Komplexe Analysis I

Stefan Haller

Inhaltsverzeichnis

1.	Vorbemerkungen	3
1.1.	Die komplexen Zahlen	3
1.2.	Lineare Abbildungen	5
1.3.	Folgen komplexer Zahlen	6
1.4.	Reihen komplexer Zahlen	8
1.5.	Offene und abgeschlossene Mengen	12
1.6.	Stetigkeit	14
1.7.	Limiten von Funktionen	16
1.8.	Zusammenhang	17
1.9.	Kompakte Teilmengen	19
1.10.	Funktionenfolgen	21
1.11.	Funktionenreihen	24
2.	Holomorphe Funktionen	27
2.1.	Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen	27
2.2.	Zusammenhang mit reeller Differenzierbarkeit	29
2.3.	Potenzreihen	32
2.4.	Mehr über klassische Funktionen	38
3.	Wegintegrale und das Integrallemma von Goursat	41
3.1.	Integrale komplexwertiger Funktionen	41
3.2.	Wege und ihre Länge	46
3.3.	Kurvenintegrale	49
3.4.	Integrable Funktionen	52
3.5.	Das Integrallemma von Goursat	54
3.6.	Homotopie	56
3.7.	Einfach zusammenhängende Gebiete	60
4.	Grundlegende Sätze der Funktionentheorie	62
4.1.	Die Causchysche Integralformel	62
4.2.	Entwicklung in Potenzreihen	63
4.3.	Der Weierstraßsche Konvergenzsatz	65
4.4.	Der Satz von Liouville	67
4.5.	Der Identitätssatz	68
4.6.	Gebietstreue und Maximumsprinzip	70

Dieses Skriptum findet sich auch unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/KA.html`.

4.7. Biholomorphie 72
4.8. Automorphismengruppen 74
4.9. Die Eulerschen Formeln 77
5. Der Residuenkalkül 81
5.1. Laurentreihen 81
5