse) von σ ab.

(e) Jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$ ausdehnen, $F|_{S^1} = f$.

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum der diese äquivalenten Eigenschaften besitzt wird einfach zusammenhängend *genannt.*

Beweis. Sind $x, y, z \in X$ und ist σ ein Weg von y nach z, dann definiert die Konkatenation mit σ eine Bijektion $\mathcal{P}_{x,y}(X) \cong \mathcal{P}_{x,z}(X)$, wobei $\mathcal{P}_{x,y}(X)$ die Menge der Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten von x mit y bezeichnet. Analog liefert jeder Weg von x nach y eine Bijektion $\mathcal{P}_{y,z}(X) \cong \mathcal{P}_{x,z}(X)$. Daraus erhalten wir sofort die Äquivalenzen (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$(c). Die Wahl eines Homöomorphismus $I/\{0,1\} \cong S^1$ erlaubt es stetige Abbildungen $I \to X$, die beide Randpunkte auf x_0 abbilden mit stetigen Abbildungen $S^1 \to X$ zu identifizieren, die einen Basispunkt $* \in S^1$ auf x_0 abbilden. Dies ist mit Homotopien verträglich und liefert eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X, x_0) \cong [(S^1, *), (X, x_0)] \to [S^1, X]$. Im wegzusammenhängenden Fall induziert diese Abbildung eine Bijektion zwischen den Konjugationsklassen von $\pi_1(X, x_0)$ und der Menge der (freien) Homotopieklassen $[S^1, X]$, siehe [**18**, Satz 5.1.12] oder [**14**, Section 1.1, Exercise 6]. Daraus folgt nun die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$(d), denn eine Gruppe ist genau dann trivial, wenn sie nur eine Konjugationsklasse besitzt. Die Äquivalenz (d) $\Leftrightarrow$(e) ist offensichtlich, denn jede Homotopie $H : S^1 \times I \to X$ von $H_0 = f$ nach $H_1 = \mathrm{const}$ faktorisiert zu einer stetigen Abbildung $D^2 \cong (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\}) \to X$, deren Einschränkung auf $S^1 \subseteq D^2$ mit f übereinstimmt. □

III.4.17. Korollar. *Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung,*[18] *dann ist der induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ injektiv.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar III.4.15. □

Das Bild des injektiven Homomorphismus p_* in Korollar III.4.17, dh. die Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$, wird als *charakteristische Untergruppe* der punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bezeichnet. Ein Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ liegt genau dann in der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, wenn seine Repräsentanten zu *Schleifen* bei $\tilde{x}_0$ liften.

III.4.18. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$. Existiert ein Weg $\tilde{\sigma} : I \to \tilde{X}$ von $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{x}_0$ nach $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_1$, dann sind die entsprechenden charakteristischen Untergruppen konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$,*

$$p_*(\pi_1(X, \tilde{x}_1)) = [\sigma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\sigma],$$

wobei $\sigma := p \circ \tilde{\sigma} : I \to X$ und $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$.

[18] Unter einer *punktierten Überlagerung* verstehen wir eine Überlagerung mit Basispunkten, $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, wobei $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Zwei punktierte Überlagerungen $p(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ werden isomorph genannt, wenn ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ existiert, $q \circ \phi = p$, $\phi(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Beweis. Dies folgt daraus, dass Konjugation mit $\tilde{\sigma}$ einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, $[\alpha] \leftrightarrow [\tilde{\sigma}^{-1}\alpha\tilde{\sigma}]$, definiert. □

III.4.19. Korollar. *Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x_0 \in X$, dann wirkt $\pi_1(X, x_0)$ in natürlicher Weise von rechts auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Für wegzusammenhängendes $\tilde{X}$ ist diese Wirkung transitiv. Die Isotropiegruppe eines Punktes $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$ stimmt mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ überein. Im zusammenhängenden Fall stimmt der Index der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ also mit der Blätterzahl der Überlagerung überein.*

Beweis. Es sei $\tilde{x} \in F_{x_0}$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, wobei $\alpha : I \to X$ eine Schleife bei x_0 bezeichnet. Weiters sei $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ der eindeutige Lift von α, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, mit Anfangswert $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$, siehe Korollar III.4.14. Nach Korollar III.4.15 ist der Endpunkt $\tilde{\alpha}(1) \in F_{x_0}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten α. Diese Konstruktion definiert daher eine Abbildung

$$F_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \to F_{x_0}, \qquad (\tilde{x}, [\alpha]) \mapsto \tilde{\alpha}(1).$$

Ohne Mühe lässt sich verifizieren, dass wir so eine Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} erhalten. Die verbleibenden Behauptungen sind nun offensichtlich. □

III.4.20. Korollar (Liftungskriterium)**.** *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig, Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.*[19] *Dann sind äquivalent:*

(a) $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.
(b) Es existiert ein (eindeutiger) stetiger Lift $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, $p \circ \tilde{f} = f$.

Beweis. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus $f_* = (p \circ \tilde{f})_* = p_* \circ \tilde{f}_*$. Für die umgekehrte Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) sei $y \in Y$ beliebig. Wegen das Wegzusammenhangs von Y existiert ein Weg $\alpha : I \to Y$ von $\alpha(0) = y_0$ nach $\alpha(1) = y$. Es ist dann $\beta := f \circ \alpha : I \to X$ ein Weg in X der bei $\beta(0) = x_0$ startet. Nach Korollar III.4.14 existiert ein Lift $\tilde{\beta} : I \to \tilde{X}$, $p \circ \tilde{\beta} = \beta$, mit $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$. Wir definieren $\tilde{f}(y) := \tilde{\beta}(1)$. Wegen (a) und Korollar III.4.15 ist dies wohldefiniert, dh. unabhängig von der Wahl des Weges α. Weiters gilt nach Konstruktion $p \circ \tilde{f} = f$. Die Stetigkeit von $\tilde{f}$ folgt aus dem lokalen Wegzusammenhang von Y. Nach Lemma III.4.1 ist $\tilde{f}$ eindeutig. □

III.4.21. Korollar. *Zwei wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende punktierte Überlagerungen eines punktierten Raums sind genau dann isomorph, wenn sie die gleichen charakteristischen Untergruppen haben.*

Beweis. Offensichtlich müssen isomorphe punktierte Überlagerungen gleiche charakteristische Untergruppen haben. Um zu sehen, dass diese Bedingung auch

[19] D.h. jeder Punkt in Y besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen. Beachte, dass Mannigfaltigkeiten stets lokal wegzusammenhängend sind.

hinreichend ist, seien $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ zwei wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende punktierte Überlagerungen mit $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Wenden wir Korollar III.4.20 auf die Abbildung $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ an, so erhalten wir eine stetige Abbildung $\psi_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ mit $p_2 \circ \psi_1 = p_1$. Analog erhalten wir eine stetige Abbildung $\psi_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ mit $p_1 \circ \psi_2 = p_2$. Die Komposition $\psi_2 \circ \psi_1 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ fixiert $\tilde{x}_1$ und erfüllt $p_1 \circ \psi_2 \circ \psi_1 = p_1$, aus Lemma III.4.1 folgt daher $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_1}$. Analog erhalten wir $\psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$. Also sind ψ_1 und ψ_2 zueinander inverse Homöomorphismen. □

III.4.22. Korollar. *Jede Überlagerung eines einfach zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raums ist trivial. Jede zusammenhängende Überlagerung eines einfach zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raums ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei also X einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Nach Korollar III.4.21 ist jede zusammenhängende Überlagerung von X zu der trivialen einblättrigen Überlagerung $\mathrm{id}_X : X \to X$ isomorph. Wenden wir dies auf die Zusammenhangskomponenten einer beliebigen Überlagerung von X an, so sehen wir, dass diese trivial sein muss. □

III.4.23. Korollar. *Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung, dann induziert p Gruppenisomorphismen $\pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X, x_0)$, für jedes $k \geq 2$.*[20]

Beweis. Es seien $\tilde{f}, \tilde{g} : (S^k, *) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ zwei stetige Abbildungen, sodass $p \circ \tilde{f} \simeq p \circ \tilde{g}$ relativ Basispunkt. Es existiert daher eine Homotopie $H : S^k \times I \to X$ von $H_0 = p \circ \tilde{f}$ nach $H_1 = p \circ \tilde{g}$ mit $H(*, t) = \mathrm{const} = x_0$. Nach Satz III.4.13 lässt sich H zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : S^k \times I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ liften. Da $t \mapsto \tilde{H}(*, t)$ Lift des konstanten Weges x_0 ist, folgt $\tilde{H}(*, t) = \mathrm{const} = \tilde{f}(*) = \tilde{x}_0$. Wir schließen $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$, denn beide Seiten sind Lifts von $p \circ \tilde{g}$, die den Basispunkt $* \in S^k$ auf $\tilde{x}_0$ abbilden, vgl. Lemma III.4.1. Somit sind auch $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop relativ Basispunkt. Dies zeigt, dass der induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_k(X, x_0)$ injektiv ist. Nach Korollar III.4.20 ist er auch surjektiv, denn S^k ist einfach zusammenhängend für jedes $k \geq 2$.[21] □

III.4.24. Korollar. *Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Überlagerung, dann sind äquivalent.*

[20] Dabei bezeichnet $\pi_k(X, x_0) := [(S^k, *), (X, x_0)]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $(S^k, *) \to (X, x_0)$ relativ Basispunkt, $* \in S^k$. Für $k \geq 2$ lässt sich $\pi_k(X, x_0)$ in natürlicher Weise zu einer abelschen Gruppe machen, die als k-te Homotopiegruppe von X beim Basispunkt x_0 bezeichnet wird. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert Gruppenhomomorphismen $f_* : \pi_k(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$, und diese Zuordnung ist funktoriell, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_k(X, x_0)}$. Mehr dazu findet sich etwa in [**14**, Section 4.1] oder [**17**].

[21] Dies folgt aus dem Satz von Seifert van Kampen, siehe etwa [**14**, Section 1.2]. Für $k \geq 2$ ist jede Schleife in S^k ist homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in $S^k \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^k$. Mit $\mathbb{R}^k$ ist daher auch S^k einfach zusammenhängend.

(a) Für ein (jedes) $x_0 \in X$ wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ *transitiv auf der Faser F_{x_0}.*
(b) Für ein (jedes) $\tilde x_0 \in \tilde X$ ist $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, p(\tilde x_0))$.

In diesem Fall wird die Überlagerung normal *genannt, p induziert einen Homöomorphismus $\tilde X / \operatorname{Deck}(\tilde X) \cong X$ und wir erhalten einen Gruppenisomorphismus*

$$\operatorname{Deck}(\tilde X) \cong \frac{\pi_1(X, p(\tilde x_0))}{p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))},$$

für jedes $\tilde x_0 \in \tilde X$. Dabei entspricht einer Klasse $[\alpha]$, die von einer Schleife α bei $p(\tilde x_0)$ repräsentiert wird die eindeutige Decktransformation, die $\tilde x_0$ auf $\tilde\alpha(1)$ abbildet, wobei $\tilde\alpha$ den Lift von α zum Anfangswert $\tilde\alpha(0) = \tilde x_0$ bezeichnet.

Beweis. Wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ transitiv auf der Faser F_{x_0}, dann wirkt sie auch transitiv auf jeder anderen Faser F_{y_0}. Seien dazu $\tilde y_1, \tilde y_2 \in F_{y_0}$ und $\sigma : I :\to X$ ein Weg von $\sigma(0) = y_0$ nach $\sigma(1) = x_0$. Bezeichnen $\tilde\sigma_1, \tilde\sigma_2 : I \to \tilde X$ die Lifts von σ zu den Anfangswerten $\tilde\sigma_1(0) = \tilde y_1$ und $\tilde\sigma_2(0) = \tilde y_2$, so erhalten wir zwei Punkte $\tilde x_1 := \tilde\sigma_1(1) \in F_{x_0}$ und $\tilde x_2 := \tilde\sigma_2(1) \in F_{x_0}$ in der Faser über x_0. Nach Voraussetzung existiert eine Decktransformation ϕ mit $\phi(\tilde x_1) = \tilde x_2$. Es folgt $\phi \circ \tilde\sigma_1 = \tilde\sigma_2$, denn beide Seiten sind Lifts des Weges σ zum selben Endpunkt. Insbesondere erhalten wir $\phi(\tilde y_1) = \phi(\tilde\sigma_1(0)) = (\phi \circ \tilde\sigma_1)(0) = \tilde\sigma_2(0) = \tilde y_2$, also wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ auch auf F_{y_0} transitiv.

Für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) sei $a = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ ein Element, das von der Schleife $\alpha : I \to X$ bei x_0 repräsentiert wird. Weiters bezeichne $\tilde\alpha : I \to \tilde X$ einen beliebigen Lift von α, dh. $p \circ \tilde\alpha = \alpha$, und $\tilde x_0 := \alpha(0)$ sowie $\tilde x_1 := \tilde\alpha(1)$ dessen Werte bei den Randpunkten. Aus Lemma III.4.18 erhalten wir $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)) = a^{-1} p_*(\tilde X, \tilde x_0) a$. Nach Voraussetzung existiert eine Decktransformation ϕ mit $\phi(\tilde x_0) = \tilde x_1$, und dies impliziert $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) = (p \circ \phi)_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) = p_*\big(\phi_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))\big) = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1))$. Zusammen erhalten wir $a^{-1} p_*(\tilde X, \tilde x_0) a = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$, also bildet $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ einen Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$.

Für die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) seien nun $\tilde x_0, \tilde x_1 \in F_x$. Nach Lemma III.4.18 existiert $a \in \pi_1(X, x)$ mit $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)) = a^{-1} p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) a$. Nach Voraussetzung ist $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ Normalteiler in $\pi_1(X, x)$, also $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)) = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$. Nach Korollar III.4.21 existiert daher eine Decktransformation, die $\tilde x_0$ auf $\tilde x_1$ abbildet. $\square$

III.4.25. Beispiel. Es sei $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$ eine Gruppe von Homöomorphismen die auf einem einfach zusammenhängenden lokal wegzusammenhängenden Raum X strikt diskontinuierlich wirkt. Dann ist die kanonische Projektion auf den Orbitraum $p : X \to X/G$ eine Überlagerung mit $G = \operatorname{Deck}(X \to X/G) \cong \pi_1(X/G)$, siehe Beispiel III.4.7 und Korollar III.4.24. Damit erhalten wir $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, siehe Beispiel III.4.9, und $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$, siehe Beispiel III.4.8.

III.4.26. Satz. *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semi lokal einfach zusammenhängender*[22] *punktierter Raum. Dann existiert zu jeder Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe G.*

Beweis. Als die der Überlagerung zugrundeliegende Menge $\tilde{X}$ betrachten wir die Menge der Wege $\sigma : I \to X$ die bei $\sigma(0) = x_0$ starten, modulo der Äquivalenzrelation die zwei solche Wege $\sigma_1, \sigma_2 : I \to X$ identifiziert wenn sie gleiche Endpunkte besitzen und die Schleife $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ ein Element in der Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert. Die Evaluation beim Endpunkt liefert eine surjektive Abbildung $p : \tilde{X} \to X$, $[\sigma] \mapsto \sigma(1)$, denn nach Voraussetzung ist X wegzusammenhängend. Der konstante Weg x_0 repräsentiert ein Element $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, das durch p auf x_0 abgebildet wird.

Wir definieren nun eine Topologie auf $\tilde{X}$ indem wir Umgebungsbasen der Punkte angeben. Ist $[\sigma] \in \tilde{X}$, $\sigma : I \to X$, und $U \subseteq X$ offen mit $\sigma(1) \in U$, dann bezeichne $\mathcal{N}(U, [\sigma]) \subseteq \tilde{X}$ die Teilmenge, deren Elemente durch Wege der Form $\sigma\tau$ repräsentierbar sind, wobei τ ein Weg in U ist, der bei $\sigma(1)$ startet. Beachte $\mathcal{N}(U \cap V, [\sigma]) \subseteq \mathcal{N}(U, [\sigma]) \cap \mathcal{N}(V, [\sigma])$. Erklären wir diese Teilmengen $\mathcal{N}(U, \sigma)$ zu einer Umgebungsbasis von $[\sigma] \in \tilde{X}$, so erhalten wir eine Topologie auf $\tilde{X}$ bezüglich der p offensichtlich stetig ist. Mit dieser Topologie wird p tatsächlich zu einer Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe G, weitere Details dazu finden sich etwa in [**5**, Kapitel IX.6] oder [**14**, Chapter 1.3]. $\square$

III.4.27. Korollar (Klassifikation punktierter Überlagerungen)**.** *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Dann kann die Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen von (X, x_0) in natürlicher Weise mit der Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ identifiziert werden. Dabei wird einer punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ ihre charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ zugeordnet.*

Beweis. Dies folgt aus Satz III.4.26 und Korollar III.4.21. $\square$

Für unpunktierte, nicht notwendigerweise zusammenhängende Überlagerungen haben wir folgende Klassifikation, siehe [**14**, Chapter 1.3].

III.4.28. Korollar. *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Ordnen wir einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser F_{x_0} zu, so erhalten wir eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X und der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtswirkungen der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

[22] dh. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass der von der Inklusion $\iota : U \to X$ induzierte Homomorphismus $\iota_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist. Beachte, dass Mannigfaltigkeite stets semi lokal einfach zusammenhängend sind.

III.4.29. Korollar (Universelle Überlagerung). *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit einfach zusammenhängenden $\tilde{X}$. Diese wird als* universelle Überlagerung von (X, x_0) *bezeichnet. Die Gruppe der Decktransformationen wirkt transitiv auf den Fasern, die Projektion induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong X$ und wir haben einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar III.4.27, die universelle Überlagerung entspricht der trivialen Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$. Aus Korollar III.4.17 folgt, dass diese Überlagerung einfach zusammenhängend ist. Die verbleibenden Behauptungen folgen aus Korollar III.4.24. $\square$

III.4.30. Korollar. *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Weiters seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ zwei zusammenhängende Überlagerungen mit $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung punktierter Räume $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \pi = p$, und diese ist eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. Beachte zunächst, dass mit X auch $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi lokal einfach zusammenhängend sind. Die Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Abbildung $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \pi = p$ folgt daher aus Korollar III.4.20. Um zu zeigen, dass π eine Überlagerung bildet, betrachten wir die Untergruppe $G := q_*^{-1}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$ von $\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$. Nach Satz III.4.26 existiert eine zusammenhängende Überlagerung $r : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $r_*(\pi_1(\tilde{Z}, \tilde{z}_0)) = G$. Nach Korollar III.4.20 lässt sich π zu einer stetigen Abbildung $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ liften, $r \circ \phi = \pi$. Ebenso lässt sich $q \circ r$ zu einer stetigen Abbildung $\psi : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, $p \circ \psi = q \circ r$. Nach Konstruktion gilt $p \circ \psi \circ \phi = p$ und $\psi(\phi(\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_0$, woraus wir $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ schließen, siehe Lemma III.4.1. Analog erhalten wir aus $q \circ r \circ \phi \circ \psi = q \circ r$ zunächst $r \circ \phi \circ \psi = r$ und dann $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{Z}}$. Somit sind ϕ und ψ zueinander inverse Homöomorphismen. Da $r : \tilde{Z} \to \tilde{Y}$ Überlagerung ist, muss also auch $\pi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ eine Überlagerungsabbildung sein. $\square$

III.4.31. Korollar. *Ist X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender Raum, dann wird jede zusammenhängende Überlagerung $q : \tilde{Y} \to X$ von der universellen Überlagerung $\tilde{X} \to X$ überlagert, und ist daher von der Form $\tilde{Y} \cong \tilde{X}/\Gamma$, für eine Untergruppe $\pi_1(\tilde{Y}) \cong \Gamma \subseteq \operatorname{Deck}(\tilde{X})$.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar III.4.30 und Korollar III.4.29. $\square$

Unter einer *glatten Überlagerung* verstehen wir eine Überlagerungsabbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten $p : \tilde{M} \to M$, sodass p ein lokaler Diffeomorphismus ist. In diesem Fall existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U, ein diskreter Raum F (0-dimensionale Mannigfaltigkeit) und ein Diffeomorphismus $p^{-1}(U) \cong U \times F$, der p mit der kanonischen Projektion $U \times F \to U$ identifiziert.[23] Eine Abbildung $\tilde{f} : N \to \tilde{M}$ ist genau dann glatt, wenn $p \circ \tilde{f} : N \to M$ glatt ist. Insbesondere ist jede Decktransformation einer glatten Überlagerung ein Diffeomorphismus, dh. $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \mathrm{Diff}(\tilde{M})$.

III.4.32. Beispiel. Ist $\tilde{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $G \subseteq \mathrm{Diff}(\tilde{M})$ eine Gruppe von Diffeomorphismen, die auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkt, dann existiert auf dem Orbitraum $M := \tilde{M}/G$ genau eine glatte Struktur, die die kanonische Projektion $p : \tilde{M} \to M$ zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Dadurch wird p zu einer glatten Überlagerung, vgl. Beispiel III.4.7. Ist $\tilde{M}$ zusammenhängend, dann gilt $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) = G$. Ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend, dann auch $\pi_1(M) \cong G$, vgl. Beispiel III.4.25.

Da Mannigfaltigkeiten lokal kontrahierbar sind, sind sie auch lokal wegzusammenhängend und (semi) lokal einfach zusammenhängend. Die oben entwickelte Überlagerungstheorie lässt sich daher ohne Einschränkungen auf glatte Überlagerungen anwenden. Insbesondere besitzt jede zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit eine bis auf Isomorphie eindeutige universelle Überlagerung.

III.4.33. Proposition. *Ist $p : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung einer glatten Mannigfaltigkeit M, dann besitzt $\tilde{M}$ genau eine glatte Struktur, die p zu einer glatten Überlagerung macht.*

Beweis. Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ offen, sodass $p : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist, dann bildet $\tilde{\varphi} := \varphi \circ p : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von $\tilde{M}$. Ist $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Karte von M, $\tilde{V} \subseteq \tilde{M}$ offen, sodass $p : \tilde{V} \to V$ ein Homöomorphismus ist, und $\tilde{\psi} := \psi \circ p : \tilde{V} \to \mathbb{R}^n$ die entsprechende Karte für $\tilde{M}$, dann gilt für die Kartenwechselabbildung offensichtlich $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$. Die oben konstruierten Karten bilden daher einen glatten Atlas für $\tilde{M}$. Dadurch wird $\tilde{M}$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit und p zu einer glatten Überlagerung. $\square$

Das folgende Resultat zeigt, dass auch die Überlagerungstheorie glatter Mannigfaltigkeiten sehr reichhaltig ist.

III.4.34. Satz. *Ist Γ eine endlich präsentierbare Gruppe*[24] *und $n \geq 4$, dann existiert eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte (Riemannsche) n-Mannigfaltigkeit M mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \Gamma$.*[25]

[23] Glatte Überlagerungen sind daher glatte Faserbündel mit diskreten Fasern.

[24] dh. durch endlich viele Erzeuger und endlich viele Relationen beschreibbar

[25] Für $n \leq 3$ bleibt dies nicht richtig, in diesen Dimensionen gibt es starke Einschränkungen an die Gruppen die als Fundamentalgruppen auftreten können.

Beweis. Es sei M eine n-Mannigfaltigkeit, $0 \leq k < n$ und $S \subseteq M$ eine zu S^k diffeomorphe Teilmannigfaltigkeit mit trivialem Normalenbündel $T^\perp S \cong S \times \mathbb{R}^{n-k}$. Nach Satz III.3.40 existiert daher eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \cong S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, der S mit $S^k \times \{0\}$ identifiziert. Betrachten wir die offene Teilmenge $V := M \setminus S$ von M, dann gilt

$$M = V \cup U,$$

und mittels Polarkoordinaten erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} V \cap U = U \setminus S &\cong S^k \times \big(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}\big) \\ &\cong S^k \times (0,\infty) \times S^{n-k-1} \cong \big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1} \end{aligned} \tag{III.68}$$

Wir versehen

$$M_S := \Big(V \sqcup \big(\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)\Big)\Big/\!\sim$$

mit der Quotiententopology, wobei Punkte in $V \cap U$ via (III.68) mit den entsprechenden Punkten in $\big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1}$ identifiziert werden. Es lässt sich leicht verifizieren, dass der Qutient M_S Hausdorffsch ist.[26] Beachte, dass wir kanonische stetige Abbildungen

$$V \to M_S \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1} \to M_S \tag{III.70}$$

haben, die beide Homöomorphismen auf ihr offenes Bild sind. Da (III.68) ein Diffeomorphismus ist, gibt es auf M_S genau eine glatte Struktur, die die beiden Abbildungen (III.70) zu offenen Einbettungen macht. Dies erlaubt die Mannigfaltigkeit V als offene Teilmenge in M_S aufzufassen. Bezeichnen wir das (offene) Bild der zweiten Abbildung in (III.70) mit $W \subseteq M_S$, dann gilt

$$M_S = V \cup W, \qquad W \cong \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}, \tag{III.71}$$

sowie

$$V \cap W = V \cap U \cong S^k \times (0,\infty) \times S^{n-k-1}. \tag{III.72}$$

Wir sagen die glatte n-Mannigfaltigkeit M_S entsteht aus M durch *Chirurgie längs* S.[27] Durch geschickte Wahl von S werden wir nun Mannigfaltigkeiten mit immer komplizierteren Fundamentalgruppen konstruieren.

[26] Um eine andere hilfreiche Darstellung von M_S zu beschreiben betrachten wir die Mannigfaltigkeit mit Rand $M_\partial := M \setminus \varphi^{-1}(S^k \times B^{n-k})$. Die Trivialisierung φ induziert einen Diffeomorphismus der Ränder,

$$\partial M_\partial \cong S^k \times S^{n-k-1} = \partial\big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big). \tag{III.69}$$

Die Inklusion $M_\partial \sqcup \big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big) \to V \sqcup \big(\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)$ induziert einen kanonischen Homöomorphismus

$$M_S = \Big(M_\partial \sqcup \big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)\Big)\Big/\!\sim,$$

wobei Randpunkte von M_∂ via (III.69) mit den entsprechenden Randpunkten in $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ identifiziert werden.

[27] Obwohl sich dies nicht in unserer Notation M_S widerspiegelt, hängt der Homöomorphietyp von M_S auch von der Wahl der Trivialisierung des Normalenbündels von S ab.

Wir beginnen damit folgende Behauptungen zu verfizieren:

(a) Ist M geschlossen, dann ist auch M_S geschlossen.
(b) Ist M orientierbar, dann ist auch M_S orientierbar, wobei im Fall $k = 0$ möglicherweise die Trivialisierung des Normalenbündels $T^\perp S \cong S \times \mathbb{R}^{n-k}$ geändert werden muss.
(c) Ist $0 \leq k \leq n-2$ und trifft S jede Zusammenhangskomponente[28] von M, dann ist auch M_S zusammenhängend.
(d) Ist $0 = k \leq n-3$ und hat $M = M_1 \sqcup M_2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, die beide von $S^0 \cong S \subseteq M$ getroffen werden, dann ist M_S zusammenhängend und $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$.[29]
(e) Ist M zusammenhängend und $0 = k \leq n-3$, dann gilt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M) * \mathbb{Z}$.

Behauptung (a) folgt leicht aus der alternativen Beschreibung von M_S in einer Fußnote oben, denn als Quotient eines kompakten Raums ist M_S selbst wieder kompakt. Mit Hilfe der offenen Einbettungen (III.70) sehen wir, dass M_S randlos ist, denn $M_S = V \cup W$.

Um (b) einzusehen sei nun M orientiert. Für $k \geq 1$ lässt sich die induzierte Orientierung von $V \cap W$ zu einer Orientierung von W fortsetzen, denn $V \cap W$ sitzt in W wie $\big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1}$ in $\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ und $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ ist in diesem Fall zusammenhängend. Ist $k = 0$, dann können wir durch Modifikation der Trivialisierung des Normalenbündels über einem der beiden Punkte von $S \cong S^0$ erreichen, dass sich die induzierte Orientierung von $V \cap W$ über W fortsetzen lässt.

Um (c) zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass aufgrund der Voraussetzung $k \leq n-2$ die Mannigfaltigkeit $W \cong \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ zusammenhängend ist. Es genügt daher zu zeigen, dass jeder Punkt in $V \subseteq M_S$ mit einem Punkt in $V \cap W$ verbunden werden kann. Dafür wiederum genügt es zu zeigen, dass jeder Punkt in $V = M \setminus S$ durch einen Weg in V mit einem Punkt in $V \cap U = U \setminus S$ verbunden werden kann. Nach Voraussetzung lässt sich jeder Punkt in $x \in M \setminus S$ durch einen Weg $\sigma : I \to M$ mit einem Punkt in S verbinden, dh. $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) \in S$. Setzen wir $t_0 := \min\{t \in I : \sigma(t) \in S\} > 0$, dann bildet die Einschräkung $\sigma|_{[0,t_0]}$ einen Weg in M, sodass $\sigma(t_0) \in S$ und $\sigma(t) \in M \setminus S$ für alle $0 \leq t < t_0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist daher $\sigma|_{[0,t_0-\varepsilon]}$ ein Weg in $M \setminus S$, der $x = \sigma(0)$ mit einem Punkt $\sigma(t_0 - \varepsilon) \in U \setminus S$ verbindet. Damit ist (c) gezeigt.

In der Situation von (d) besteht V aus zwei Zusammenhangskomponenten $V = V_1 \sqcup V_2$, wobei $V_i = V \cap M_i$. Beachte auch $U = U_1 \sqcup U_2$ mit $U_i := U \cap M_i \cong \mathbb{R}^n$. Aus dem Seifert van Kampen Satz folgt, dass die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(V_i) \cong \pi_1(V_i \cup W)$ induziert, denn $W \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ und $V_i \cap W = V_i \cap U \cong$

[28] Für zusammenhängendes M ist diese Bedingung immer erfüllt. Hat M zwei Zusammenhangskomponenten und ist $k = 0$, dann wird diese Bedingung aber auch erfüllt sein, wenn die beiden Punkte von $S \cong S^0$ in unterschiedliche Komponenten abgebildet werden.

[29] In diesem Fall wird M_S die zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 genannt und mit $M_1 \sharp M_2 := M_S$ bezeichnet.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind beide einfach zusammenhängend.[30] Wenden wir den Seifert van Kampen Satz[31] auf die Zerlegung $M_S = (V_1 \cup W) \cup (V_2 \cup W)$ so erhalten wir $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(V_1 \cup W) * \pi_1(V_2 \cup W)$, denn $(V_1 \cup W) \cap (V_2 \cup W) = W \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ ist einfach zusammenhängend. Wenden wir den Seifert van Kampen Satz auf $M_i = V_i \cup U_i$ an, so sehen wir, dass auch die Inklusion $V_i \subseteq M_i$ einen Isomorphismus $\pi_1(V_i) \cong \pi_1(M_i)$ induziert, denn $U_i \cong \mathbb{R}^n$ und $V_i \cap U_i \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind beide einfach zusammehängend. Insgesamt folgt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$, also (d). Wir werden (e) nicht benötigen und überlassen den Beweis dem Leser.

Betrachte nun die geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit $M = S^1 \times S^{n-1}$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, $n \geq 3$. Aus (a) – (d) folgt, dass $M \sharp \cdots \sharp M$ eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M \sharp \cdots \sharp M) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ ist. Wir erhalten somit:

(f) Ist $n \geq 3$, dann lässt sich jede freie Gruppe endlichen Rangs als Fundamentalgruppe einer geschlossenen zusammenhängenden orientierbaren glatten n-Mannigfaltigkeit realisieren.

Um nun auch Relationen in der Fundamentalgruppe zu erzwingen, müssen wir uns mit dem Fall $k = 1$ beschäftigen. Wir zeigen zunächst:

(g) Ist M zusammenhängend und $0 \leq k \leq n - 3$, dann induziert die kanonische Inklusion $V \subseteq M$ einen Isomorphismus $\pi_1(V) \cong \pi_1(M)$.
(h) Ist M zusammenhängend und $1 \leq k \leq n - 3$, dann induziert die kanonische Inklusion $V \subseteq M_S$ einen surjektiven Homomorphismus $\pi_1(V) \to \pi_1(M_S)$, dessen Kern mit dem Normalteiler übereinstimmt, der vom Bild des von der Inklusion $V \cap W \to V$ induzierten Homomorphismus $\pi_1(V \cap W) \to \pi_1(V)$ erzeugt wird. Ist $2 \leq k \leq n - 3$, dann induziert die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(V) \cong \pi_1(M_S)$ und zusammen mit (g) folgt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M)$.

Um (g) zu zeigen sei zunächst $k \geq 1$. Bezüglich jedes Basispunkts in $V \cap U$ haben wir folgendes kommutatives Diagramm, in dem alle unbeschrifteten Pfeile

---

[30] Die Inklusion $V_i \subseteq V_i \cup W$ ist sogar eine Homotopieäquivalenz.

[31] Der Seifert van Kampen Satz, siehe etwa [**14**, Section 1.2], besagt folgendes: Ist $X = O_1 \cup O_2$ ein topologischer Raum, $O_1, O_2 \subseteq X$ offen, sodass O_1, O_2 und $O_1 \cap O_2$ alle wegzusammenhängend sind, dann bilden die von den kanonischen Inklusionen induzierten Homomorphismen ein pushout Diagramm,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(O_1 \cap O_2) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & \pi_1(O_1) \arrow[d, "j_1"] \\ \pi_1(O_2) \arrow[r, "j_2"] & \pi_1(X), \end{tikzcd}$$

dh. ist G eine beliebige Gruppe und sind $\varphi_1 : \pi_1(O_1) \to G$ und $\varphi_2 : \pi_1(O_2) \to G$ zwei Homomorphismen mit $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$, dann existiert genau ein Homomorphismus $\psi : \pi_1(X) \to G$ mit $\psi \circ j_1 = \varphi_1$ und $\psi \circ j_2 = \varphi_2$. Es gilt daher $\pi_1(X) \cong \big(\pi_1(O_1) * \pi_1(O_2)\big)/N$, wobei N den von Elementen der Form $\iota_1(a)\iota_2(a)^{-1}$, $a \in \pi_1(O_1 \cap O_2)$, erzeugten Normalteiler in $\pi_1(O_1) * \pi_1(O_2)$ bezeichnet.

von Inklusionen induziert werden:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\big(S^k\times(\mathbb{R}^{n-k}\setminus 0)\big) \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(V\cap U) \arrow[l, "\varphi_*"', "\cong"] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(V) \arrow[d] & \\
\pi_1\big(S^k\times\mathbb{R}^{n-k}\big) & \pi_1(U) \arrow[l, "\varphi_*"', "\cong"] \arrow[r] & \pi_1(M) \arrow[r, equal] & \pi_1(V) \underset{\pi_1(V\cap U)}{*} \pi_1(U)
\end{tikzcd}$$

Beachte, dass U, V und $V\cap U$ alle zusammenhängend sind, denn $k\geq 1$. Aus dem Seifert van Kampen Satz folgt daher, dass auch der rechte vertikale Pfeil ein Isomorphismus ist.[32] Im Fall $k=0$ genügt es zu beobachten, dass für jede zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M, $n\geq 3$, die Inklusion $M\setminus\{x\}\subseteq M$ einen Isomorphismus induziert. Wieder folgt dies aus dem Seifert van Kampen Satz, indem wir eine offene Umgebung $U\cong\mathbb{R}^n$ von x wählen, $M=(M\setminus\{x\})\cup U$, denn $U\cap(M\setminus\{x\})=U\setminus\{x\}\cong\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist einfach zusammenhängend.

Behauptung (h) folgt sofort aus dem Seifert van Kampen Satz, denn $W\cong\mathbb{R}^{k+1}\times S^{n-k-1}$ ist einfach zusammenhängend und $V\cap W\cong\big(\mathbb{R}^{k+1}\setminus\{0\}\big)\times S^{n-k-1}$ zusammenhängend bzw. einfach zusammenhägend wenn $k\geq 2$.

Sei nun M eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit und $a\in\pi_1(M,x_0)$. Ist $n\geq 3$, dann existiert eine Einbettung $S^1\cong S\subseteq M$, sodass der induzierte Homomorphismus $\pi_1(S,*)\to\pi_1(M,x_0)$ einen Erzeuger von $\pi_1(S,*)\cong\pi_1(S^1,*)\cong\mathbb{Z}$ auf a abbildet.[33] Da M und S beide orientierbar sind, ist auch das Normalenbündel $T^\perp S\cong TM|_S/TS$ orientierbar, vgl. Aufgabe 36. Somit ist das Normalenbündel von S trivialisierbar, denn jedes orientierbare Vektorbündel über S^1 ist trivialisierbar, vgl. Aufgabe 60. Wir können daher obige Konstruktion mit $k=1$ anwenden und erhalten eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit M_S, siehe (a), (b) und (c). Beachte, dass die Inklusion $S\subseteq U\cong S^1\times\mathbb{R}^{n-1}$ homotop zu einer Abbildung $\iota: S\to V\cap U\cong S^1\times(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\})$ ist und diese einen Isomorphismus $\pi_1(S,*)\cong\pi_1(V\cap U,x_1)$ induziert, $x_1:=\iota(*)\in V\cap U$. Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S,*) \arrow[r, "\iota_*", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1(V\cap U,x_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_1(V\cap W,x_1) \arrow[d] \\
\pi_1(M,x_0) \arrow[r, "\cong"] & \pi_1(M,x_1) & \pi_1(V,x_1) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

wobei der linke untere horizontale Pfeil durch Konjugation mit jenem Weg gegeben ist, den wir aus der Homotopie zwischen der kanonischen Inklusion $S\to M$

[32] Dies lässt sich auch mit einem Transversalitätsargument anschaulich erklären.

[33] Jedes stetige $\alpha:(S^1,*)\to(M,x_0)$ kann in endlich viele Abschnitte zerlegt werden, die jeweils Bild in einer zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorphen offenen Teilmenge von M haben. Damit lässt sich nun leicht eine zu α homotope glatte Abbildung $(S^1,*)\to(M,x_0)$ konstruieren. Da $n\geq 3$ kann diese auch injektiv und immersiv gewählt werden. Nach Satz I.7.8 ist dies die gesuchte Einbettung.

und $\iota : S \to V \cap U \subseteq M$ durch Auswerten bei $*$ erhalten. Aus (g) und (h) erhalten wir somit:

(i) Ist M eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit, $n \geq 4$, und $a \in \pi_1(M)$, dann existiert eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit M' mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M') \cong \pi_1(M)/N$, wobei N den von a in $\pi_1(M)$ erzeugten Normalteiler bezeichnet.

Der Satz folgt nun sofort aus (f) und (i). □

III.4.35. Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung von Satz III.4.34, kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten haben stets endlich präsentierbare Fundamentalgruppen.

Unter einer *Riemannschen Überlagerung* verstehen wir eine glatte Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, sodass $p^*g = \tilde{g}$, wobei g und $\tilde{g}$ die Riemannmetriken auf M und $\tilde{M}$ bezeichnen. In diesem Fall ist jede Decktransformation eine Isometrie, dh. $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$.

III.4.36. Beispiel. Ist $\tilde{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$ eine Gruppe von Isometrien, die auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkt, dann existiert auf dem Orbitraum $M := \tilde{M}/\Gamma$ genau eine Riemannsche Metrik, die die kanonische Projektion $p : \tilde{M} \to M$ zu einer Riemannschen Überlagerung macht. Ist $\tilde{M}$ zusammenhängend, dann gilt $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) = \Gamma$. Ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend, dann auch $\pi_1(M) \cong \Gamma$, siehe Beispiel III.4.32.

III.4.37. Beispiel. Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, dann existiert auf $\tilde{M}$ genau eine glatte Struktur, die p zu einer glatten Überlagerung macht, siehe Proposition III.4.33. Versehen wir $\tilde{M}$ mit der Riemannmetrik $\tilde{g} := p^*g$, so wird p zu einer Riemannschen Überlagerung. Insbesondere kann die universelle Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ in eindeutiger Weise zu einer Riemannschen Überlagerung gemacht werden. Somit sehen wir, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit von der Form $M \cong \tilde{M}/\Gamma$ ist, wobei $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend ist und $\pi_1(M) \cong \Gamma \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$ eine auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkende Untergruppe bezeichnet, vgl. und Beispiel III.4.36.

III.4.38. Proposition. *Es sei $p : \tilde{M} \to M$ eine Riemansche Überlagerung. Dann ist M vollständig, genau dann wenn $\tilde{M}$ vollständig ist.*

Beweis. Eine Kurve γ in $\tilde{M}$ ist genau dann Geodäte, wenn die Kurve $p \circ \gamma$ Geodäte in M ist, denn Geodäte zu sein ist eine lokale Eigenschaft. Die Proposition folgt daher aus Korollar III.4.14 und Satz III.3.27. □

III.4.39. Proposition. *Jede lokale Riemannsche Isometrie*[34] *zwischen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist eine Riemannsche Überlagerung.*

[34]Eine glatte Abbildung $f : (M, g) \to (N, h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird lokale Riemannsche Isometrie genannt, falls $T_x f$ eine (invertierbare) lineare Isometrie ist,

Beweis. Nach dem inversen Funktionensatz ist p ein lokaler Diffeomorphismus. Da Geodäte zu sein eine lokale Eigenschaft ist, erhalten wir für je zwei Punkte $\tilde{x} \in \tilde{M}$ und $x \in M$ mit $p(\tilde{x}) = x$, ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} T_{\tilde{x}}\tilde{M} \arrow[r, "\exp_{\tilde{x}}"] \arrow[d, "T_{\tilde{x}}p"', "\cong"] & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ T_xM \arrow[r, "\exp_x"] & M \end{tikzcd}$$

Nach Satz III.3.27 ist der untere horizontale Pfeil surjektiv, also muss auch p surjektiv sein. Beachte, dass die Exponentialabbildungen wegen der Vollständigkeitsvoraussetzung global definiert sind.

Wir fixieren nun $x \in M$ und wählen $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_x : B_\varepsilon(0) \xrightarrow{\cong} U \subseteq M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, siehe Korollar III.3.16(d). Für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ setzen wir $U_{\tilde{x}} := \exp_{\tilde{x}}(B_\varepsilon(0))$. Aus der Kommutativität des Diagramms, und weil p ein lokaler Diffeomorphismus ist, schließen wir, dass $U_{\tilde{x}}$ offen in $\tilde{M}$ ist und $p : U_{\tilde{x}} \to U$ ein Diffeomorphismus sein muss.

Wir wollen nun verifizieren, dass die Umgebungen $U_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, paarweise disjunkt sind. Seien dazu $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ mit $U_{\tilde{x}_1} \cap U_{\tilde{x}_2} \neq \emptyset$. Es existieren daher $\tilde{\xi}_i \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_{\tilde{x}_i}\tilde{M}$, $i = 1, 2$, mit $\exp_{\tilde{x}_1}(\tilde{\xi}_1) = \exp_{\tilde{x}_2}(\tilde{\xi}_2)$. Aus der Kommutativität des Diagramms oben, und weil $\exp_x : B_\varepsilon(0) \to U$ injektiv ist, folgt $T_{\tilde{x}_1}p \cdot \tilde{\xi}_1 = T_{\tilde{x}_2}p \cdot \tilde{\xi}_2$, und somit $p\big(\exp_{\tilde{x}_1}(t\tilde{\xi}_1)\big) = p\big(\exp_{\tilde{x}_2}(t\tilde{\xi}_2)\big)$, für alle $t \in [0, 1]$. Da p lokaler Diffeomorphismus ist folgt, dass die Menge $\{t \in [0, 1] : \exp_{\tilde{x}_1}(t\tilde{\xi}_1) = \exp_{\tilde{x}_2}(t\tilde{\xi}_2)\}$ offen und abgeschlossen in $[0, 1]$ ist. Da sie 1 enthält, muss sie also auch 0 enthalten, dh. $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. Dies zeigt, dass die Mengen $U_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, paarweise disjunkt sind.

Schließlich zeigen wir noch $p^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$. Die Inklusion $\supseteq$ ist trivial, für die umgekehrte Inklusion sei nun $\tilde{y} \in p^{-1}(U)$. Es existiert daher $\xi \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_xM$ mit $\exp_x(\xi) = p(\tilde{y})$. Es bezeichne $\tilde{c}$ die Geodäte in $\tilde{M}$ mit $\tilde{c}(1) = \tilde{y}$ und $T_{\tilde{y}}p \cdot \tilde{c}'(1) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=1} \exp_x(t\xi)$. Beachte, dass $\tilde{c}$ aufgrund der Vollständigkeit von $\tilde{M}$ für alle Zeiten definiert ist. Weiters gilt $(p \circ \tilde{c})(t) = \exp_x(t\xi)$ für alle t, denn beide Seiten Stellen Geodäten in M dar und haben bei $t = 1$ gleiche Werte und Ableitungen. Wir schließen daraus $\tilde{x} := \tilde{c}(0) \in p^{-1}(x)$, und $\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{x}}(t\tilde{\xi})$ für alle t, wobei $\tilde{\xi} := \tilde{c}'(0) = (T_{\tilde{x}}p)^{-1}\xi \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_{\tilde{x}}\tilde{M}$. Wir erhalten $\tilde{y} = \tilde{c}(1) \in U_{\tilde{x}}$. Damit sind alle Voraussetzungen in Lemma III.4.2 erfüllt und p daher eine Überlagerung. □

III.4.40. Korollar. *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit und $x \in M$ so, dass das Differential der Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ bei jedem Punkt $\xi \in T_xM$ invertierbar ist. Dann ist $\exp_x : T_xM \to M$ eine*

für jedes $x \in M$. Nach dem inversen Funktionensatz ist jedes solche f ein lokaler Diffeomorphismus, und es gilt $f^*h = g$.

(die universelle) Überlagerungsabbildung. Insbesondere ist die universelle Überlagerung von M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, es existiert genau eine Geodäte in jeder Homotopieklasse von Wegen relativ Endpukten und $\pi_k(M) = 0$, für alle $k \geq 2$. Ist darüber hinaus M einfach zusammenhängend, dann ist die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus, $M \cong \mathbb{R}^n$ und je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch genau eine Geodäte verbinden.

Beweis. Es bezeichne g die Riemannmetrik auf M. Nach Voraussetzung ist dann $\bar{g} := \exp_x^* g$ eine Riemannmetrik auf T_xM und $\exp_x : (T_xM, \bar{g}) \to (M, g)$ eine lokale Riemannsche Isometrie. Nach Satz III.3.27 ist T_xM mit dieser Riemannschen Metrik vollständig, denn die Geodäten durch $0 \in T_xM$ sind affin parametrisierte Geraden und daher für alle Zeiten definiert. Nach Proposition III.4.39 ist $\exp_x : T_xM \to M$ daher eine Überlagerung. Da jeder Punkt in T_xM durch eine eindeutige Geodäte mit $0 \in T_xM$ verbunden werden kann, sehen wir, dass in jeder Homotopieklasse relativ Endpunkten von Wegen in M genau eine Geodäte existiert.[35] Die verbleibenden Behauptungen folgen nun aus Korollar III.4.23 und Korollar III.4.22. □

III.4.41. Korollar. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und α eine Homotopieklasse von Wegen relativ Endpunkten in M. Dann existiert eine, i.A. nicht eindeutige, minimale Geodäte γ in α, dh.* $\operatorname{length}(\gamma) \leq \operatorname{length}(c)$, *für jede stückweise glatte Kurve c in α.*

Beweis. Es bezeichne $p : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung von M, $x \in M$ den Anfangspunkt und y den Endpunkt von α. Weiters sei $\tilde{x} \in F_x$ beliebig, und $\tilde{y} \in F_y$ jener Punkt den wir durch Liften von α als Endpunkt erhalten, vgl. Korollar III.4.15. Durch Komposition mit p erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der Wege von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$, und α, siehe Proposition III.4.16. Eine Weg $\tilde{c}$ in $\tilde{M}$ ist genau dann stückweise glatt, wenn $p \circ \tilde{c}$ stückweise glatt ist und in diesem Fall gilt $\operatorname{length}(p \circ \tilde{c}) = \operatorname{length}(\tilde{c})$. Auch ist $\tilde{c}$ genau dann Geodäte in $\tilde{M}$, wenn $p \circ \tilde{c}$ Geodäte in M ist. Das Korollar folgt daher aus Satz III.3.27 angewandt auf $\tilde{M}$. □

III.4.42. Korollar. *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha \in [S^1, M]$ eine (freie) Homotopieklasse. Dann existiert eine, i.A. nicht eindeutige, minimale geschlossene Geodäte $\gamma : S^1 \to M$ in α, dh.* $\operatorname{length}(\gamma) \leq \operatorname{length}(c)$ *für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $c : S^1 \to M$ in α.*

Beweis. Es sei $c_n : S^1 \to M$ eine minimierende Folge stückweise glatter geschlossener Kurven in α, dh. für jede stückweise glatte Kurve $c : S^1 \to M$ in α existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{length}(c_n) \leq \operatorname{length}(c)$, für alle $n \geq n_0$. Wegen der Kompaktheit von M, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge, auch erreichen, dass der Grenzwert $x_0 := \lim_{n\to\infty} c_n(*)$ in M existiert, wobei $* \in S^1$

[35] Beachte an dieser Stelle, dass $\exp_y : T_yM \to M$ für jeden Punkt $y \in M$ die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Dies folgt sofort aus Korollar III.5.23 unten.

einen Basispunkt bezeichnet. Durch kleine Modifikation von c_n dürfen wir also o.B.d.A. auch $c_n(*) = x_0$ annehmen, für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnen $\bar{c}_n : [0,1] \to M$ die geschlossenen Kurven $\bar{c}_n(t) := c_n(e^{2\pi \mathbf{i} t})$, $\bar{c}_n(0) = x_0 = \bar{c}_n(1)$, dann können wir nach Korollar III.4.41 o.B.d.A. annehmen, dass jedes $\bar{c}_n$ Geodäte ist. Da die Folge c_n minimierend ist, existiert insbesondere eine Konstante $C \geq 0$, sodass $|\bar{c}_n'(0)| = \operatorname{length}(\bar{c}_n) = \operatorname{length}(c_n) \leq C$. Durch Übergang zu einer Teilfolge, können wir also auch erreichen, dass der Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} \bar{c}_n'(0) \in T_{x_0}M$ existiert. Es bezeichne $\bar{c} : [0,1] \to M$, $\bar{c}(t) := \exp_{x_0}(t\xi)$. Aus der Stetigkeit der Exponentialabbildung folgt, dass die Kurven $\bar{c}_n$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Geodäte $\bar{c}$ konvergieren. Insbesondere erhalten wir $\bar{c}(0) = x_0 = \bar{c}(1)$, es existiert daher eine stetige Kurve $c : S^1 \to M$, sodass $\bar{c}(t) = c(e^{2\pi \mathbf{i} t})$. Nach Korollar III.3.34 liegt auch c in der Homotopieklasse α. Da $\lim_{n\to\infty} \operatorname{length}(c_n) = \lim_{n\to\infty} |\bar{c}_n'(0)| = |\bar{c}'(0)| = \operatorname{length}(c)$, ist c eine Kurve minimaler Länge in α. Nach Korollar III.3.24 ist c auch bei $1 \in S^1$ glatt und daher eine geschlossene Geodäte. □

III.5. Variationsformeln, Indexform und Jacobifelder. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der zweiten Ableitung des Energiefunktionals beschäftigen. Als erste Anwendungen werden wir Resultate von Synge, siehe Satz III.5.5, Myers, siehe Satz III.5.11, und Mangoldt–Hadamard–Cartan, siehe Satz III.5.24, besprechen. Wir folgen in weiten Teilen der Darstellung in [**7**, Chapter 4], siehe aber auch [**19**].

Es sei $c : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt. Für $|s| < \varepsilon$ betrachte die Kurve $c_s : [a,b] \to M$, $c_s(t) := c(t,s)$ und setze

$$L(s) := \operatorname{length}(c_s) = \int_a^b \left|\tfrac{\partial c_s}{\partial t}\right| dt$$

sowie

$$E(s) := E(c_s) = \frac{1}{2}\int_a^b \left|\tfrac{\partial c_s}{\partial t}\right|^2 dt.$$

III.5.1. Lemma (Variationsformeln erster Ordnung)**.** *In dieser Situation gilt:*

$$E'(s) = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt$$

$$L'(s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt = \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt$$

Ist c_0 nach Bogenlänge parametrisiert, dh. $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \mathrm{const} = \tau$, dann gilt weiters

$$L'(0) = \frac{1}{\tau}\left\{ \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \right\}\Bigg|_{s=0}$$

Beweis. Da die Levi–Civita Konnexion torsionsfrei ist, haben wir $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}$, denn die Koordinatenvektorfelder ∂_t und ∂_s kommutieren. Die Formel für

$E'(s)$ haben wir bereits im Beweis von Lemma III.3.10 hergeleitet:

$$\begin{aligned}E'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}\int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\\ &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt.\end{aligned}$$

Bei der Ableitung der Länge gehen wir analog vor:

$$\begin{aligned}L'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{1/2} dt = \int_a^b \frac{2\langle \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{2\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^{1/2}} dt\\ &= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt = \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.\end{aligned}$$

Im Fall $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \mathrm{const} = \tau$ verwenden wir den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung um die Formel für $L'(0)$ herzuleiten. □

III.5.2. Lemma (Variationsformeln zweiter Ordnung)**.** *In dieser Situation gilt*

$$\begin{aligned}E''(s) &= \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt\\ &= \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt,\end{aligned}$$

und

$$L''(s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}\big|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.$$

Ist c_0 eine Geodäte, dh. $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c_0}{\partial t} = 0$, und daher $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \mathrm{const} = \tau$, dann gilt weiters

$$E''(0) = \left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt - \int_a^b \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}$$

und

$$L''(0) = \frac{1}{\tau}\left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}c^\perp\big|^2 dt - \int_a^b \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, c^\perp)c^\perp, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}$$

wobei $c^\perp := \frac{\partial c}{\partial s} - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$, die Orthogonalprojektion von $\frac{\partial c}{\partial s}$ längs $\frac{\partial c}{\partial t}$.

Beweis. Aus Lemma III.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
E''(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\
&= \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt \\
&= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt \\
&= \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt,
\end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}$ und $R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}$. Die Formel für $E''(0)$ folgt sofort. Bei der Länge gehen wir analog vor, aus Lemma III.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
L''(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-1/2} dt \\
&= \int_a^b \Big(\big\langle \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big)\big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-1/2} \\
&\qquad - \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-3/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + |\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} - \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|^3} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + |\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}|^2 - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^2 |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}\big|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir

$$|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}|^2 - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle^2 |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2} = \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^2$$

verwendet, was aus der orthogonalen Zerlegung

$$\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} = \Big(\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}\Big) + \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}$$

und dem Satz von Pythagoras folgt. Ist c_0 Geodäte, dann folgt, bei $s = 0$,

$$\nabla_{\partial t} c^{\perp} = \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t},$$

und somit:

$$
\begin{aligned}
L''(0) &= \frac{1}{\tau}\left\{\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 dt\right\}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\tau}\left\{\int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 dt\right\}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\tau}\left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\bigg|_{s=0}
\end{aligned}
$$

Schließlich gilt $\langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle = \big\langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, c^\perp)c^\perp, \frac{\partial c}{\partial t}\big\rangle$, denn $\langle R(X,Y)Z,W\rangle$ ist schiefsymmetrisch in (X,Y) und schiefsymmetrisch in (Z,W). □

Als erste Anwendung der Variationsformeln zeigen wir, dass im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung (auch lange) Geodäten lokal minimierend sind.

III.5.3. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$ und $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft. Jede Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ von $\gamma(a) = c(a)$ nach $\gamma(b) = c(b)$, die hinreichend nahe bei c liegt, dh. $d(\gamma(t), c(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$, erfüllt $E(\gamma) \geq E(c)$ und* $\operatorname{length}(\gamma) \geq \operatorname{length}(c)$.

Beweis. Es bezeichne $U \subseteq M \times M$ eine offene Umgebung der Digonale wie in Korollar III.3.23. Da das Bild von c kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$$\big\{(x,y) \in M \times M \;\big|\; d(x,y) < \varepsilon,\ x \in c([a,b])\big\} \subseteq U.$$

Ist nun $\gamma : [a,b] \to M$ und $d(c(t), \gamma(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt nach Konstruktion $(c(t), \gamma(t)) \in U$, für alle $t \in [a,b]$. Nach Korollar III.3.23 ist daher

$$\tilde c : [a,b] \times [0,1] \to M, \qquad \tilde c(t,s) := \exp_{c(t)}\big(s \exp_{c(t)}^{-1}(\gamma(t)\big),$$

wohldefiniert und glatt. Beachte weiters $\tilde c_0 = c$, $\tilde c_1 = \gamma$ sowie $\nabla_{\partial_s}\frac{\partial \tilde c}{\partial s} = 0$. Gilt darüberhinaus $c(a) = \gamma(a)$ und $c(b) = \gamma(b)$, dann haben wir auch $\tilde c(a,s) = c(a)$ und $\tilde c(b,s) = c(b)$, für alle $s \in [0,1]$. Setzen wir $E(s) := E(\tilde c_s)$, dann gilt $E'(0) = 0$, denn $\tilde c_0 = c$ ist eine Geodäte, vgl. Lemma III.5.1. Aus Lemma III.5.2 folgt

$$E''(s) = \int_a^b \underbrace{\big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle}_{=0} - \underbrace{\big\langle R(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s})\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big|^2}_{\geq 0} dt \geq 0, \quad s \in [0,1],$$

denn nach Voraussetzung gilt $K \leq 0$. Wir erhalten somit $E(1) \geq E(0)$, also $E(\gamma) \geq E(c)$.

Analog lässt sich die Länge behandeln. Setzen wir $L(s) := \operatorname{length}(\tilde{c}_s)$, dann gilt $L'(0) = 0$, vgl. Lemma III.5.1. Aus Lemma III.5.2 und $K \leq 0$ erhalten wir

$$L''(s) = \int_a^b \underbrace{\frac{\langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \rangle}{|\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\langle R(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s})\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \rangle}{|\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}|}}_{\leq 0}$$

$$+ \underbrace{\frac{\left| \nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \rangle |\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}|^{-2} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \right|^2}{|\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}|}}_{\geq 0} dt,$$

also $L''(s) \geq 0$, für alle $s \in [0,1]$. Wieder erhalten wir $L(1) \geq L(0)$, also $\operatorname{length}(\gamma) \geq \operatorname{length}(c)$. □

III.5.4. Bemerkung. Ohne der Voraussetzung $K \leq 0$ bleibt Satz III.5.3 nicht richtig, betrachte etwa die runde Sphäre $M = S^2$.

Als weitere Anwendung beweisen wir folgenden Satz von Synge, siehe etwa [**19**, Chapter 6.5] oder [**7**, Theorem 4.1.2].

III.5.5. Satz (Synge)**.** *Es sei M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung $K > 0$. Dann gilt:*

(a) Ist M gerade dimensional und orientierbar, dann ist M einfach zusammenhängend.
(b) Ist M ungerade dimensional, dann ist M orientierbar.

Beweis. Um (a) zu zeigen, gehen wir indirekt vor und nehmen an M wäre nicht einfach zusammenhängend. Nach Proposition III.4.16 existiert daher eine nicht triviale Homotopieklasse in $[S^1, M]$, und diese lässt sich durch eine minimale geschlossene Geodäte $c : S^1 \to M$ repräsentieren, siehe Korollar III.4.42. Fixiere $t_0 \in S^1$ und bezeichne den Paralleltransport längs c mit $P : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_0)}M$. Dies ist eine orthogonale Abbildung die den von $c'(t_0)$ aufgespannten Teilraum festhält. Bezeichnet $V \subseteq T_{c(t_0)}M$ das orthogonale Komplement von $c'(t_0)$, so schränkt sich P zu einer orthogonalen Abbildung $P : V \to V$ ein. Da M gerade dimensional vorausgesetzt wurde, und weil $c'(t_0) \neq 0$, hat V ungerade Dimension. Da M orientierbar ist gilt weiters $\det(P : V \to V) = \det(P : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_0}M) = 1$. Daraus schließen wir, dass ein Fixpunkt $0 \neq v \in V$ existiert, $Pv = v$. Es existiert daher ein nicht triviales paralleles Vektorfeld $0 \neq X \in \Gamma(c^*TM)$ längs c, $\nabla_{\partial_t} X = 0$, das orthogonal auf c steht, dh. $\langle X(t), c'(t) \rangle = 0$, für alle $t \in S^1$. Wir betrachten nun die Variation $\tilde{c} : S^1 \times \mathbb{R} \to M$, $\tilde{c}(t,s) := \exp_{c(t)}(sX(t))$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{c}(t,0) = c(t)$ und $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t,0) = X(t)$, für alle $t \in S^1$. Setzen wir $L(s) := \operatorname{length}(\tilde{c}_s) = \int_{S^1} |\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}| dt$ so gilt $L'(0) = 0$, siehe Lemma III.5.1, und nach Lemma III.5.2 auch

$$L''(0) = \frac{1}{\tau} \int_{S^1} \big| \underbrace{\nabla_{\partial_t} X}_{=0} \big|^2 - \underbrace{\big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)X, \tfrac{\partial c}{\partial t} \big\rangle}_{>0} dt < 0,$$

und somit $\operatorname{length}(\tilde{c}_s) < \operatorname{length}(c)$, für s nahe 0. Da dies der Minimalität von c widerspricht, muss M also einfach zusammenhängend sein.

Um (b) einzusehen gehen, nehmen wir indirekt an M, wäre nicht orientierbar. In diesem Fall existiert eine glatte Kruve $c : S^1 \to M$, sodass der Paralleltransport $P : T_{c(t_0)}M \to T_{c(T_0)}M$ orientierungsumkehrend ist. Nach Korollar III.4.42 dürfen wir c als minimale geschlossene Geodäte annehmen. In diesem Fall ist das orthogonale Komplement von $c'(t_0)$ in $T_{c(t_0)}M$ gerade dimensional und $P : V \to V$ orientierungsumkehrend, und besitzt daher einen Fixpunkt $0 \neq v \in V$, $P(v) = v$. Wie oben erhalten wir daraus ein paralleles Vektorfeld $0 \neq X \in \Gamma(c^*TM)$, $\nabla_{\partial_t} c = 0$, das orthogonal of c steht, dh. $\langle X(t), c'(t)\rangle = 0$, für alle $t \in S^1$. Genau wie im Beweis von (a) erhalten wir zusammen mit $K > 0$ daraus einen Widerspruch. Also muss M orientierbar sein. $\square$

III.5.6. Bemerkung (Hopf Vermutung)**.** Nach Satz III.5.5(a) kann es auf $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung geben, denn diese Mannigfaltigkeit ist gerade dimensional und orientierbar, aber nicht einfach zusammenhängend. Eine Vermutung von Heinz Hopf besagt, dass auch $S^2 \times S^2$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung besitzt. Beachte, dass die Produktmetrik auf $S^2 \times S^2$ nur $K \geq 0$ erfüllt, obwohl $\operatorname{Ric} > 0$.

III.5.7. Definition (Indexform)**.** Sind X und Y zwei Vektorfelder längs einer Geodäte $c : [a, b] \to M$, so setzen wir

$$I_c(X, Y) := \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t} X, \nabla_{\partial_t} Y \big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt$$

Dies definiert eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum der Vektorfelder längs c, dh. dem Vektorraum der Schnitte $\Gamma(c^*TM)$. Diese symmetrische Bilinearform wird *Indexform* von c genannt.

III.5.8. Lemma. *Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte und $\tilde{c} : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\tilde{c}_0 = c$, $\tilde{c}_s(a) = c(a)$ und $\tilde{c}_s(b) = c(b)$, für alle $|s| < \varepsilon$. Bezeichnet $X(t) := \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t, 0)$, dann gilt $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0 = \frac{\partial}{\partial s}|_0 L(\tilde{c}_s)$ und*

$$\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 E(\tilde{c}_s) = I_c(X, X) \quad \textit{sowie} \quad \tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 L(\tilde{c}_s) = \tfrac{1}{\tau} I_c(X^\perp, X^\perp),$$

wobei $\tau = |\frac{\partial c}{\partial t}| = \mathrm{const}$ und $X^\perp := X - \langle X, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2} \frac{\partial c}{\partial t}$.

Beweis. Aus Lemma III.5.1 folgt $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0 = \frac{\partial}{\partial s}|_0 L(\tilde{c}_s)$. Nach Lemma III.5.2 gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 E(\tilde{c}_s) &= \bigg\{ \big\langle \nabla_{\partial_s} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s})\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}\big\rangle dt \bigg\}\bigg|_{s=0} \\ &= \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = I_c(X, X),\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}\big|_0 L(\tilde c_s) &= \frac{1}{\tau}\left\{\Big\langle\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial\tilde c}{\partial s},\tfrac{\partial\tilde c}{\partial t}\Big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b}+\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}c^\perp\big|^2-\Big\langle R(\tfrac{\partial\tilde c}{\partial t},c^\perp)c^\perp,\tfrac{\partial c}{\partial t}\Big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}\\ &=\frac{1}{\tau}\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}X^\perp\big|^2-\Big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t},X^\perp)X^\perp,\tfrac{\partial c}{\partial t}\Big\rangle dt=\tfrac{1}{\tau}I_c(X^\perp,X^\perp),\end{aligned}$$

wobei $c^\perp := \frac{\partial\tilde c}{\partial s}-\langle\frac{\partial\tilde c}{\partial s},\frac{\partial\tilde c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial\tilde c}{\partial t}$. □

III.5.9. Bemerkung. Ist X ein Vektorfelder längs einer nicht konstanten Geodäte $c:[a,b]\to M$, und bezeichnen $X=X^\parallel+X^\perp$ die orthogonale Zerlegung mit $X^\parallel:=\langle X,\frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$ und $X^\perp:=X-X^\parallel$, dann gilt

$$I_c(X^\parallel,X^\parallel)=\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}X^\parallel\big|^2dt\geq 0,$$

und

$$I_c(X,X)=I_c(X^\perp,X^\perp)+I_c(X^\parallel,X^\parallel)\geq I_c(X^\perp,X^\perp),$$

denn $R(\frac{\partial c}{\partial t},X^\parallel)=0$ und $\nabla_{\partial_t}X^\parallel=\langle\nabla_{\partial_t}X,\frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$, also $I_c(X^\parallel,X^\perp)=0$.

III.5.10. Lemma. *Es sei $c:[a,b]\to M$ eine Geodäte und X ein Vektorfeld längs c, sodass $X(a)=0=X(b)$ und $I_c(X,X)<0$. Dann existiert eine Variation $\tilde c:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, sodass $\tilde c_0=c$, $\tilde c(a,s)=c(a)$, $\tilde c(b,s)=c(b)$, $E(\tilde c_s)<E(c)$ und $L(\tilde c_s)<L(c)$, für alle $0<|s|<\varepsilon$.*

Beweis. Die Variation $\tilde c(t,s):=\exp_{c(t)}(sX(t))$ erfüllt offensichtlich $\tilde c_0=c$, $\tilde c(a,s)=c(a)$, $\tilde c(b,s)=c(b)$ und $\frac{\partial\tilde c}{\partial s}(t,0)=X(t)$. Aus Lemma III.5.8 folgt $\frac{\partial}{\partial s}|_0E(\tilde c_s)=0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2}|_0E(\tilde c_s)=I_c(X,X)<0$, also $E(\tilde c_s)<E(\tilde c_0)=E(c)$, für hinreichend kleine s. Analog erhalten wir $\frac{\partial}{\partial s}|_0L(\tilde c_s)=0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2}|_0L(\tilde c_s)=\frac{1}{\tau}I_c(X^\perp,X^\perp)\leq\frac{1}{\tau}I_c(X,X)<0$, siehe Bemerkung III.5.9, und somit $L(\tilde c_s)<L(\tilde c_0)=L(c)$.[36] □

III.5.11. Satz (Myers). *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}\geq\lambda>0$.[37] Dann ist M kompakt und es gilt*

$$\operatorname{diam}(M)\leq\pi\sqrt{(n-1)/\lambda}. \tag{III.73}$$

Darüber hinaus hat M endliche Fundamentalgruppe.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**7**]. Es seien $x,y\in M$, $\rho:=d(x,y)>0$ und $c:[0,\rho]\to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte von $c(0)=x$

[36] Diese Ungleichung lässt sich auch mittels Lemma III.3.9 aus $E(\tilde c_s)<E(c)$ herleiten,

$$L(\tilde c_s)^2\leq 2(b-a)E(\tilde c_s)<2(b-a)E(c)=L(c)^2.$$

[37] Dh. $\mathrm{Ric}(X,X)\geq\lambda\langle X,X\rangle$, für eine reelle Zahl $\lambda>0$ und alle Tangentialvektoren X.

nach $c(\rho) = y$, siehe Satz III.3.27. Mittels Paralleltransport konstruieren wir parallele orthonormale Vektorfelder $c' = X_1, X_2, \dots, X_n$ längs c, dh.

$$\nabla_{\partial_t} X_i = 0 \quad \text{und} \quad \langle X_i(t), X_j(t)\rangle = \delta_{ij}.$$

Setze $Y_i(t) := \sin(\pi t/\rho) X_i(t)$ und beachte $(\nabla_{\partial_t} Y_i)(t) = (\pi/\rho)\cos(\pi t/\rho) X_i(t)$, also $|\nabla_{\partial_t} Y_i)(t)|^2 = (\pi/\rho)^2 \cos^2(\pi t/\rho)$, $i = 2, \dots, n$. Da c Kurve minimaler Länge ist, und weil $Y_i(0) = 0 = Y_i(\rho)$, erhalten wir aus Lemma III.5.10

$$\begin{aligned} 0 \leq I(Y_i, Y_i) &= \int_0^\rho \left|\nabla_{\partial_t} Y_i\right|^2 dt - \int_0^\rho \big\langle R(Y_i, c')c', Y_i\big\rangle dt \\ &= (\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) \big\langle R(X_i, c')c', X_i\big\rangle dt \end{aligned}$$

Aufsummieren liefert

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=2}^n I(Y_i, Y_i) &= (n-1)(\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) \operatorname{Ric}(c', c') dt \\ &\leq (n-1)(\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \lambda \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) dt \\ &= \Big((n-1)(\pi/\rho)^2 - \lambda\Big) \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) dt, \end{aligned}$$

woraus wir $d(x, y) = \rho \leq \pi\sqrt{(n-1)/\lambda}$ schließen. Da dies für je zwei Punkte $x, y \in M$ gilt, erhalten wir die Abschätzung (III.73) für den Durchmesser. Die Kompaktheit von M folgt nun aus Satz III.3.27.

Beachte, dass auch die universelle Überlagerung von M die Voraussetzungendes Satzes erfüllt, siehe Proposition III.4.38, und daher ebenfalls kompakt ist. Insbesondere sind ihre Fasern endlich. Da die Fundamentalgruppe frei auf den Fasern wirkt, siehe Korollar III.4.19, muss auch sie endlich sein. □

III.5.12. Bemerkung. Die runde Sphäre S^n_r mit Radius $r > 0$ hat Durchmesser $\operatorname{diam}(S^n_r) = \pi r$ und konstante Ricci Krümmung $\operatorname{Ric} = (n-1)r^{-2}$, siehe Beispiel III.1.11. Satz III.5.11 besagt daher, dass wenn die Ricci Krümmung von M mindestens so groß ist wie die der runden Sphäre S^n_r,

$$\operatorname{Ric}_M \geq \operatorname{Ric}_{S^n_r} = (n-1)/r^2,$$

so ist der Durchmesser von M höchstens so groß wie der der runden Sphäre S^n_r,

$$\operatorname{diam}(M) \leq \pi r = \operatorname{diam}(S^n_r).$$

III.5.13. Beispiel. Das folgende Beispiel [**19**, Chapter 6.4, Example 42] illustriert die Vollständigkeitsvoraussetzung in Satz III.5.11. Es bezeichne $P \in S^2$ einen Punkt in der runden Sphäre. Die unvollständige Mannigfaltigkeit $M := S^2 \setminus \{P, -P\}$ hat konstante Krümmung $K = 1$, Durchmesser $\operatorname{diam}(M) = \pi$ und Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Beachte, dass auch die universelle Überlagerung von M Durchmesser π hat.

III.5.14. Definition (Jacobifeld)**.** Ein Vektorfeld X längs einer Geodäte $c : I \to M$, dh. $X \in \Gamma(c^*TM)$, wird Jacobifeld genannt, falls

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X + R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t} = 0. \tag{III.74}$$

III.5.15. Lemma. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte und $X \in \Gamma(c^*TM)$, dann sind äquivalent:*
(a) X ist ein Jacobifeld längs c.
(b) $I(X,Y) = \langle \nabla_{\partial_t}X, Y\rangle\big|_a^b$, für alle $Y \in \Gamma(c^*TM)$.
(c) $I(X,Y) = 0$, für alle $Y \in \Gamma(c^*TM)$ mit $Y(a) = 0 = Y(b)$.

Beweis. Sind $X, Y \in \Gamma(c^*TM)$, dann gilt

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}X, \nabla_{\partial_t}Y\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle - \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\ &= \big\langle \nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle\big|_a^b - \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X + R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, Y\big\rangle dt, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichheit verwendet haben, dass $\langle R(X,Y)Z, W\rangle$ schiefsymmetrisch in (X,Y) und schiefsymmetrisch in (Z,W) ist. □

III.5.16. Proposition. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $v, w \in T_{c(t_0)}M$. Dann existiert genau ein Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass (III.74) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für X darstellt. Genauer, verwenden wir den Paralleltransport um das Vektorbündel c^*TM zu trivialisieren,

$$I \times V \xrightarrow{\cong} c^*TM, \qquad (t, v) \mapsto \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v),$$

wobei $V := T_{c(t_0)}M$, siehe Satz II.3.11. Dies liefert einen $C^\infty(I)$-linearen Isomorphismus

$$\phi : \Gamma(c^*TM) \xrightarrow{\cong} C^\infty(I, V),$$

mit $\phi(\nabla_{\partial_t}X) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi(X))$ und $\phi(X)(t_0) = X(t_0)$ für alle $X \in \Gamma(c^*TM)$. Folglich ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma(c^*TM)$ genau dann Jacobifeld, wenn $\xi := \phi(X) \in C^\infty(I, V)$ die Gleichung

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\xi + \rho\xi = 0, \tag{III.75}$$

erfüllt, wobei $\rho : I \to \mathrm{end}(V)$, $\rho(t)v := \phi\big(R(\phi^{-1}(\xi), \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}\big)$. Da (III.75) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für ξ bildet, gibt es zu $v, w \in V = T_{c(t_0)}M$ genau eine Lösung $\xi \in C^\infty(I, V)$ mit $\xi(t_0) = v$ und $\frac{\partial \xi}{\partial t}(0) = w$. Das entsprechende Vektorfeld $X = \phi^{-1}(\xi) \in \Gamma(c^*TM)$ ist daher das eindeutige Jacobifeld längs c mit $X(t_0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$. □

III.5.17. Lemma. *Es sei X ein Jacobifeld längst einer Geodäte c, und es bezeichne $X = X^\| + X^\perp$ die Zerlegung von X in tangentialen und orthogonalen Teil, dh.*

$$X^\| := \big\langle X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2} \tfrac{\partial c}{\partial t}, \qquad X^\perp := X - X^\|.$$

Dann sind auch $X^\|$ und $X^\perp$ Jacobifelder längs c.

Beweis. Zunächst gilt $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial c}{\partial t} = 0$ und $\big|\frac{\partial c}{\partial t}\big| = \text{const}$, denn c ist Geodäte. Somit $\nabla_{\partial_t} X^\| = \big\langle \nabla_{\partial_t} X, \frac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big|\frac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2} \frac{\partial c}{\partial t}$, und erneutes Ableiten liefert, unter Verwendung der Jacobigleichung (III.74) für X,

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X^\| = \big\langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2} \tfrac{\partial c}{\partial t} = -\big\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2} \tfrac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

denn $\langle R(X, Y)Z, W\rangle$ ist schiefsymmetrisch in (Z, W). Wegen der Schiefsymmetrie in (X, Y) haben wir weiters $R(X^\|, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, also ist $X^\|$ ein Jacobifeld. Aus der Linearität der Jacobigleichung folgt sofort, dass auch $X^\perp$ Jacobifeld ist. □

III.5.18. Lemma (Tangentiale Jacobifelder)**.** *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist das (eindeutige) Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = \lambda \frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(t_0) = \mu \frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ durch folgende Formel gegeben*

$$X(t) = \big(\lambda + (t - t_0)\mu\big) \tfrac{\partial c}{\partial t}, \qquad t \in I. \tag{III.76}$$

Beweis. Für das durch (III.76) gegebene Vektorfeld $X \in \Gamma(c^*TM)$ gilt offensichtlich $\nabla_{\partial t} X = \mu \frac{\partial c}{\partial t}$ und $\nabla_{\partial t} \nabla_{\partial t} X = 0 = R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}$, denn c ist Geodäte und $R(X, Y)$ schiefsymmetrisch. Folglich ist dieses X Jacobifeld mit $X(t_0) = \lambda \frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(t_0) = \mu \frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$. □

III.5.19. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und I ein kompaktes Intervall, dann gilt:*

(a) Ist $c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt, sodass jede der Kurven $c_s(t) := c(t, s)$ eine Geodäte bildet, $|s| < \varepsilon$, dann ist $X(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(t, 0)$ ein Jacobifeld längs c_0.

(b) Ist X ein Jacobifeld längs einer Geodäte $c_0 : I \to M$, dann existiert eine glatte Abbildung $c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, sodass jede der Kurven $c_s(t) = c(t, s)$ eine Geodäte bildet, $|s| < \varepsilon$, und $c(t, 0) = c_0(t)$, $\frac{\partial c}{\partial s}(t, 0) = X(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. Um (a) zu verifizieren, beobachten wir

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} \tfrac{\partial c}{\partial t} = \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial c}{\partial t} - R(\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t} = -R(\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t},$$

denn $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial c}{\partial t} = 0$, da jedes c_s Geodäte ist. Somit gilt $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} \frac{\partial c}{\partial s} + R(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, insbesondere ist also $X(t) = \frac{\partial c}{\partial s}(t, 0)$ ein Jacobifeld längs c_0.

Um (b) zu verifizieren, fixieren wir $t_0 \in I$ und wählen eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit

$$\gamma(0) = c_0(t_0) \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}(0) = X(t_0). \tag{III.77}$$

Weiters sei $\xi \in \Gamma(\gamma^*TM)$ ein Vektorfeld längs γ mit[38]

$$\xi(0) = \tfrac{\partial c_0}{\partial t}(t_0) \quad \text{und} \quad (\nabla_{\partial_s}\xi)(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0). \tag{III.78}$$

Betrachte nun die glatte Abbildung

$$c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad c(t,s) := \exp_{\gamma(s)}\big((t-t_0)\xi(s)\big).$$

Da I kompakt vorausgesetzt wurde, ist dies für hinreichend kleine ε tatsächlich wohldefiniert. Nach Konstruktion ist jede der Kurven $c_s(t) = c(t,s)$ eine Geodäte, $|s| < \varepsilon$, und $c(t,0)$ stimmt mit der gegebenen Geodäte c_0 überein, denn

$$c(t,0) = \exp_{\gamma(0)}\big((t-t_0)\xi(0)\big) = \exp_{c_0(t_0)}\big((t-t_0)\tfrac{\partial c_0}{\partial t}(t_0)\big) = c_0(t),$$

vgl. (III.77) und (III.78). Nach (a) ist $Y(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(t,0)$ Jacobifeld längs c_0. Es genügt nun $Y(t_0) = X(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0)$ zu zeigen, denn aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.5.16 folgt dann $Y(t) = X(t)$, für alle $t \in I$. Für die erste dieser Gleichungen beachte

$$Y(t_0) = \tfrac{\partial c}{\partial s}(t_0,0) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}(0) = X(t_0),$$

und für die zweite Gleichung,

$$(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0) = (\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s})(t_0,0) = (\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t})(t_0,0) = (\nabla_{\partial_s}\xi)(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0),$$

vgl. (III.77). □

III.5.20. Korollar. *Killing Vektorfelder sind Jacobifelder längs jeder Geodäte.*

Beweis. Sei also X ein Killing Vektorfeld, siehe Seite 110 in Abschnitt III.1, und $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte. Betrachte die Variation $c : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $c(t,s) := \mathrm{Fl}^X_s(c(t))$. Wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ ist dies für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ wohldefiniert. Für jedes $|s| < \varepsilon$ ist $c_s : [a,b] \to M$ eine Geodäte, denn als Fluss eines Killing Vektorfeldes ist Fl^X_s eine (lokale) Isometrie und bildet daher Geodäten auf Geodäten ab. Nach Satz III.5.19(a) ist daher $\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \mathrm{Fl}^X_s(c(t)) = X(c(t))$ ein Jacobifeld längs c. □

III.5.21. Korollar. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $w \in T_{c(t_0)}M$. Dann ist das (eindeutige) Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$ durch folgenden Ausdruck gegeben:*

$$X(t) = T_{(t-t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot \big((t-t_0)w\big)$$

Beweis. In der Variation $\tilde c(t,s) := \exp_{c(t_0)}\big((t-t_0)(c'(t_0)+sw)\big)$ ist jedes $\tilde c_s$ eine Geodäte und es gilt $\tilde c_0 = c$. Nach Satz III.5.19(a) bildet daher

$$X(t) = \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(t,0) = T_{(t-t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot \big((t-t_0)w\big)$$

[38]Um so ein Vektorfeld ξ zu konstruieren, wählen wir parallele Vektorfelder $V, W \in \Gamma(\gamma^*TM)$, $\nabla_{\partial_s}V = 0 = \nabla_{\partial_s}W$, mit $V(0) = \frac{\partial c_0}{\partial t}(t_0)$ und $W(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0)$. Dann hat $\xi(s) := V(s) + sW(s)$ die gewünschten Eigenschaften.

ein Jacobifeld längs c. Offensichtlich gilt $X(t_0) = T_0 \exp_{c(t_0)} \cdot 0 = 0$ aber auch $(\nabla_{\partial_t} X)(t_0) = (\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s})(t_0, 0) = (\nabla_{\partial_s} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t})(t_0, 0) = \nabla_{\partial_s}(c'(t_0) + sw)\big|_{s=0} = w$. $\square$

III.5.22. Definition (Konjugierte Punkte)**.** Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte und $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \neq t_1$. Existiert ein nicht triviales Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = 0 = X(t_1)$, dann werden t_0 und t_1 konjugiert längs c genannt.

III.5.23. Korollar. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0, t_1 \in I$ und $t_0 \neq t_1$. Dann sind äquivalent:*

(a) t_0 und t_1 sind nicht konjugiert längs c.
(b) Zu jedem $v \in T_{c(t_0)}M$ und jedem $w \in T_{c(t_1)}M$ existiert ein eindeutiges Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = v$ und $X(t_1) = w$.
(c) Die Exponentialabbildung $\exp_{c(t_0)} : T_{c(t_0)}M \to M$ ist bei $(t_1 - t_0)c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Beweis. Bezeichnet J_c den Vektorraum der Jacobifelder längs c, dann gilt $\dim J_c = 2 \dim M$, siehe Proposition III.5.16. Betrachte nun die lineare Abbildung

$$\phi : J_c \to T_{c(t_0)}M \times T_{c(t_1)}M, \qquad \phi(X) := (X(t_0), X(t_1)).$$

Aus Dimensionsgründen gilt daher (a) $\Leftrightarrow \ker \phi = 0 \Leftrightarrow \phi$ bijektiv $\Leftrightarrow$ (b). Betrachte nun die Ableitung der Exponentialabbildung

$$\psi : T_{c(t_0)}M = T_{(t_1 - t_0)c'(t_0)} T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M, \qquad \psi(w) := T_{(t_1 - t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot w.$$

Aus Korollar III.5.21, $\dim T_{c(t_0)}M = \dim T_{c(t_1)}M$ und dem impliziten Funktionensatz erhalten wir die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow \ker \psi = 0 \Leftrightarrow \psi$ bijektiv $\Leftrightarrow$ (c). $\square$

III.5.24. Satz (Mangoldt, Hadamard, Cartan)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Dann ist die Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ eine Überlagerungsabbildung, für jedes $x \in M$. Insbesondere ist die universelle Überlagerung von M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, es existiert genau eine Geodäte in jeder Homotopieklasse von Wegen relativ Endpunkten und $\pi_k(M) = 0$, für alle $k \geq 2$. Ist darüber hinaus M einfach zusammenhängend, dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ und je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch genau eine Geodäte verbinden.*

Beweis. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte und X ein Jacobifeld längs c mit $X(a) = 0 = X(b)$. Nach Voraussetzung an die Krümmung folgt aus der Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X + R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle &= \big\langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 \\ &= -\underbrace{\big\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, X \big\rangle}_{\leq 0} + \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 \geq \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2, \end{aligned}$$

und somit

$$0 = \big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle\Big|_a^b = \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle dt \geq \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 dt,$$

also $\nabla_{\partial_t} X \equiv 0$. Dies zeigt, dass a und b nicht konjugiert längs c sind. Nach Korollar III.5.23 ist daher $\exp_x : T_xM \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus, für jedes $x \in M$. Der Satz folgt nun aus Korollar III.4.40. □

III.5.25. Proposition. *Ist $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte, sodass kein $t \in [a, b]$ konjugiert zu a längs c ist, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ von $\gamma(a) = c(a)$ nach $\gamma(b) = c(b)$ mit $d(\gamma(t), c(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$, gilt $L(\gamma) \geq L(c)$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn γ monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von c ist.*

Beweis. O.B.d.A. seien $a = 0$ und $b = 1$. Setze $p := c(0)$ und $v := c'(0)$. Nach Korollar III.5.23 ist die Exponentialabbildung $\exp_p : T_pM \to M$ längs $[0, 1]v$ ein lokaler Diffeomorphismus. Es existieren daher $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ und offene Umgebungen V_i von $[t_{i-1}, t_i]v$, sodass $\exp_p : V_i \to M$ ein Diffeomorphismus auf die offene Mennge $U_i := \exp_p(V_i)$ bildet, $i = 1, \ldots, N$. Insbesondere gilt $c([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, $i = 1, \ldots, N$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass jede Kurve $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $d(\gamma(t), t(t))$ für alle $t \in [0, 1]$, ebenfalls $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ erfüllt, $i = 1, \ldots, N$. Jede solche Kurve kann daher nach T_pM geliftet werden, dh. es existiert eine Kurve $\tilde\gamma : [0, 1] \to \bigcup_{i=1}^N V_i \subseteq T_pM$, sodass $\exp_p \circ \tilde\gamma = \gamma$. Gilt $\gamma(0) = c(0)$ ud $\gamma(1) = c(1)$, dann auch $\tilde\gamma(0) = 0$ und $\tilde\gamma(1) = v$. Die Proposition folgt nun genau wie im Beweis von Satz III.3.18(b). □

III.5.26. Beispiel. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung, $K = \text{const}$. Nach Lemma III.1.4 gilt daher

$$R(X, Y)Z = -Kg(X, Z)Y + Kg(Y, Z)X. \tag{III.79}$$

Weiters sei $c : I \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, $|c'(t)| = 1$, $0 \in I$, $v, w \in T_{c(0)}M$ und $v \perp c'(0) \perp w$. Wir wollen nun das Jacobifeld X längs c mit $X(0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) = w$ bestimmen. Es bezeichnen dazu V und W die parallelen Vektorfelder längs c, dh. $\nabla_{\partial_t} V = 0 = \nabla_{\partial_t} W$, mit $V(0) = v$ und $W(0) = w$. Setzen wir das Jacobifeld als $X(t) = f(t)V(t) + g(t)W(t)$ an, so erhalten wir $\nabla_{\partial_t} X = f'V + g'W$, $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X = f''V + g''W$ und $R(X, c')c' = KX = KfV + KgW$, vgl. (III.79). Das Vektorfeld X erfüllt daher die Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X + R(X, c')c' = 0$ genau dann, wenn $f'' + Kf = 0$ und $g'' + Kg = 0$. Die Anfangsbedingungen übersetzen sich zu $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Wir erhalten die Lösungen:

$$K > 0 : \qquad X(t) = \cos(\sqrt{K}t)V(t) + \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}}W(t)$$

$$K = 0 : \qquad X(t) = V(t) + tW(t)$$

$$K < 0 : \qquad X(t) = \cosh(\sqrt{|K|}t)V(t) + \frac{\sinh(\sqrt{|K|}t)}{\sqrt{|K|}}W(t)$$

Beachte, dass im Fall $K \leq 0$ keine konjugierten Punkte existieren.

III.5.27. Lemma. *Ist $c:[a,b]\to M$ eine Geodäte, dann existiert eine Konstante $C\geq 0$, sodass $\big|I_c(X,X)\big|\leq C\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}X|^2+|X|^2dt$, für alle $X\in\Gamma(c^*TM)$.*

Beweis. Aus Kompaktheitsgründen existiert eine Konstante $C_1\geq 0$, sodass $\big|\langle R(c'(t),\xi)\xi,c'(t)\rangle\big|\leq C_1|\xi|^2$, für jedes $t\in[a,b]$ und $\xi\in T_{c(t)}M$. Für $X\in\Gamma(c^*TM)$ erhalten wir

$$\big|I_c(X,X)\big|\leq\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}X\big|^2+\big|\langle R(c',X)X,c'\rangle\big|dt\leq\int_a^b\big|\nabla_{\partial_t}X|^2dt+C_1\int_a^b|X|^2dt.$$

Das Lemma folgt daher mit $C:=\max\{1,C_1\}$. □

III.5.28. Proposition. *Ist $c:[a,b]\to M$ eine Geodäte und $t_0\in(a,b)$ konjugiert zu a längs c, dann existiert ein Vektorfeld X längs c mit $I_c(X,X)<0$ und $X(a)=0=X(b)$. Darüber hinaus existiert in diesem Fall eine Variation $\tilde c:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ von $\tilde c_0=c$, sodass $\tilde c_s(a)=c(a)$, $\tilde c_s(b)=c(b)$, $E(\tilde c_s)<E(c)$ und $L(\tilde c_s)<L(c)$ für alle $0<|s|<\varepsilon$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein nicht triviales Jacobifeld Y längs c mit $Y(a)=0=Y(t_0)$. Aus Proposition III.5.16 erhalten wir $(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0)\neq 0$. Für das stückweise glatte Vektorfeld

$$V(t):=\begin{cases}Y(t) & \text{falls } t\in[a,t_0]\\ 0 & \text{falls } t\in[t_0,b]\end{cases}$$

längs c gilt nach Lemma III.5.15 $I_c(V,V)=0$. Weiters sei W ein Vektorfeld längs mit $W(a)=0=W(b)$ und $W(t_0)=-(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0)$. Nach Lemma III.5.15 gilt

$$I_c(V,W)=\big\langle\nabla_{\partial_t}Y,W\big\rangle\big|_a^{t_0}=\big\langle(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0),W(t_0)\big\rangle=-\big|(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0)\big|^2<0.$$

Wir erhalten

$$I_c(V+\eta W,V+\eta W)=\underbrace{I_c(V,V)}_{=0}+2\eta\underbrace{I_c(V,W)}_{<0}+\eta^2I_c(W,W).$$

Für $\eta>0$ hinreichend klein, erfüllt das stückweise glatte Vektorfeld $Z:=V+\eta W$ daher $I_c(Z,Z)<0$ und $Z(a)=0=Z(b)$. Approximieren wir nun Z durch ein glattes Vektorfeld X längs c, das sich von Z nur in einer kleinen Umgebung von t_0 unterscheidet, $\int_a^b|X-Z|^2+|\nabla_{\partial_t}(X-Z)|^2dt<\delta$, so folgt $I_c(X,X)<0$ und $X(a)=0=X(b)$, vgl. Lemma III.5.27. Die zweite Aussage der Proposition folgt nun aus Lemma III.5.10. □

Ist $c:[a,b]\to M$ eine Kurve so bezeichnen wir mit

$$\Gamma_0(c^*TM):=\big\{X\in\Gamma(c^*TM):X(a)=0=X(b)\big\},$$

den Vektorraum der Vektorfelder längs c, die an den Randpunkten verschwinden.

III.5.29. Korollar. *Für eine Geodäte $c:[a,b]\to M$ sind äquivalent:*

(a) Kein $t\in(a,b)$ ist konjugiert zu a längs c.

(b) Die Indexform ist positiv semidefinit, $I_c(X,X)\geq 0$ für alle $X\in\Gamma_0(c^*TM)$.

BEWEIS. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus Proposition III.5.28. Für die umgekehrte Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) betrachten wir $X\in\Gamma_0(c^*TM)$ mit $I_c(X,X)<0$. O.B.d.A. dürfen wir weiters $X|_{[b-\delta,b]}\equiv 0$ annehmen, vgl. Lemma III.5.27. Nach Lemma III.5.10 existiert daher eine Variation $\tilde c:[a,b-\delta]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ von $\tilde c_0=c|_{[a,b-\delta]}$ mit $\tilde c_s(a)=c(a)$, $\tilde c_s(b-\delta)=c(b-\delta)$ und $L(\tilde c_s)<L(c|_{[a,b-\delta]})$, für alle $0<|s|<\varepsilon$. Nach Proposition III.5.25 muss es daher einen Punkt $t\in(a,b-\delta]\subseteq(a,b)$ geben, der konjugiert zu a längs c ist. $\square$

III.5.30. Korollar. *Für eine Geodäte $c:[a,b]\to M$ sind äquivalent:*

(a) Kein $t\in(a,b]$ ist konjugiert zu a längs c.
(b) Die Indexform ist positiv definit, $I_c(X,X)>0$ für alle $0\neq X\in\Gamma_0(c^*TM)$.

BEWEIS. Wir beginnen mit der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Nach Korollar III.5.29 gilt zunächst $I_c(X,X)\geq 0$, für alle $X\in\Gamma_0(c^*TM)$. Ist $X\in\Gamma_0(c^*TM)$ und $I_c(X,X)=0$, dann folgt

$$0\leq I_c(X+\eta Y,X+\eta Y)=\underbrace{I_c(X,X)}_{=0}+2\eta I_c(X,Y)+\eta^2 I_c(Y,Y),$$

für alle $Y\in\Gamma_0(c^*TM)$ und alle $\eta\in\mathbb{R}$. Betrachten wir η nahe 0, dann erhalten wir $I_c(X,Y)=0$, für alle $Y\in\Gamma_0(c^*TM)$. Nach Lemma III.5.15 muss daher X ein Jacobifeld längs c sein. Nach Voraussetzung ist b nicht konjugiert zu a längs c, also $X\equiv 0$. Dies zeigt, dass I_c auf $\Gamma_0(c^*TM)$ positiv definit ist. Nun zur umgekehrten Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Nach Korollar III.5.29 wissen wir, dass kein $t\in(a,b)$ konjugiert zu a sein kann. Es kann aber auch b nicht konjugiert zu a sein, denn sonst gäbe es ein Jacobifeld $0\neq X\in\Gamma_0(c^*TM)$, für das dann $I_c(X,X)=0$ gelten würde, siehe Lemma III.5.15. $\square$

Ohne Beweis sei hier noch folgende Verallgemeinerung der vorangehenden Resultate erwähnt, etwa in [**7**, Theorem 4.3.2] oder [**13**, §15].

III.5.31. Satz (Morse Index Theorem)**.** *Ist $c:[a,b]\to M$ eine Geodäte, dann existieren nur endlich viele Punkte $t\in[a,b]$ die konjugiert zu a längs c sind, und es gilt*

$$\operatorname{ind}(I_c)=\sum_{t\in(a,b)}\dim\bigl\{X \text{ Jacobifeld längs } c \text{ mit } X(a)=0=X(t)\bigr\},$$

wobei $\operatorname{ind}(I_c):=\max\bigl\{\dim V\bigm| V\subseteq\Gamma_0(c^*TM) \text{ Teilraum mit } I_c|_V<0\bigr\}$. *Weiters*

$$\operatorname{ind}_0(I_c)=\sum_{t\in(a,b]}\dim\bigl\{X \text{ Jacobifeld längs } c \text{ mit } X(a)=0=X(t)\bigr\},$$

wobei $\operatorname{ind}_0(I_c):=\max\bigl\{\dim V\bigm| V\subseteq\Gamma_0(c^*TM) \text{ Teilraum mit } I_c|_V\leq 0\bigr\}$.

Ein Beweis des folgenden Satzes findet sich in [**13**, Theorem 17.3].

III.5.32. Satz. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$ nicht konjugiert, dh. für jede Geodäte $c : [a, b] \to M$ von $c(a) = p$ nach $c(b) = q$ ist a nicht konjugiert zu b.*[39] *Dann hat der Pfadraum*

$$\Omega(M, p, q) := \big\{\gamma : [0, 1] \to M \bigm| \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\big\},$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie, den Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes mit einer k-Zelle für jede Geodäte c von p nach q mit $\operatorname{ind}(I_c) = k$.

III.6. Vergleich von Jacobifeldern.

III.6.1. Proposition. *Für $p \in M$ betrachte die Funktion*

$$f_p : M \to \mathbb{R}, \qquad f_p(x) := \tfrac{1}{2} d(x, p)^2.$$

Weiters sei $x \in M$, sodass f_p in einer Umgebung von x glatt ist. Schließlich sei $c : [0, 1] \to M$ eine minimale Geodäte von $c(0) = p$ nach $c(1) = x$ und X ein Jacobifeld längs c mit $X(0) = 0$. Dann gilt $\operatorname{grad}_x(f_p) = c'(1)$ *und* [40]

$$H(f_p)\big(X(1), X(1)\big) = \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1).$$

Beweis. Wir betrachten eine Variation $\tilde c(t, s)$, sodass jedes $\tilde c_s(t) := \tilde c(t, s)$ Geodäte ist, dh. $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde c}{\partial t} = 0$, mit $\tilde c_s(0) = p$ und $\tilde c_0 = c$. Für hinreichend kleine s ist $\tilde c_s$ eine minimale Geodäte von p nach $\tilde c(1, s)$ und daher

$$f_p(\tilde c(1, s)) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \big|\tfrac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big| dt\Big)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \big|\tfrac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big|^2 dt = E(\tilde c_s),$$

denn $\big|\frac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big|$ ist konstant in t. Aus Lemma III.5.1 folgt somit

$$(df_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1, s)\big) = \tfrac{\partial}{\partial s} f_p(\tilde c(1, s)) = \tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde c_s) = \langle \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\rangle\big|_{t=0}^{t=1} = \big\langle \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle(1, s)$$

denn $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde c}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \tilde c}{\partial s}(0, s) = 0$, da $\tilde c(0, s) = \text{const} = p$. Da $\frac{\partial \tilde c}{\partial s}(1, s)$ in $T_x M$ beliebig vorgegeben werden kann, folgt daraus

$$\operatorname{grad}_{\tilde c(1,s)}(f_p) = \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}(1, s).$$

Setzen wir $s = 0$, so erhalten wir die erste Behauptung, $\operatorname{grad}_x(f_p) = c'(1)$. Erneutes Ableiten liefert

$$\begin{aligned} H(f_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1, s), \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1, s)\big) &= (\nabla_{\partial_s} df_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1, s)\big) \\ &= \big\langle \nabla_{\partial_s} \operatorname{grad}(f_p), \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1, s) = \big\langle \nabla_{\partial_s} \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1, s) = \big\langle \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1, s). \end{aligned}$$

---

[39] Die Existenz solcher Paare von Punkten (p, q) folgt aus Korollar III.5.23 mit Hilfe des Satzes von Sard, vgl. [**13**, §18].

[40] Unter dem *Gradienten* einer glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, verstehen wir jenes Vektorfeld $\operatorname{grad}(f) \in \Gamma(TM)$, das bezüglich g der 1-Form $df \in \Gamma(T^*M)$ entspricht, dh. $\langle \operatorname{grad}(f), -\rangle = df$, oder $\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle = df(X) = X \cdot f$, für alle $X \in T_x M$. Die *Hessesche* von f ist $H(f) := \nabla df \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, dh. $H(f)(X, Y) = (\nabla_X df)(Y) = X \cdot (Y \cdot f) - df(\nabla_X Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle$, für $X, Y \in T_x M$. Beachte, dass die Hessesche aufgrund der Torsionsfreiheit von ∇ symmetrisch ist, dh. $H(f) \in \Gamma(S^2 T^*M)$, also $H(f)(X, Y) = H(f)(Y, X)$ für $X, Y \in T_x M$.

Nach Satz III.5.19 ist $X(t) := \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t,0)$ Jacobifeld längs c und $X(0) = 0$. Setzen wir in obiger Formel für die Hessesche $s = 0$, so erhalten wir die zweite Behauptung, $H(f_p)\big(X(1), X(1)\big) = \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1)$. $\square$

III.6.2. Lemma. *Es sei M eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, und $p \in M$. Dann ist die Funktion $f_p : M \to \mathbb{R}$, $f_p(x) := \frac{1}{2}d(x,p)^2$, glatt und für ihre Hessesche gilt $H(f_p) \geq g$, dh.*

$$H(f_p)(X, X) \geq |X|^2, \qquad X \in T_xM. \tag{III.80}$$

Ist darüber hinaus $K < 0$ und $x \neq p$, so gilt Gleichheit in (III.80) *genau dann, wenn X tangential an die (eindeutige) Geodäte durch p und x ist.*

Beweis. Die Glattheit von f_p folgt sofort aus Satz III.5.24, denn in Riemannschen Polarkoordinaten zentriert bei p stimmt f_p mit $\frac{1}{2}r^2$ überein, wobei r den Euklidischen Abstand zu $0 \in T_pM$ bezeichnet.

Es sei nun $x \in M$ und $c : \mathbb{R} \to M$ die eindeutige Geodäte von $c(0) = p$ nach $c(1) = x$. Weiters sei X ein nicht-triviales Jacobifeld längs c mit $X(0) = 0$. Nach Satz III.5.24 und Korollar III.5.23 gilt daher $X(t) \neq 0$, für alle $t > 0$. Die Funktion

$$\lambda : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \lambda(t) := \frac{\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle}{|X|^2}(t).$$

ist daher glatt. Ihre Ableitung lässt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \Big(\big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X, X\big\rangle |X|^2 + |\nabla_{\partial_t} X|^2|X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&= \Big(-\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, X\rangle |X|^2 + |\nabla_{\partial_t} X|^2|X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&\geq \Big(|\nabla_{\partial_t} X|^2|X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&\geq \Big(\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&= -\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2|X|^{-4} = -\lambda^2,
\end{aligned}$$

wobei wir die Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X + R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, die Vorausseqtzung an die Schnittkrümmung $K \leq 0$, und auch die Cauchy–Schwarz Ungleichung verwendet haben. Somit gilt $1 \geq -\lambda'\lambda^{-2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\lambda}$. Da $\lim_{t\to 0}\lambda(t) = \infty$, erhalten wir durch Integration $1 \geq \frac{1}{\lambda(t)}\big|_0^1 = \frac{1}{\lambda(1)}$, also $\lambda(1) \geq 1$. Zusammen mit Proposition III.6.1 folgt

$$|X(1)|^2 \leq \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1) = H(f_p)\big(X(1), X(1)\big).$$

Dies zeigt (III.80), denn $X(1)$ in T_xM ist beliebig, siehe Korollar III.5.23. Tritt in (III.80) Gleichheit ein, dann muss $\langle R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}, X\rangle \equiv 0$ gelten. Im Fall $K < 0$ folgt daraus, dass X und $\frac{\partial c}{\partial t}$ punktweise linear abhängig sind. Gilt darüber hinaus $x \neq p$, dann ist c nicht konstant, und daher X tangential an c. $\square$

III.6.3. Satz (Cartan)**.** *Auf einer vollständigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, besitzt jede Isometrie endlicher Ordnung einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**19**, Chapter 6§3.2]. Sei also M eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Für jedes $p \in M$ ist die Funktion $f_p : M \to \mathbb{R}$ strikt konvex, dh. für jede nicht konstante Geodäte c ist $f_p \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Abbildung.[41] Dies folgt aus Lemma III.6.2, denn

$$(f_p \circ c)'' = \tfrac{\partial}{\partial t} df_p(c') = (\nabla df_p)(c', c') - df_p(\nabla_{\partial_t} c') = H(f_p)(c', c') \geq |c'|^2 > 0.$$

Sei nun $\varphi \in \operatorname{Isom}(M)$ eine Isometrie endlicher Ordnung, dh. $\varphi^k = \mathrm{id}_M$, für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Funktion

$$F : M \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \max\bigl\{f_p(x), f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi^2(p)}(x), \dots, f_{\varphi^{k-1}(p)}(x)\bigr\}$$

strikt konvex, denn das Maximum zweier (endlich vieler) strikt konvexer Fuktionen ist offensichtlich selbst wieder strikt konvex. Aus Stetigkeitsgründen muss F ein Minimum annehmen, denn für jedes $r > 0$ ist $\{x \in M : F(x) \leq r\}$ beschränkt und abgeschlossen also kompakt, siehe Satz III.3.27. Da F *strikt* konvex ist, wird dieses Minimum bei genau einem Punkt $q \in M$ angenommen. Wären nämlich $q_1 \neq q_2$ zwei verschiedene Punkte an denen F ihr Minimum annimmt, und γ eine Geodäte die q_1 mit q_2 verbindet, dann wäre $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion, die ihr Minimum mehrmals annimmt.[42] Da φ eine Isometrie ist gilt $f_{\varphi^{k+1}(p)}(\varphi(x)) = f_{\varphi^k(p)}(x)$ und somit $F(\varphi(x)) = F(x)$. Aus der Eindeutigkeit des Minimums folgt daher $\varphi(q) = q$, also ist q der gesuchte Fixpunkt. □

III.6.4. Korollar. *Die Fundamentalgruppe einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, ist torsionsfrei.*[43]

Beweis. Die universelle Überlagerung einer solchen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, auf der die Fundamentalgruppe durch Isometrien frei wirkt. Das Korollar folgt daher aus Satz III.6.3. □

III.6.5. Proposition. *Es sei M eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Bezeichnen α, β und γ die Winkel eines (geodätischen) Dreiecks in M, dann gilt*

[41] Wir erinnern uns, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird strikt konvex genannt, falls

$$f\bigl(tx + (1-t)y\bigr) < tf(x) + (1-t)f(y),$$

für alle $x \neq y$ und $0 < t < 1$. Ist f zweimal stetig differenzierbar und $f'' > 0$, dann ist f strikt konvex.

[42] Strikt konvexe Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nehmen ihr Minimum, falls es existiert, höchstens an einer Stelle an. Dies folgt sofort aus der Definition strikt konvexer Funktionen.

[43] dh. jedes nicht-triviale Element hat unendliche Ordnung

$\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$. *Ist darüber hinaus* $K < 0$ *und das Dreieck nicht degeneriert,*[44] *dann gilt sogar* $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Beweis. Es sei $p \in M$ und $\sigma : \mathbb{R} \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Nach Lemma III.6.2 gilt

$$(f_p \circ \sigma)'' = \tfrac{\partial}{\partial t} df_p(\sigma') = (\nabla df_p)(\sigma', \sigma') - df_p(\nabla_{\partial t} \sigma') = H(f_p)(\sigma', \sigma') \geq |\sigma'|^2 = 1.$$

Es folgt

$$(f_p \circ \sigma)'(\tau) - (f_p \circ \sigma)'(0) = \int_0^\tau (f_p \circ \sigma)''(t) dt \geq \int_0^\tau dt = \tau,$$

und erneutes Integrieren liefert

$$\begin{aligned} f_p(\sigma(t)) - f_p(\sigma(0)) &= \int_0^t (f_p \circ \sigma)'(\tau) d\tau \\ &\geq \int_0^t (f_p \circ \sigma)'(0) + \tau d\tau = t(f_p \circ \sigma)'(0) + t^2/2. \end{aligned} \tag{III.81}$$

Wir fixieren nun t und betrachten das Dreieck mit Eckpunkten $A := \sigma(t)$, $B := p$ und $C := \sigma(0)$. Weiters bezeichne ρ die Geodäte mit $\rho(0) = p$ und $\rho(1) = \sigma(0)$. Für die Längen der entsprechenden Seiten gilt daher $a = d(p, \sigma(0)) = |\rho'(1)|$, $b = t$ und $c = d(p, \sigma(t))$. Für den Winkel γ bei C erhalten wir aus Proposition III.6.1

$$\begin{aligned} -a \cos\gamma &= a \frac{\langle \rho'(1), \sigma'(0) \rangle}{|\rho'(1)||\sigma'(0)|} = \langle \rho'(1), \sigma'(0) \rangle \\ &= \big\langle \operatorname{grad}_{\rho(1)}(f_p), \sigma'(0) \big\rangle = (df_p)(\sigma'(0)) = (f_p \circ \sigma)'(0). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (III.81) besagt daher

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{III.82}$$

Da p und σ beliebig waren, gilt diese Relation in jedem Dreieck. Bezeichnen α_0, β_0 und γ_0 die entsprechenden Winkel in einem Euklidischen Dreieck mit Seitenlägen a, b und c, dann gilt der Kosinussatz, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_0$, und mit (III.82) folgt $\gamma \leq \gamma_0$ und analog $\alpha \leq \alpha_0$ und $\beta \leq \beta_0$. Somit erhalten wir $\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi$, denn die Winkelsumme in Euklidischen Dreiecken ist stets π. Ist $K < 0$ und das Dreieck ABC nicht degeneriert, so gilt in (III.82) strikte Ungleichheit und daher auch $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. □

III.6.6. Proposition. *Es sei* M *eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung,* $K \leq 0$. *Weiters seien* A_1, A_2, A_3, A_4 *die Eckpunkte eines Vierecks mit entsprechenden Winkeln* α_1, α_2, α_3 *und* α_4. *Für die Winkelsumme gilt dann* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\pi$. *Ist darüber hinaus* $K < 0$, *dann tritt Gleichheit tritt nur dann ein, wenn alle vier Eckpunkte auf einer Geodäte liegen.*

[44] dh. die drei Eckpunkte liegen nicht auf einer Geodäte

Beweis. Aus Proposition III.6.5 erhalten wir für die Winkelsumme des Dreiecks mit Ecken A_1, A_2, A_3

$$\alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_3' \leq \pi, \tag{III.83}$$

wobei α_1' und α_3' die Winkel bei A_1 bzw. A_3 bezeichnen. Analog gilt für die Winkelsumme des Dreiecks mit Ecken A_1, A_3, A_4

$$\alpha_1'' + \alpha_3'' + \alpha_4 \leq \pi, \tag{III.84}$$

wobei α_1'', α_3'' die Winkel bei A_1 und A_3 bezeichnen. Zusammen mit

$$\alpha_1 \leq \alpha_1' + \alpha_1'' \qquad \text{und} \qquad \alpha_3 \leq \alpha_3' + \alpha_3''$$

folgt nun $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \leq 2\pi$. Tritt hier Gleichheit ein, so muss auch in (III.83) und (III.84) Gleichheit gelten. Im Fall $K < 0$ folgt daraus, dass A_1, A_2, A_3 und A_1, A_3, A_4 jeweils auf einer Geodäte liegen, und somit liegen alle vier Punkte auf einer Geodäte. □

III.6.7. Satz (Preissmann)**.** *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung, $K < 0$. Dann ist jede nicht-triviale abelsche Untergruppe der Fundamentalgruppe zyklisch, dh. isomorph zu $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**19**, Chapter 6§3.2], andere Zugänge mittels harmonischer Abbildungen bzw. total geodätischer Tori finden sich u.a. in [**7**, Chapter 8.10] oder [**8**, Chapter 3.8]. Es bezeichne $p : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Wir identifizieren die Fundamentalgruppe mit der Gruppe der Decktransformationen, $\pi_1(M) = \mathrm{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$, siehe Beispiel III.4.36. Ist $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ das Bild einer Geodäte, dann bildet

$$G_\Gamma := \bigl\{\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M}) \bigm| \varphi(\Gamma) = \Gamma\bigr\} \subseteq \mathrm{Deck}(\tilde{M})$$

eine Untergruppe. Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ eine Parametrisierung von Γ und $\varphi \in G_\Gamma$. Da Isometrien Geodäten auf Geodäten abbilden, existieren reelle Zahlen a und b mit $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(bt + a)$. Da nicht-triviale Decktransformationen fixpunktfrei sind, kann die Gleichung $t = bt + a$ keine Lösung besitzen, es muss daher $b = 1$ gelten, also $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+a)$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto a$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G_\Gamma \to \mathbb{R}$. Beachte, dass höchstens ein a mit $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+a)$ existiert, und ϕ daher wohldefiniert ist, vgl. Satz III.5.24. Auch ist der Homomorphismus ϕ injektiv, denn nicht-triviale Decktransformationen besitzen keine Fixpunkte. Schließlich ist das Bild von ϕ diskret in $\mathbb{R}$, denn für $\varphi_n \in G_\Gamma$ und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(\gamma(t)) = \gamma(t+a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\gamma(0)) = \gamma(0)$ und dann $\varphi_n = \mathrm{id}_M$ für hinreichend große n, da $\mathrm{Deck}(\tilde{M})$ strikt diskontinuierlich auf $\tilde{M}$ wirkt. Somit ist G_Γ isomorph zu einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{R}$, dh.

(a) Für jede Geodäte $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ gilt $G_\Gamma = 0$ oder $G_\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Wir werden nun folgende Behauptung verifizieren:

(b) Zu jedem $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M})$ existiert eine Geodäte $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ mit $\varphi \in G_\Gamma$, dh. $\varphi(\Gamma) = \Gamma$. Jede solche Geodäte Γ wird eine *Achse* für φ genannt.

Sei dazu $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ beliebig, und $\tilde{\sigma}_0 : [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg von $\tilde{\sigma}_0(0) = \tilde{x}_0$ nach $\tilde{\sigma}_0(1) = \varphi(\tilde{x}_0)$. Da $p(\tilde{\sigma}_0(0)) = p(\tilde{\sigma}_0(1))$ existiert eine stetige Abbildung $\sigma_0 : S^1 \to M$ mit $\sigma_0(e^{2\pi \mathbf{i} t}) = p(\tilde{\sigma}_0(t))$. Nach Korollar III.4.42 ist σ_0 homotop zu einer geschlossenen Geodäte $\sigma_1 : S^1 \to M$, dh. es existiert eine Homotopie $H : S^1 \times [0,1] \to M$ mit $H_0 = \sigma_0$ und $H_1 = \sigma_1$. Nach Satz III.4.13 lässt sich diese zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{M}$ liften, dh. $p(\tilde{H}(t,s)) = H(e^{2\pi \mathbf{i} t}, s)$ und $\tilde{H}(t,0) = \tilde{\sigma}_0(t)$. Setzen wir $\tilde{\sigma}_1(t) := \tilde{H}(t,1)$, dann gilt $p(\tilde{\sigma}_1(t)) = \sigma_1(e^{2\pi \mathbf{i} t})$ aber auch $\varphi(\tilde{\sigma}_1(0)) = \tilde{\sigma}_1(1)$, denn $p(\varphi(\tilde{H}(0,s))) = p(\tilde{H}(1,s))$ und $\varphi(\tilde{H}(0,0)) = \tilde{H}(1,0)$, also $\varphi(\tilde{H}(0,s)) = \tilde{H}(1,s)$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Korollar III.4.14. Es bezeichne nun $\gamma : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ den Lift der Geodäte σ_1, dh. $p(\gamma(t)) = \sigma_1(e^{2\pi \mathbf{i} t})$ und $\gamma(0) = \tilde{\sigma}_1(0)$. Dann ist auch γ eine Geodäte und $\gamma|_{[0,1]} = \tilde{\sigma}_1$, also $\varphi(\gamma(0)) = \gamma(1)$. Daraus folgt nun $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+1)$ für alle t, denn $p(\varphi(\gamma(t))) = \sigma_1(e^{2\pi \mathbf{i} t}) = p(\gamma(t+1))$. Somit ist γ die gesuchte Geodäte.[45]

(c) Für $\mathrm{id}_M \neq \varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M})$ ist die Geodäte Γ in (b) eindeutig bestimmt.

Seien dazu $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \tilde{M}$ die Bilder zweier Geodäten die invariat unter φ sind, dh. $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_1$ und $\varphi(\Gamma_2) = \Gamma_2$. Wähle $A \in \Gamma_1$ und $B \in \Gamma_2$. Wir betrachten nun das Viereck mit Ecken A, B, $C := \varphi(B)$ und $D := \varphi(A)$. Da φ eine Isometrie ist, summieren sich die Winkel des Vierecks bei A und D zu π, und auch die Winkel bei B und C summieren sich zu π. Die Winklesumme des Vierecks beträgt daher 2π. Da $K < 0$, muss das Viereck also degeneriert sein, dh. alle vier Punkte liegen auf einer Geodäte, siehe Proposition III.6.6. Daraus folgt nun $\Gamma_1 = \Gamma_2$, denn $A \neq D$ da φ eine nicht triviale Decktransformation ist, und durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Geodäte, siehe Satz III.5.24. Dies zeigt (c).

(d) Ist $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ eine Geodäte und $H \subseteq G_\Gamma$ eine Teilmenge, die ein nicht-triviales Element enthält, dann gilt auch $N := \{\psi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M}) : \psi^{-1} H \psi = H\} \subseteq G_\Gamma$.

Sei dazu $\mathrm{id}_M \neq \gamma \in H$ und $\psi \in N$. Es existiert daher $\bar{\varphi} \in H$ mit $\varphi\psi = \psi\bar{\varphi}$. Aus $\bar{\varphi}(\Gamma) = \Gamma$ folgt $\psi(\Gamma) = \psi(\bar{\varphi}(\Gamma)) = \varphi(\psi(\Gamma))$, also ist $\psi(\Gamma)$ eine Achse für φ. Aus (c) erhalten wir $\psi(\Gamma) = \Gamma$, also $\psi \in G_\Gamma$. Dies zeigt (d). Kombinieren wir dies mit (a) und (b) folgt der Satz. □

III.6.8. Korollar. *Sind M und N zwei kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und $\pi_1(M) \neq 0 \neq \pi_1(N)$, dann existiert auf $M \times N$ keine Riemannsche Metrik mit negativer Schnittkrümmung, $K < 0$.*

Beweis. Sind $a \in \pi_1(M)$ und $b \in \pi_1(N)$ nicht trivial, dann erzeugen diese eine abelsche Untergruppe in $\pi_1(M \times N) = \pi_1(M) \times \pi_1(N)$, die nicht zyklisch ist. Das Korollar folgt daher aus Satz III.6.7. □

[45] Kombinieren wir (a) mit (b) so erhalten wir erneut die Torsionsfreiheit von $\pi_1(M) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{M})$. In Korollar III.6.4 wurde dies unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen.

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\operatorname{sn}_\kappa(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa} t) & \text{falls } \kappa > 0, \\ t & \text{falls } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa} t) & \text{falls } \kappa < 0, \end{cases}$$

und

$$\operatorname{cn}_\kappa(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa} t) & \text{falls } \kappa > 0, \\ 1 & \text{falls } \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa} t) & \text{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

Beachte $\operatorname{sn}'_\kappa(t) = \operatorname{cn}_\kappa(t)$ und $\operatorname{cn}'_\kappa(t) = -\kappa \operatorname{sn}_\kappa(t)$, die Funktionen sn_κ und cn_κ lösen daher die Jacobigleichung

$$f''(t) + \kappa f(t) = 0$$

mit Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ bzw. $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

III.6.9. Bemerkung. Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$ und X ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodäte c mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \perp c'(0)$, dann gilt $|X(t)| = |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\kappa(t)$, siehe Beispiel III.5.26. TODO: $X = \operatorname{cn}_\kappa(t) V(t) + \operatorname{sn}_\kappa(t) W(t)$ wobei $\nabla_{\partial_t} V = 0 = \nabla_{\partial_t} W$.

Für die folgenden Vergleichstheoreme von Rauch siehe [**20**, Theorem IX.2.1] oder [**7**, Theorem 4.5.1].

III.6.10. Satz (Rauch)**.** *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $c : [0, b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ falls $\kappa > 0$. Schließlich sei X ein Jacobifeld längs c mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \perp c'(0)$. Dann ist $|X| / \operatorname{sn}_\kappa$ monoton wachsend auf $(0, b)$ und*

$$|X(t)| \geq |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\kappa(t), \qquad t \in [0, b].$$

Beweis. O.B.d.A. sei $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \neq 0$ und daher $X(t) \neq 0$ für kleine $t > 0$. Es sei $0 < \tau \leq b$ so, dass X auf dem Intervall $(0, \tau)$ nicht verschwindet. Nach Voraussetzung ist dann auch $\operatorname{sn}_\kappa > 0$ auf $(0, \tau)$. Auf $(0, \tau)$ gilt $|X|' = |X|^{-1} \langle X, \nabla_{\partial_t} X \rangle$ und wegen der Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X + R_{X,c'} c' = 0$ daher

$$\begin{aligned} |X|'' + \kappa |X| &= |X|^{-1} \big(|\nabla_{\partial_t} X|^2 + \langle X, \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X \rangle \big) - |X|^{-3} \langle X, \nabla_{\partial_t} X \rangle^2 + \kappa |X| \\ &= |X|^{-1} \underbrace{\Big(\kappa |X|^2 - \langle R_{X,c'} c', X \rangle \Big)}_{\geq 0} + |X|^{-3} \underbrace{\Big(|X|^2 |\nabla_{\partial_t} X|^2 - \langle X, \nabla_{\partial_t} X \rangle^2 \Big)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Für die Abschätzungen haben wir die Cauchy–Schwarz Ungleichung, $K \leq \kappa$ sowie $X(t) \perp c'(t)$ verwendet, siehe Lemma III.5.17. Daraus erhalten wir

$$\big(|X|' \operatorname{sn}_\kappa - |X| \operatorname{cn}_\kappa \big)' = \big(|X|'' + \kappa |X| \big) \operatorname{sn}_\kappa \geq 0 \qquad \text{auf } (0, \tau).$$

Da $\lim_{t\to 0}\big(|X|'\operatorname{sn}_\kappa - |X|\operatorname{cn}_\kappa\big)(t) = 0$ folgt

$$|X|'\operatorname{sn}_\kappa - |X|\operatorname{cn}_\kappa \geq 0 \qquad \text{auf } (0,\tau),$$

und dann

$$\big(|X|/\operatorname{sn}_\kappa\big)' = \operatorname{sn}_\kappa^{-2}\big(|X|'\operatorname{sn}_\kappa - |X|\operatorname{cn}_\kappa\big) \geq 0 \qquad \text{auf } (0,\tau).$$

Somit ist $|X|/\operatorname{sn}_\kappa$ auf dem Intervall $(0,\tau)$ monoton wachsend. Da

$$\lim_{t\to 0}\big(|X|/\operatorname{sn}_\kappa\big)(t) = |(\nabla_{\partial_t}X)(0)|, \tag{III.85}$$

erhalten wir schließlich

$$|X(t)| \geq |(\nabla_{\partial_t}X)(0)|\operatorname{sn}_\kappa(t), \qquad t \in [0,\tau].$$

Daraus folgt nun auch, dass X auf $(0,b)$ keine Nullstelle besitzen kann, die obigen Überlegungen bleiben daher für $\tau = b$ richtig. □

III.6.11. Satz (Rauch)**.** *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\rho \leq K$, $\rho \in \mathbb{R}$. Weiters sei $c : [0,b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, sodass kein $t \in (0,b)$ konjugiert zu 0 längs c ist. Schließlich sei X ein Jacobifeld längs c mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(0) \perp c'(0)$. Dann ist $|X|/\operatorname{sn}_\rho$ monoton fallend auf $(0,b)$ und*

$$|X(t)| \leq |(\nabla_{\partial_t}X)(0)|\operatorname{sn}_\rho(t), \qquad t \in [0,b].$$

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir $(\nabla_{\partial_t}X)(0) \neq 0$ annehmen, denn andernfalls gilt $X \equiv 0$. Sei nun $0 < \tau < b$ und $\tau < \pi/\sqrt{\rho}$ falls $\rho > 0$. Dann gilt $\operatorname{sn}_\rho > 0$ auf $(0,\tau]$. Auch besitzt X auf $(0,\tau]$ keine Nullstelle, denn nach Voraussetzung ist kein $t \in (0,b)$ konjugiert zu 0 längs c. Es bezeichne I die Indexform von $c|_{[0,\tau]}$, vgl. Definition III.5.7. Nach Korollar III.5.29 ist I positiv semidefinit, denn nach Voraussetzung ist kein $t \in (0,\tau)$ konjugiert zu 0 längs c. Für jedes $Y \in \Gamma(c^*TM)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y(\tau) = X(\tau)$ folgt mittels Lemma III.5.15

$$\begin{aligned}
0 &\leq I(Y-X, Y-X)\\
&= I(Y,Y) - 2I(X,Y) + I(X,X)\\
&= I(Y,Y) - 2\langle\nabla_{\partial_t}X, Y\rangle\big|_0^\tau + \langle\nabla_{\partial_t}X, X\rangle\big|_0^\tau\\
&= I(Y,Y) - \langle\nabla_{\partial_t}X, X\rangle(\tau).
\end{aligned}$$

Ist darüber hinaus $Y \perp c'$, dann liefert dies

$$\langle\nabla_{\partial_t}X, X\rangle(\tau) \leq I(Y,Y) = \int_0^\tau |\nabla_{\partial_t}Y|^2 - \langle R_{c',Y}Y, c'\rangle dt \leq \int_0^\tau |\nabla_{\partial_t}Y|^2 - \rho|Y|^2 dt.$$

Es bezeichne Z das parallele Vektorfeld längs c mit $Z(\tau) = X(\tau)$. Wenden wir obige Abschätzung auf $Y(t) := \operatorname{sn}_\rho(t)Z(t)/\operatorname{sn}_\rho(\tau)$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\partial_t}X, X\rangle(\tau) &\leq \frac{|X(\tau)|^2}{\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)}\int_0^\tau \operatorname{cn}_\rho^2(t) - \rho\operatorname{sn}_\rho^2(t)dt\\ &= \frac{|X(\tau)|^2}{\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)}\big(\operatorname{sn}_\rho(t)\operatorname{cn}_\rho(t)\big)\Big|_0^\tau = \frac{|X(\tau)|^2\operatorname{cn}_\rho(\tau)}{\operatorname{sn}_\rho(\tau)},\end{aligned}$$

denn $Y(0) = 0$, $Y(\tau) = X(\tau)$, $Y(t) \perp c'(t)$, $|Y(t)|^2 = \operatorname{sn}_\rho^2(t)|X(\tau)|^2/\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)$, $(\nabla_{\partial_t}Y)(t) = \operatorname{cn}_\rho(t)Z(t)/\operatorname{sn}_\rho(\tau)$ und $|(\nabla_{\partial_t}Y)(t)|^2 = \operatorname{cn}_\rho^2(t)|X(\tau)|^2/\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)$. Da $|X|' = |X|^{-1}\langle\nabla_{\partial_t}X, X\rangle$, folgt

$$\big(|X|'\operatorname{sn}_\rho - |X|\operatorname{cn}_\rho\big)(\tau) \leq 0$$

und somit

$$\big(|X|/\operatorname{sn}_\rho\big)'(\tau) = \operatorname{sn}_\rho^{-2}(\tau)\big(|X|'\operatorname{sn}_\rho - |X|\operatorname{cn}_\rho\big)(\tau) \leq 0.$$

Beachte, dass dies für alle kleineren τ richtig bleibt, es gilt daher

$$\big(|X|/\operatorname{sn}_\rho\big)' \leq 0 \qquad \text{auf } (0,\tau].$$

Somit ist $|X|/\operatorname{sn}_\rho$ auf dem Intervall $(0,\tau]$ monoton fallend. Zusammen mit (III.85) folgt

$$|X(t)| \leq |(\nabla_{\partial_t}X)(0)|\operatorname{sn}_\rho(t), \qquad t \in [0,\tau].$$

Da X auf $(0,b)$ keine Nullstelle besitzt, sehen wir nun, dass auch sn_ρ auf $(0,b)$ nicht verschwinden kann. Obige Überlegungen bleiben daher für $\tau = b$ richtig. □

III.6.12. Korollar (Rauch). *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\rho \leq K \leq \kappa$, $\rho,\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $x \in M$, $\xi \in T_xM$, $|\xi| = 1$ und $t > 0$ so, dass $\exp_x(t\xi)$ definiert ist. Im Fall $\kappa > 0$ sei darüber hinaus $t \leq \pi/\sqrt{\kappa}$. Dann gilt für alle $0 \neq w \in \xi^\perp \subseteq T_xM$*

$$\frac{\operatorname{sn}_\kappa(t)}{t} \leq \frac{|T_{t\xi}\exp_x \cdot w|}{|w|} \leq \frac{\operatorname{sn}_\rho(t)}{t}. \tag{III.86}$$

Beweis. Nach Korollar III.5.21 ist $X(t) := T_{t\xi}\exp_x \cdot(tw)$ ein Jacobifeld längs der Geodäten $c(t) := \exp_x(t\xi)$ mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(0) = w$. Aus Satz III.6.10 erhalten wir die Abschätzung nach unten in (III.86). Diese bleibt für kleinere t richtig und zeigt daher, dass kein $s \in (0,t)$ konjugiert zu 0 längs c ist, vgl. Korollar III.5.23. Somit ist Satz III.6.11 anwendbar und dieser liefert die Abschätzung nach oben in (III.86). □

III.7. Volumsvergleich. Wir wollen in diesem Abschnitt das Volumen von Sphären und Bällen in M mit dem Volumen von Sphären und Bällen in konstant gekrümmten Mannigfaltigkeiten vergleichen. Wir bezeichnen die sogenannten *Raumformen* mit

$$(\mathbb{M}^n_\kappa, g_\kappa) := \begin{cases} \text{runde Sphäre mit Schnittkrümmung } K = \kappa & \text{falls } \kappa > 0 \\ \text{Euklidische Ebene mit der Standardmetrik} & \text{falls } \kappa = 0 \\ \text{Hyperbolische Raum mit Schnittkrümmung } K = \kappa & \text{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

III.7.1. Bemerkung. Es sei $x \in \mathbb{M}^n_\kappa$ und $\exp_x : T_xM \to \mathbb{M}^n_\kappa$ die Exponentialabbildung. Weiters sei $r > 0$ und $r < \pi/\sqrt{\kappa}$ falls $\kappa > 0$. Nach Korollar III.5.21 und Beispiel III.5.26 (oder Korollar III.6.12) haben wir

$$\big(\exp_x|_{S_r(0)}\big)^* g_\kappa = \frac{\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}{r^2} g_0, \tag{III.87}$$

wobei g_0 die von g_κ auf $S_r(0) \subseteq T_xM$ induzierte Metrik bezeichnet. Die Sphäre $S^{\mathbb{M}^n_\kappa}_r(x)$ ist daher zur Euklidischen Sphären mit Radius $\mathrm{sn}_\kappa(r)$ isometrisch, denn Multiplikation mit $\mathrm{sn}_\kappa(r)/r$ liefert einen Diffeomorphismus $\varphi : T_xM \to T_xM$ mit $\varphi(S_r(0)) = S_{\mathrm{sn}_\kappa(r)}(0)$ und $\varphi^* g_0 = \frac{\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}{r^2} g_0$. Beachte, dass dies unabhängig vom Mittelpunkt $x \in \mathbb{M}^n_\kappa$ gilt. Für das Volumen der Sphären mit Radius r in $\mathbb{M}^n_\kappa$ folgt

$$\mathrm{Vol}(S^{\mathbb{M}^n_\kappa}_r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \mathrm{sn}^{n-1}_\kappa(r). \tag{III.88}$$

Mittels Lemma III.7.2 unten erhalten wir für das Volumen der abgeschlossenen Bälle mit Radius r in $\mathbb{M}^n_\kappa$,

$$\mathrm{Vol}(D^{\mathbb{M}^n_\kappa}_r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \mathrm{sn}^{n-1}_\kappa(\rho) d\rho. \tag{III.89}$$

III.7.2. Lemma. *Es sei M eine orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf $[a, b] \times M$. Für $t \in [a, b]$ bezeichne M_t die Teilmannigfaltigkeit $\{t\} \times M \subseteq [a, b] \times M$ versehen mit der von g induzierten Riemannschen Metrik. Weiters sei $|\partial_t| = 1$ und $\partial_t \perp M_t$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}\big([a, b] \times M\big) = \int_a^b \mathrm{Vol}(M_t) dt.$$

Beweis. Es bezeichne $\iota_t : M_t \to [a, b] \times M$ die kanonische Inklusion, $\iota_t(x) := (t, x)$. Bezeichnet $\mathrm{vol}_{[a,b]\times M}$ die Volumsform von g, dann gilt für die Volumsform von M_t,

$$\mathrm{vol}_{M_t} = \iota_t^* i_{\partial_t} \mathrm{vol}_{[a,b]\times M},$$

denn $|\partial_t| = 1$ und $\partial_t \perp M_t$. Aus dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\big([a,b]\times M\big) &= \int_{[a,b]\times M} \operatorname{vol}_{[a,b]\times M}\\ &= \int_a^b \Big(\int_{M_t} \iota_t^* i_{\partial_t} \operatorname{vol}_{[a,b]\times M}\Big)dt = \int_a^b \Big(\int_{M_t} \operatorname{vol}_{M_t}\Big)dt = \int_a^b \operatorname{Vol}(M_t)dt,\end{aligned}$$

wie behauptet. □

III.7.3. Lemma. *Es seien g und h zwei Riemannsche Metriken auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M mit $g \geq h$. Dann gilt für die assozierten Volumsformen* $\operatorname{vol}_g \geq \operatorname{vol}_h$.

Beweis. Es sei $x \in M$ und $A : T_xM \to T_xM$ eine orientierungsbewarende lineare Abbildung mit $h(X,Y) = g(AX,AY)$, $X,Y \in T_xM$. Nach Voraussetzung gilt $|AX|^2 = g(AX,AX) = h(X,X) \leq g(X,X) = |X|^2$. Somit sind alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner oder gleich 1 und damit $\det A \leq 1$. Ist $e_1,\dots,e_n$ eine positiv orientierte h-Orthonormalbasis, dann bildet $Ae_1,\dots,Ae_n$ eine positiv orientierte g-Orthonormalbasis und wir erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_h(e_1,\dots,e_n) = 1 &= \operatorname{vol}_g(Ae_1,\dots,Ae_n)\\ &= \det(A)\operatorname{vol}_g(e_1,\dots,e_n) \leq \operatorname{vol}_g(e_1,\dots,e_n),\end{aligned}$$

also $\operatorname{vol}_h \leq \operatorname{vol}_g$. □

III.7.4. Korollar (Günther)**.** *Es sei M eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $x \in M$ und $R > 0$, sodass die Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ auf dem Euklidischen Ball $B_R(0) \subseteq T_xM$ ein Diffeomorphismus ist, und $0 < r < R$. Für das Volumen der Sphäre bzw. des abgeschlossnen Balls in M mit Radius r und Mittelpunkt x gilt dann, vgl.* (III.88) *bzw.* (III.89)*,*

$$\operatorname{vol}(S_r(x)) \geq \operatorname{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{vol}(D_r(x)) \geq \operatorname{vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}).$$

Beweis. Es bezeichne g die Riemannsche Metrik auf M. Für die Riemannmetrik $\tilde g := (\exp_x|_{S_r(0)})^*g$ auf $S_r(0) \subseteq T_xM$ gilt nach Korollar III.6.12

$$\tilde g \geq \frac{\operatorname{sn}_\kappa^2(r)}{r^2} g_0 =: \tilde g_\kappa,$$

wobei g_0 die von g auf T_xM induzierte Euklidische Metrik bezeichnet. Für die damit assozierten Volumsformen auf $S_r(0)$ folgt aus Lemma III.7.3

$$\operatorname{vol}_{\tilde g} \geq \operatorname{vol}_{\tilde g_\kappa}.$$

Nach Konstruktion ist $(S_r(0), \tilde g) \cong (S_r(x), g)$, und nach Bemerkung III.7.1 auch $(S_r(0), \tilde g_\kappa) \cong (S_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}, g_\kappa)$. Wir erhalten somit

$$\operatorname{Vol}(S_r(x)) = \operatorname{Vol}(S_r(0),\tilde g) \geq \operatorname{Vol}(S_r(0),\tilde g_\kappa) = \operatorname{Vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}).$$

Die Abschätzung für das Volumen das abgeschlossenen Balls folgt nun aus Lemma III.7.2, denn das radiale Vektorfeld ∂_r ist normiert und steht orthogonal auf $S_r(x)$. □

III.7.5. Bemerkung. Völlig analog lassen sich unter der Voraussetzung $\rho \leq K$ die Abschätzungen

$$\operatorname{vol}(S_r(x)) \leq \operatorname{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho}) \quad \text{und} \quad \operatorname{vol}(D_r(x)) \leq \operatorname{vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\rho}).$$

herleiten. Wir werden jedoch ein stärkeres Resultat zeigen, siehe Satz III.7.8 unten.

III.7.6. Lemma. *Es sei $f : (0, b) \to \mathbb{R}^+$ glatt und $\kappa \in \mathbb{R}$, sodass*

$$f'' + \kappa f \leq 0,$$

$\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ und $\lim_{t\to 0} f'(t) = 1$. Dann hat sn_κ auf dem Intervall $(0, b)$ keine Nullstelle, dh. im Fall $\kappa > 0$ muss $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ gelten, $f/\operatorname{sn}_\kappa$ ist monoton fallend auf $(0, b)$ und $\lim_{t\to 0}(f/\operatorname{sn}_\kappa)(t) = 1$. Insbesondere gilt daher $f \leq \operatorname{sn}_\kappa$ auf $(0, b)$.

Beweis. Aus $\operatorname{sn}_\kappa'' = -\kappa \operatorname{sn}_\kappa$ und $\operatorname{sn}_\kappa \geq 0$ erhalten wir

$$\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big)' = \big(f'' + \kappa f\big) \operatorname{sn}_\kappa \leq 0,$$

also ist $f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'$ monoton fallend. Da $\lim_{t\to 0}\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big)(t) = 0$, folgt

$$f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa' \leq 0 \qquad \text{auf } (0, b).$$

Sei nun $0 < \tau < b$ mit $\operatorname{sn}_\kappa |_{(0,\tau)} > 0$. Aus der vorangehenden Ungleichung folgt

$$\big(f/\operatorname{sn}_\kappa\big)' = \operatorname{sn}_\kappa^{-2}\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big) \leq 0,$$

also ist $f/\operatorname{sn}_\kappa$ auf $(0, \tau)$ monoton fallend. Da auch

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\operatorname{sn}_\kappa(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{\operatorname{sn}_\kappa'(t)} = \lim_{t\to 0} f'(t) = 1,$$

erhalten wir $f/\operatorname{sn}_\kappa \leq 1$, dh. $f \leq \operatorname{sn}_\kappa$, auf $(0, \tau)$. Daraus folgt nun auch, dass sn_κ auf $(0, b)$ nicht verschwinden kann, denn f wurde positiv vorausgesetzt. Somit bleiben obige Überlegungen für $\tau = b$ richtig und das Lemma ist bewiesen. □

III.7.7. Lemma (Heintze und Karcher)**.** *Es sei M eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit, c eine Geodäte in M und $X_1, \dots, X_{n-1}$ Jacobifelder längs c mit $X_i \perp c'$ und $X_i(0) = 0$. Dann genügt die Funktion*

$$f(t) := \operatorname{vol}\big(c'(t), X_1(t), \dots, X_{n-1}(t)\big)^{1/(n-1)}$$

der Differentialungleichung

$$f'' + \frac{\operatorname{Ric}(c', c')}{n-1} f \leq 0,$$

auf jedem Intervall der Form $(0, b)$ auf dem f definiert und positiv ist.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**20**, Beweis von Theorem III.4.3], siehe auch [**21**, Section 7.1] oder Es sei $b > 0$ so, dass f auf $(0, b)$ positiv ist. Auf diesem Intervall sind die Jacobifelder X_i daher linear unabhängig. Da $\nabla_{\partial_t} X_i$ normal auf c steht, können wir eine Kurve von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen $\Lambda(t)$ wie folgt definieren $\nabla_{\partial_t} X_i = \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_i^j X_j$. Dann gilt

$$f' = \frac{f}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\operatorname{vol}(c', X_1, \dots, \nabla_{\partial_t} X_i, \dots, X_{n-1})}{\operatorname{vol}(c', X_1, \dots, X_{n-1})} = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)}{n-1} f,$$

und somit

$$f'' = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)'}{n-1} f + \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)^2}{(n-1)^2} f.$$

Wir definieren eine weitere Kurve von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen $\mathcal{R}(t)$ durch $R_{X_i,c'} c' = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{R}_i^j X_j$. Beachte $\operatorname{tr}(\mathcal{R}) = \operatorname{Ric}(c', c')$. Aus der Jacobigleichung für X_i erhalten wir

$$\Lambda' + \Lambda^2 + \mathcal{R} = 0.$$

Anwenden der Spur liefert

$$\operatorname{tr}(\Lambda)' + \operatorname{tr}(\Lambda^2) + \operatorname{Ric}(c', c') = 0,$$

und daher

$$f'' + \frac{\operatorname{Ric}(c', c')}{n-1} f = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)^2 - (n-1)\operatorname{tr}(\Lambda^2)}{(n-1)^2} f. \tag{III.90}$$

Beachte, dass $\operatorname{tr}(A^* B)$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der Matrizen definiert, die Cauchy–Schwarz Ungleichung lautet $\operatorname{tr}(A^* B)^2 \le \operatorname{tr}(A^* A) \operatorname{tr}(B^* B)$. Ist A die Einheitsmatrix so erhalten wir

$$\operatorname{tr}(B)^2 \le (n-1) \operatorname{tr}(B^* B). \tag{III.91}$$

Wir werden unten zeigen, dass zu jedem $t \in (0, b)$ eine invertierbare Matrix S existiert, sodass $S^{-1} \Lambda(t) S$ symmetrisch ist. Da die rechte Seite von (III.90) invariant unter Konjugation ist, folgt der Satz dann durch Kombination von (III.90) mit (III.91).

Aufgrund der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors gilt

$$\begin{aligned}\big(\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j\rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j\rangle\big)' &= \langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X_i, X_j\rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X_j\rangle \\ &= -\langle R_{X_i,c'} c', X_j\rangle + \langle X_i, R_{X_j,c'} c'\rangle = 0,\end{aligned}$$

also ist der Ausdruck $\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j\rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j\rangle$ konstant. Da $X_i(0) = 0$, folgt

$$\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j\rangle = \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j\rangle. \tag{III.92}$$

Sei nun $t \in (0, b)$ fix und $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $c'(t)^\perp$. Weiters bezeichne G die durch $X_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} G_i^j Z_j$ definierte $(n-1) \times (n-1)$ Matrix. Aus (III.92) folgt $\Lambda(t) G G^* = G G^* \Lambda(t)^*$, für die symmetrische Matrix $S := (G G^*)^{1/2}$ gilt daher $S^{-1} \Lambda(t) S = (S^{-1} \Lambda(t) S)^*$. □

III.7.8. Satz (Bishop)**.** *Es sei M eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit Riccikrümmung* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\rho$. *Weiters sei $x \in M$ und $R > 0$, sodass die Exponentialabbildung* $\exp_x : T_xM \to M$ *auf dem Euklidischen Ball $B_R(0) \subseteq T_xM$ ein Diffeomorphismus ist. Für das Volumen der Sphäre bzw. des abgeschlossnen Balls in M mit Radius* $0 < r < R$ *und Mittelpunkt x gilt dann, vgl.* (III.88) *bzw.* (III.89),

$$\mathrm{vol}(S_r(x)) \leq \mathrm{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{vol}(D_r(x)) \leq \mathrm{vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\rho}).$$

Beweis. Es sei $\xi \in T_xM$ mit $|\xi| = 1$ und $w_1, \dots, w_{n-1}$ eine positiv positiv orientierte Orthonormalbasis von $\xi^\perp \subseteq T_xM$. Dann ist $c(t) := \exp_x(t\xi)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $X_i(t) := T_{t\xi}\exp_x \cdot tw_i$ Jacobifelder längs c mit $X_i(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X_i)(0) = w_i$. Solange

$$f(t) := \mathrm{vol}(c'(t), X_1(t), \dots, X_{n-1}(t))^{1/(n-1)}$$

positiv ist gilt nach Lemma III.7.7 und der Abschätzung für die Riccikrümmung

$$f'' + \rho f \leq f'' + \frac{\mathrm{Ric}(c', c')}{n-1} f \leq 0.$$

Weiters ist $f(0) = 0$ und $\lim_{t\to 0} f'(t) = 1$. Aus Lemma III.7.6 folgt daher $f \leq \mathrm{sn}_\rho$.

Betrachte nun die beiden Metrik $\tilde g := (\exp_x^M)^* g$ und $\tilde g_\rho := \big(\exp_x^{\mathbb{M}^n_\rho}\big)^* g_\rho$ auf $T_xM = T_x\mathbb{M}^n_\rho$. Nach obigen Betrachtungen folgt $\mathrm{vol}_{\tilde g}^{S_r(0)} \leq \mathrm{vol}_{\tilde g_\rho}^{S_r(0)}$ für die induzierten Volumsformen auf den Euklidischen Sphären $S_r(0) \subseteq T_xM$. Mittels Integration erhalten wir $\mathrm{vol}(S_r^M(x)) \leq \mathrm{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho})$ und aus Lemma III.7.2 dann auch die zweite Abschätzung. □

III.8. Distanzvergleich. In diesem Abschnitt werden wir zwei Versionen des Satzes von Toponogov beweisen, siehe Satz III.8.11 und Korollar III.8.12 unten. Diese Resultate vergleichen Seitenlängen und Winkel von Dreiecken in M mit entsprechenden Seitenlängen und Winkeln von Vergleichsdreiecken in den konstant gekrümmten Raumformen $\mathbb{M}^n_\kappa$ unter der Voraussetzung, dass die Schnittkrümmung von M nach unten durch κ beschränkt ist. Der Beweis den wir hier wiedergeben werden geht auf Karcher zurück, siehe [**22**] oder [**19**, Section 11.2].

Unter einem *Dreieck in M* verstehen wir drei Punkte die durch drei minmale Geodäten miteinander verbunden sind. Unter einem *Vergleichsdreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$* verstehen wir jedes Dreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$, das die gleichen Seitenlängen besitzt. Unter einem *Gelenk in M* verstehen wir drei Punkte A, C, B zusammen mit zwei minimalen Geodäten (den Schenkeln) von C nach A bzw. B. Unter dem Winkel eines Gelenks verstehen wir den Winkel den die beiden Schenkel bei C einschließen. Unter einem *Vergleichsgelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$* verstehen wir jedes Gelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$, das den gleichen Winkel einschließt und die gleichen Schenkellängen besitzt.

III.8.1. Lemma (Existenz von Vergleichsdreiecken und Gelenken)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$,*

$\kappa \in \mathbb{R}$. Dann existiert zu jedem Dreieck in M ein Vergleichsdreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$, und zu jedem Gelenk in M existiert ein Vergleichsgelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$.

Beweis. Betrachte ein Gelenk in M mit Eckpunkten A, B, C, Schenkellängen a, b und Winkel γ. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\tilde{C} \in \mathbb{M}^n_\kappa$ und zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ die bei $\tilde{C}$ einen Winkel γ einschließen, dh. $\langle\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\beta}'(0)\rangle = \cos\gamma$. Setzen wir $\tilde{A} := \tilde{\beta}(b)$ und $\tilde{B} := \tilde{\alpha}(a)$, dann bilden die drei Punkte $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B}$ zusammen mit diesen Geodäten das gesuchte Vergleichsgelenk, denn
$$d(\tilde{C}, \tilde{A}) = b \quad \text{und} \quad d(\tilde{C}, \tilde{B}) = a.$$
Für $\kappa \leq 0$ sind die letzten beiden Relationen offensichtlich, da jede Geodäte in $\mathbb{M}^n_\kappa$ minimal ist. Im Fall $\kappa > 0$ folgen sie aus dem Satz von Myers, siehe Satz III.5.11, denn dieser impliziert $a, b \leq \operatorname{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa} = \operatorname{diam}(\mathbb{M}^n_\kappa)$.

Um auch die Existenz von Vergleichsdreiecken zu zeigen, seien nun A, B, C die drei Eckpunkte eines Dreiecks in M mit Seitenlängen a, b, c und o.B.d.A. $a \geq b$. Wie im ersten Teil des Beweises erhalten wir zwei Punkte $\tilde{C}$ und $\tilde{B}$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$ mit $d(\tilde{C}, \tilde{B}) = a$, wobei im Fall $\kappa > 0$ wieder der Satz von Myers eingeht. Es bezeichne $S \subseteq \mathbb{M}^n_\kappa$ die Sphäre mit Mittelpunkt $\tilde{C}$ und Radius b. Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass $\tilde{A} \in S$ mit $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = c$ existiert. Da $a \geq b$ schneidet S die minimale Geodäte von $\tilde{B}$ nach $\tilde{C}$, wir erhalten somit Punkte auf S, die von $\tilde{B}$ einen Abstand kleiner als c haben, denn die drei Seitenlängen genügen der Dreiecksungleichung,
$$a = d(C, B) \leq d(C, A) + d(A, B) = b + c.$$
Aus Satz III.8.11 unten folgt, dass es auf S auch Punkte gibt, die von $\tilde{B}$ eine Abstand größer als c haben. Aus Stetigkeitsgründen muss es daher auch einen Punkt $\tilde{A} \in S$ geben, der $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = c$ erfüllt. □

III.8.2. Bemerkung. Vergleichsgelenke sind im wesentlichen eindeutig, dh. je zwei Gelenke in $\mathbb{M}^n_\kappa$ mit gleichem Winkel und gleichen Schenkellängen können durch eine Isometrie von $\mathbb{M}^n_\kappa$ aufeinander abgebildet werden. Für Vergleichsdreiecke ist die Situation ein wenig komplizierter. Zu zwei Dreiecken mit gleichen Seitenlägen in $\mathbb{M}^n_\kappa$ existiert zwar eine Isometrie, die die Eckpunkte aufeinander abbildet, ist jedoch $\kappa > 0$ und ist eine Seitelänge gleich $\pi/\sqrt{\kappa}$, dann kann die Isometrie im allgemeinen nicht so gewählt werden, dass auch alle Seiten aufeinander abgebildet werden.

Es wird sich als hilfreich erweisen die Distanz mit folgender Funktion zu modifizieren:
$$\operatorname{md}_\kappa(r) := \int_0^r \operatorname{sn}_\kappa(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}\big(1 - \operatorname{cn}_\kappa(r)\big) & \text{falls } \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2}r^2 & \text{falls } \kappa = 0. \end{cases} \tag{III.93}$$
Beachte die offensichtlichen Relationen
$$\operatorname{md}_\kappa' = \operatorname{sn}_\kappa \quad \text{und} \quad \operatorname{md}_\kappa'' + \kappa \operatorname{md}_\kappa = \operatorname{cn}_\kappa + \kappa \operatorname{md}_\kappa = 1. \tag{III.94}$$

III.8.3. Proposition (Kosinussatz). *Sind a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$ und bezeichnet γ den der Seite c gegenüberliegenden Winkel, dann gilt*

$$\mathrm{md}_\kappa(c) = \mathrm{md}_\kappa(a-b) + \mathrm{sn}_\kappa(a)\,\mathrm{sn}_\kappa(b)\big(1-\cos\gamma\big). \tag{III.95}$$

In anderen Worten,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \\ \cos(\sqrt{\kappa}c) &= \cos(\sqrt{\kappa}a)\cos(\sqrt{\kappa}b)+\sin(\sqrt{\kappa}a)\sin(\sqrt{\kappa}b)\cos\gamma \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}c) &= \cosh(\sqrt{|\kappa|}a)\cosh(\sqrt{|\kappa|}b)-\sinh(\sqrt{|\kappa|}a)\sinh(\sqrt{|\kappa|}b)\cos\gamma \end{aligned} \tag{III.96}$$

in den Fällen $\kappa=0$, $\kappa>0$ bzw. $\kappa<0$.

Beweis. Es bezeichnen A, B und C die Eckpunkte des Dreiecks, die den Seiten a, b, c gegenüber liegen. Weiters sei $r:\mathbb{M}^n_\kappa\to\mathbb{R}$, $r(x):=d(A,x)$ und

$$f:\mathbb{M}^n_\kappa\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\mathrm{md}_\kappa(r(x))=\mathrm{md}_\kappa(d(A,x)).$$

Beachte, dass f auf ganz $\mathbb{M}^n_\kappa$ glatt ist. Es gilt

$$df=(\mathrm{md}'_\kappa\circ r)dr=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)dr \tag{III.97}$$

und daher, siehe auch (III.94),

$$\begin{aligned} H(f)=\nabla df=\nabla\big((\mathrm{sn}_\kappa\circ r)dr\big)&=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)\nabla dr+(\mathrm{cn}_\kappa\circ r)dr\otimes dr \\ &=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)H(r)+(\mathrm{cn}_\kappa\circ r)dr\otimes dr=(\mathrm{cn}_\kappa\circ r)g=(1-\kappa f)g. \end{aligned} \tag{III.98}$$

Dabei haben wir

$$H(r)=\frac{\mathrm{cn}_\kappa\circ r}{\mathrm{sn}_\kappa\circ r}\big(g-dr\otimes dr\big)$$

verwendet, was sofort aus Proposition III.6.1 und Beispiel III.5.26 folgt.

Sei nun σ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, $|\sigma'|=1$, von $\sigma(0)=C$ nach $\sigma(a)=B$. Die Funktion

$$\varphi(t):=f(\sigma(t))=\mathrm{md}_\kappa(d(A,\sigma(t)))$$

erfüllt $\varphi'=df(\sigma')$ und wegen (III.98) auch

$$\begin{aligned}\varphi''&=(\nabla df)(\sigma',\sigma')-df(\nabla_{\partial_t}\sigma') \\ &=H(f)(\sigma',\sigma')=\big(1-\kappa(f\circ\sigma)\big)g(\sigma',\sigma')=1-\kappa\varphi,\end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial_t}\sigma'=0$ und $|\sigma'|=1$. Dieses φ genügt daher der Differentialgleichung

$$\varphi''+\kappa\varphi=1.$$

Nach (III.94) stellt md_κ eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung dar. Da sn_κ und cn_κ eine Basis der Lösungen des homogenen Systems $\varphi''+\kappa\varphi=0$ bilden, muss φ die Gestalt

$$\varphi(t)=\mathrm{md}_\kappa(t)+C_0\,\mathrm{cn}_\kappa(t)+C_1\,\mathrm{sn}_\kappa(t)$$

haben, mit Integrationskonstanten

$$C_0=\varphi(0)=\mathrm{md}_\kappa(d(A,\sigma(0)))=\mathrm{md}_\kappa(d(A,C))=\mathrm{md}_\kappa(b)$$

und, siehe (III.97),

$$\begin{aligned}C_1 = \varphi'(0) = df(\sigma'(0)) &= \operatorname{sn}_\kappa(r(\sigma(0)))dr(\sigma'(0)) = \operatorname{sn}_\kappa(b)dr(\sigma'(0)) \\ &= \operatorname{sn}_\kappa(b)\langle\nabla r, \sigma'(0)\rangle = \operatorname{sn}_\kappa(b)|\nabla r||\sigma'(0)|\cos(\pi-\gamma) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Da $\varphi(a) = \operatorname{md}_\kappa(d(A,\sigma(a))) = \operatorname{md}_\kappa(d(A,B)) = \operatorname{md}_\kappa(c)$ erhalten wir somit

$$\operatorname{md}_\kappa(c) = \operatorname{md}_\kappa(a) + \operatorname{cn}_\kappa(a)\operatorname{md}_\kappa(b) - \operatorname{sn}_\kappa(a)\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma \tag{III.99}$$

Mit (III.93) folgt daraus sofort (III.96). Kombinieren wir (III.99) mit

$$\operatorname{md}_\kappa(a-b) = \operatorname{md}_\kappa(a) + \operatorname{cn}_\kappa(a)\operatorname{md}_\kappa(b) - \operatorname{sn}_\kappa(a)\operatorname{sn}_\kappa(b) \tag{III.100}$$

dann folgt auch (III.95). Um die letzte Gleichung zu verifizieren genügt es zu beobachten, dass die Funktion $a \mapsto \operatorname{md}_\kappa(a-b) - \operatorname{md}_\kappa(a)$ der Differentialgleichung $\varphi'' + \kappa\varphi = 0$ genügt und daher von der Form $a \mapsto D_0 \operatorname{cn}_\kappa(a) + D_1 \operatorname{sn}_\kappa(a)$ sein muss. Betrachten wir Wert und Ableitung bei $a = 0$ erhalten wir $D_0 = \operatorname{md}_\kappa(-b) = \operatorname{md}_\kappa(b)$ und $D_1 = \operatorname{sn}_\kappa(-b) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)$, also (III.100). □

III.8.4. Definition ([**19**, Section 9.3])**.** Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $x \in M$ und $B \in S^2T_x^*M$ eine symmetrische Bilinearform. Wir schreiben $H(f)(x) \geq B$ *im Sinn der Träger,* falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lokal um x definierte glatte Funktion f_ε existiert für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(a) $f_\varepsilon(x) = f(x)$
(b) $f_\varepsilon \leq f$ in einer Umgebung von x
(c) $H(f_\varepsilon)(x) \geq B - \varepsilon g_x$
Analog schreiben wir $H(f) \leq B$ falls $H(-f) \geq -B$.

III.8.5. Bemerkung. Ist $H(f)(x) \geq B$ im Sinn der Träger, und $\lambda > 0$, dann gilt auch $H(\lambda f)(x) \geq \lambda B$ im Sinn der Träger. Gilt $H(f_1)(x) \geq B_1$ und $H(f_2)(x) \geq B_2$ im Sinn der Träger, dann auch $H(f_1 + f_2)(x) \geq B_1 + B_2$.

III.8.6. Bemerkung. Ist f eine C^2 Funktion, und bezeichnet B die Hessesche von f bei x, dann gilt $B \leq H(f)(x) \leq B$ im Sinn der Träger.

III.8.7. Lemma. *Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $B \in \Gamma(S^2T^*M)$ und $H(f) \geq B$ im Sinn der Träger, dh. $H(f)(x) \geq B(x)$, für alle $x \in M$. Für jede Geodäte σ in M gilt dann $(f \circ \sigma)'' \geq B(\sigma', \sigma')$ im Sinn der Träger.*

Beweis. Sind f_ε wie in Definition III.8.4, dann gilt

$$\begin{aligned}(f_\varepsilon \circ \sigma)'' = \nabla_{\partial_t}(df_\varepsilon(\sigma')) &= (\nabla df_\varepsilon)(\sigma', \sigma') - df_\varepsilon(\nabla_{\partial_t}\sigma') \\ &= H(f_\varepsilon)(\sigma', \sigma') \geq B(\sigma', \sigma') - \varepsilon|\sigma'|^2,\end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen die Geodätengleichung $\nabla_{\partial_t}\sigma' = 0$ eingegangen ist. Dies zeigt, dass $f_\varepsilon \circ \sigma$ geeignete Trägerfunktionen für $f \circ \sigma$ bilden. □

III.8.8. Bemerkung. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ stetig und $H(f) \geq 0$ im Sinn der Träger, dann ist f konvex, dh. konvex entlang jeder Geodäten in M. Dies folgt aus Lemma III.8.7, denn eine stetige Funktion $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $\psi'' \geq 0$ im Sinn der Träger gilt, muss konvex sein.

III.8.9. Lemma. *Es sei $\psi : [0,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\psi'' + \kappa\psi \geq 0$ im Sinn der Träger, $\kappa \in \mathbb{R}$. Ist $\kappa > 0$ dann setzen wir auch $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ voraus. Weiters sei $\psi(0) = 0$ und es existiere $\psi'(0) \geq 0$. Dann gilt $\psi \geq 0$ auf ganz $[0,b]$.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor und nehmen an es existiert $0 < b_0 < b$ mit $\psi(b_0) < 0$. Durch Addition eines kleinen positiven Vielfachen von md_κ dürfen wir o.B.d.A. $\psi'' + \kappa\psi > 0$ voraussetzen, denn $\mathrm{md}_\kappa'' + \kappa \,\mathrm{md}_\kappa = 1$ und $\mathrm{md}_\kappa(0) = 0 = \mathrm{md}_\kappa'(0)$. Durch Addition eines kleinen positiven Vielfachen von sn_κ können wir weiters $\psi'(0) > 0$ erreichen, denn $\mathrm{sn}_\kappa'' + \kappa\,\mathrm{sn}_\kappa = 0$, $\mathrm{sn}_\kappa(0) = 0$ und $\mathrm{sn}_\kappa'(0) = 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$ so, dass die Funktion $s(t) := \mathrm{sn}_\kappa(t + \varepsilon)$ auf $[0, b_0]$ strikt positiv ist, etwa $\varepsilon := (b - b_0)/2$. Dann gilt $(\psi/s)'(0) = \psi'(0)/s(0) > 0$ und daher

$$(\psi/s)(t) > (\psi/s)(0) \geq 0,$$

für hinreichend kleine $t > 0$. Da $\psi(b_0) < 0$, existiert eine Stelle $t_0 \in (0, b_0)$ bei der die Funktion ψ/s ein lokales Maximum besitzt und $\psi(t_0) > 0$ gilt.

Da $\psi'' + \kappa\psi > 0$ im Sinn der Träger, existiert eine glatte Funktion ϕ mit $\phi \leq \psi$ in einer Umgebung von t_0, $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ und

$$\phi''(t_0) + \kappa\psi(t_0) > 0. \tag{III.101}$$

Auch die Funktion ϕ/s besitzt bei t_0 ein lokales Maximum, denn $\phi(t)/s(t) \leq \psi(t)/s(t) \leq \psi(t_0)/s(t_0) = \phi(t_0)/s(t_0)$, für t hinreichend nahe bei t_0. Somit gilt $(\phi/s)'(t_0) = 0$ und wegen $s'' + \kappa s = 0$ auch

$$0 \geq (\phi/s)''(t_0) = \frac{\phi'' s - \phi s''}{s^2}(t_0) = \frac{\phi'' + \kappa\phi}{s}(t_0),$$

ein Widerspruch zu (III.101). Somit kann ψ auf $[0,b]$ keine negativen Werte annehmen. Im letzten Schritt sind wir [**19**, Section 11.2, Seite 345] gefolgt. □

III.8.10. Lemma. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $A \in M$, $r(x) := d(A,x)$ und*

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \mathrm{md}_\kappa(r(x)) = \mathrm{md}_\kappa(d(A,x)).$$

Dann gilt $H(f) \leq (1 - \kappa f)g$ auf ganz M im Sinne der Träger.

Beweis. Es ist also $H(f)(x) \leq (1 - \kappa f(x))g_x$ zu zeigen, für jedes $x \in M$. O.B.d.A. dürfen wir $x \neq A$ annehmen, denn $f(A) = 0$ und $H(f)(A) = 0$. Wir wählen eine nach Bogenlänge parametrisierte minimale Geodäte $\sigma : [0,\rho] \to M$ von $\sigma(0) = A$ nach $\sigma(\rho) = x$, dh. $\rho = r(x) = d(A,x) > 0$. Wir setzen zunächst voraus, dass die Distanzfunktion r bei x glatt ist. Beachte, dass im Fall $\kappa > 0$ nach dem Satz von Myers, siehe Satz III.5.11, auch $\rho < \mathrm{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$

gilt. Ist X ein Jacobifeld längs σ, dass orthogonal auf σ steht, dann folgt aus Proposition III.6.1

$$H(r)\big(X(t),X(t)\big)=\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t).$$

Weiters ist $df=d(\mathrm{md}_\kappa\circ r)=(\mathrm{md}_\kappa'\circ r)dr=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)dr$, also $H(f)=\nabla(df)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)H(r)+(\mathrm{sn}_\kappa'\circ r)dr\otimes dr$ und somit

$$H(f)\big(X(t),X(t)\big)=\mathrm{sn}_\kappa(t)\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t),$$

denn $dr(X)=\langle\operatorname{grad}r,X\rangle=\langle\sigma',X\rangle=0$. Im Beweis von Satz III.6.11 haben wir die Abschätzung

$$\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t)\leq\frac{\mathrm{cn}_\kappa(t)}{\mathrm{sn}_\kappa(t)}|X(t)|^2$$

hergeleitet, wir erhalten somit

$$H(f)\big(X(t),X(t)\big)\leq\mathrm{cn}_\kappa(t)|X(t)|^2. \tag{III.102}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}H(f)(\sigma'(t),-)=\nabla_{\partial_t}df=\nabla_{\partial_t}(\mathrm{sn}_\kappa(t)dr)&\\=\mathrm{sn}_\kappa'(t)dr+\mathrm{sn}_\kappa(t)\nabla_{\partial_t}dr=\mathrm{cn}_\kappa(t)g(\sigma'(t),-)&\end{aligned}$$

denn $\sigma'(t)=\operatorname{grad}_{\sigma(t)}(r)$ und $\nabla_{\partial_t}dr=0$ da $\nabla_{\partial_t}\sigma'=0$. Zusammen mit (III.102) erhalten wir

$$H(f)_x(w,w)\leq\mathrm{cn}_\kappa(r(x))|w|^2=(1-\kappa f(x))|w|^2,$$

für alle $w\in T_xM$, siehe auch (III.94).

Ist die Distanzfunktion r bei x nicht glatt, dann betrachten wir zu jedem $0<\varepsilon<r(x)$ die Funktion $r_\varepsilon:M\to\mathbb{R}$, $r_\varepsilon(y):=\varepsilon+d(\sigma(\varepsilon),y)$. Dann gilt $r_\varepsilon(x)=r(x)$, und wegen der Dreiecksungleichung auch $r\leq r_\varepsilon$ auf ganz M. Darüberhinaus ist r_ε in einer Umgebung von x glatt. Betrachten wir nun $f_\varepsilon(y):=\mathrm{md}_\kappa(r_\varepsilon(y))=\mathrm{md}_\kappa(\varepsilon+d(\sigma(\varepsilon),y))$, dann ist f_ε in einer Umgebung von x glatt, es gilt $f_\varepsilon(x)=f(x)$ und $f\leq f_\varepsilon$ in einer Umgebung von x wegen der Monotonie von md_κ. Um die Hessesche von f_ε abzuschätzen, betrachten wir $\tilde r_\varepsilon(y):=d(\sigma(\varepsilon),y)$ und $\tilde f_\varepsilon(y):=\mathrm{md}_\kappa(\tilde r_\varepsilon(y))=\mathrm{md}_\kappa(d(\sigma(\varepsilon),y))$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$H(\tilde f_\varepsilon)(x)\leq(1-\kappa\tilde f_\varepsilon(x))g_x,$$

denn $\tilde r_\varepsilon$ ist bei x glatt. Weiters gilt

$$H(f_\varepsilon)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r_\varepsilon)H(r_\varepsilon)+(\mathrm{cn}_\kappa\circ r_\varepsilon)dr_\varepsilon\otimes dr_\varepsilon$$

und analog

$$H(\tilde f_\varepsilon)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ\tilde r_\varepsilon)H(\tilde r_\varepsilon)+(\mathrm{cn}_\kappa\circ\tilde r_\varepsilon)d\tilde r_\varepsilon\otimes d\tilde r_\varepsilon.$$

Da sich r_ε und $\tilde{r}_\varepsilon$ nur um eine Konstante unterscheiden ist $dr_\varepsilon = d\tilde{r}_\varepsilon$ und $H(r_\varepsilon) = H(\tilde{r}_\varepsilon)$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} H(f_\varepsilon)(x) &= \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))} H(\tilde{f}_\varepsilon)(x) \\ &\qquad + \Big(\mathrm{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\,\mathrm{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x \\ &\le \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\big(1 - \kappa \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\ &\qquad + \Big(\mathrm{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\,\mathrm{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x \\ &= \big(1 - \kappa f(x)\big) g_x + \kappa\big(f(x) - \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\ &\qquad + \Big(\frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))} - 1\Big)\big(1 - \kappa \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\ &\qquad + \Big(\mathrm{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\mathrm{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\,\mathrm{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren alle bis auf den ersten Term gegen Null, und wir erhalten $H(f)(x) \le (1 - \kappa f(x)) g_x$ im Sinn der Träger, bei jedem $x \in M$. $\square$

III.8.11. Satz (Toponogov, Gelenkversion)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \ge \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Bezeichnen A, C, B die Eckpunkte eines Gelenks in M und $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B}$ die Eckpunkte eines Vergleichsgelenks in $\mathbb{M}^n_\kappa$, dann gilt $d(A, B) \le d(\tilde{A}, \tilde{B})$.*

Beweis. Es sei σ nach Bogenlänge parametriesierte Geodäte in M, $|\sigma'| = 1$, von $\sigma(0) = C$ nach $\sigma(a) = B$, und

$$\varphi(t) := \mathrm{md}_\kappa(d(A, \sigma(t))).$$

Analog sei $\tilde{\sigma}$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte in $\mathbb{M}^n_\kappa$, $|\tilde{\sigma}'| = 1$ von $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{C}$ nach $\tilde{\sigma}(a) = \tilde{B}$, und

$$\tilde{\varphi}(t) := \mathrm{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{\sigma}(t))).$$

Es genügt zu zeigen, dass die Differenz

$$\psi(t) := \tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)$$

nicht negativ wird, denn dann folgt $0 \le \psi(a) = \tilde{\varphi}(a) - \varphi(a) = \mathrm{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{\sigma}(a))) - \mathrm{md}_\kappa(d(A, \sigma(a))) = \mathrm{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{B})) - \mathrm{md}_\kappa(d(A, B))$, und dann $d(A, B) \le d(\tilde{A}, \tilde{B})$ wegen der Monotonie von md_κ.

Im Beweis von Proposition III.8.3 haben wir $\tilde{\varphi}'' + \kappa\tilde{\varphi} = 1$ gezeigt. Aus Lemma III.8.10 und Lemma III.8.7 folgt $\varphi'' + \kappa\varphi \le 1$ im Sinn der Träger. Für die Differenz $\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$ erhalten wir daher, vgl. Bemerkung III.8.5,

$$\psi'' + \kappa\psi \ge 0 \quad \text{im Sinn der Träger.}$$

Weiters gilt

$$\psi(0) = \tilde{\varphi}(0) - \varphi(0) = \mathrm{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{C})) - \mathrm{md}_\kappa(d(A, C)) = 0$$

und, wie im Beweis von Proposition III.8.3,

$$\psi'(0) = \tilde{\varphi}'(0) - \varphi'(0) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma + \operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma = 0. \tag{III.103}$$

Der Satz folgt nun aus Lemma III.8.9. Die Relation (III.103) gilt zunächst nur, falls φ und $\tilde{\varphi}$ bei 0 glatt sind. Im allgemeinen Fall können wir durch eine kleine Modifikation von A erreichen, dass dies zutrifft, der Satz folgt dann aus Stetigkeitsgründen. □

III.8.12. Korollar (Toponogov, Dreiecksversion)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$. Betrachten wir ein beliebiges Dreieck in M, dann sind seine inneren Winkel mindestens so gross wie die entsprechenden inneren Winkel jedes Vergleichsdreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$.*

Beweis. Es bezeichnen A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks in M und γ den Winkel bei C. Weiters seien $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ die Eckpunkte eines Vergleichsdreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$ und $\bar{\gamma}$ der Winkel bei $\bar{C}$. Aus Symmetriegründen genügt es $\bar{\gamma} \leq \gamma$ zu zeigen. Wir fassen (A, C, B) als Gelenk auf und wählen ein Vergleichsgelenk $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B})$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$. Nach Satz III.8.11 gilt $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B) \leq d(\tilde{A}, \tilde{B})$. Aus (III.95) folgt daher $\bar{\gamma} \leq \tilde{\gamma} = \gamma$. □

III.9. Aufgaben zu Kapitel III.

45. Aufgabe. Es sei ∇ eine torsionsfreie Konnexion auf TM. Zeige

$$(d\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\nabla^{\Lambda^k T^*M}_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_k)$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, wobei $\nabla^{\Lambda^k T^*M}$ die induzierte Konnexion auf $\Lambda^k T^*M$ bezeichnet. Daher ist $d\alpha \in \Omega^k(M)$ gerade die Schiefsymmetrisierung von $\nabla\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$.

46. Aufgabe. Ist $e_1, \dots, e_n$ ein lokaler Rahmen, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ den dualen Korahmen, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, dann gilt für jedes $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha.$$

47. Aufgabe. Verifiziere, dass die rechte Seite von (III.9) unabhängig von der Basis X, Y von $\xi \subseteq T_x M$ ist.

48. Aufgabe. Verifiziere (III.13).

49. Aufgabe. Zeige, dass auf S^2 keine Riemannsche Metrik mit $K \leq 0$ existiert. Zeige weiters, dass auf $T^2 = S^1 \times S^1$ keine Riemannsche Metrik mit $K < 0$ und auch keine mit $K > 0$ existiert. *Hinweis:* Verwende die Formel von Gauß–Bonnet, siehe (III.10).

50. Aufgabe. Verifiziere (III.12). *Hinweis: Verwende*

$$(L_X g)(Y,Z) = (X \cdot g)(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]),$$

$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *sowie* $X \cdot g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

51. Aufgabe. Zeige, dass der Laplace-Beltrami Operator auf $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ mit dem Laplace aus Proposition III.1.13(c) übereinstimmt. Leite auch folgende Koordinatendarstellung her,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial u^j}\big(\sqrt{g} g^{ij} \tfrac{\partial f}{\partial u^i}\big) = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} + \text{Terme 1. Ordnung in } f,$$

wobei $\sqrt{g} := \det(g_{ij})$, siehe Bemerkung III.1.16 und auch [**7**, Section 2.1].

52. Aufgabe. Zeige, dass die Definition der Länge stückweiser glatter Kurven unabhängig von der verwendeten Unterteilung ist, siehe (III.40). Zeige, dass die Länge stückweise glatter Kurven invariant unter Reparametrisierung mit stückweise glatten Homöomorphismen ist. Zeige auch, dass zu jeder stückweise glatten Kurve $c : I \to M$ ein glatter Homöomorphismus $\phi : I \to I$ existiert, sodass $c \circ \phi : I \to M$ glatt ist. *Hinweis:* Für die letzte Behauptung reparametrisiere mit glatten Homöomorphismen $\phi : [t_{i-1}, t_i] \to [t_{i-1}, t_i]$, die platt an den Randpunkten sind, dh. $\phi^{(k)}(t_{i-1}) = 0 = \phi^{(k)}(t_i)$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

53. Aufgabe. Es sei (M, g) eine Riemannsche Manigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Es bezeichne h die von g auf U induzierte Riemannsche Metrik. Zeige, dass die von h indzuierte Metrik d_h auf U i.A. nicht mit der Einschränkung der von g auf M induzierten Metrik d_g übereinstimmt. *Hinweis.* Betrachte $M = \mathbb{R}^2$ mit der standard Riemannmetrik $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine geeignete nicht konvexe Teilmenge.

54. Aufgabe. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine glatte Funktion $f : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass die Riemannmetrik fg vollständig ist.

55. Aufgabe. Es sei M eine zusmmenhängende Mannigfaltigkeit. Zeige, dass je zwei Punkt durch eine (stückweise) glatte Kurve verbunden werden können. *Hinweis:* Für fixes $x \in M$ betrachte die Menge der Punkte, die mit x durch eine stückweise glatte Kurve verbunden werden können. Zeige, dass diese Menge offen und abgeschlossen ist.

56. Aufgabe. Gib einen Beweis vom Satz in [**3**, Abschnitt 2.11] analog zum Beweis von Satz III.3.14. Details finden sich etwa in [**10**, Section 3.7] oder [**2**, §8].

57. Aufgabe. Es sei $\pi : E \to M$ ein Euklidisches Vektorbündel und U eine Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq E$. Zeige, dass eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass $\{\xi \in E : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\} \subseteq U$. *Hinweis.* Zeige dies zunächst lokal in M und verwende dann eine Partition der Eins um die globale Aussage zu erhalten.

58. Aufgabe. Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda : M \to (0, \infty)$ glatt. Für die Volumsform der Riemannmetrik λg zeige $\mathrm{vol}_{\lambda g} = \lambda^{n/2} \mathrm{vol}_g$.

59. Aufgabe. Nicht vollständige Riemannfläche in $\mathbb{R}^3$ mit $K = -1$.

60. Aufgabe. Jedes orientierbare Vektorbündel über S^1 ist trivialisierbar.

61. Aufgabe. Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zeige:

(a) X ist genau dann lokal wegzusammenhängend, wenn $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend ist.

(b) X ist genau dann semi lokal einfach zusammenhängend, wenn $\tilde{X}$ semi lokal einfach zusammenhängend ist.

Zeige auch, dass ein lokal wegzusammenhängender Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn er wegzusammenhängend ist.

62. Aufgabe. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum. Weiters seinen $p : Y \to X$ und $q : Z \to Y$ zwei zusammenhängende Überlagerungen. Zeige, dass auch $p \circ q : Z \to X$ eine Überlagerung ist. *Hinweis:* Nach Wahl von Basispunkten, ist offensichtlich, welche charakteristische Untergruppe die Überlagerung $p \circ q$ haben müsste. Andererseits existiert zu dieser Untergruppe eine Überlagerug $\pi : \tilde{X} \to X$. Zeige nun, dass ein Homöomorphismus $Z \cong \tilde{X}$ existiert, der π mit $p \circ q$ identifiziert und schließe daraus, dass auch $p \circ q$ eine Überlagerung sein muss, vgl. den Beweis von Korollar III.4.30.

Literatur

[1] R. Bott und L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics **82**. Springer-Verlag, 1982.

[2] T. Bröcker und K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie.* Springer-Verlag, 1990.

[3] A. Čap, *Differentialgeometrie I.* Vorlesungsskriptum, Universität Wien, 2004. Frei erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/diffgeom.pdf`

[4] M. W. Hirsch, *Differential Topology.* Graduate Texts in Mathematics **33**. Springer-Verlag, 1976.

[5] K. Jänich, *Topologie.* Springer-Verlag, 1990.

[6] K. Jänich, *Vektoranalysis.* Springer-Verlag, 1992.

[7] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis.* Universitext, Springer-Verlag, 1995.

[8] W. Klingenberg, *Riemannian geometry.* Studies in Mathematics **1**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[9] A. Kriegl, *Differentialgeometrie.* Vorlesungsskriptum, Universität Wien, 2009. Frei erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2009SS.pdf`

[10] P. W. Michor, *Topics in differential geometry.* Graduate Studies in Mathematics **93**. American Mathematical Society, 2008.

[11] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer Verlag, 2004.

[12] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series **38**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[13] J. Milnor, *Morse Theory.* Annals of Mathematical Studies **51**, Princeton University Press.

[14] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Frei erhältlich unter `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[15] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[16] H. Schubert, *Topologie. Eine Einführung.* Vierte Auflage. Mathematische Leitfäden. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[17] E.H. Spanier, *Algebraic Topology.* Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.

[18] R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie. Eine Einführung.* Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[19] P. Petersen, *Riemannian Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **171**, Springer Verlag, 2006.

[20] I. Chavel, *Riemannian Geometry. A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2006.

[21] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian Geometry.* Springer Verlag, 2002.

[22] W. Meyer, *Toponogov's theorem and applications,* lecture notes available at `http://www.math.uni-muenster.de/u/meyer/publications/toponogov.html`.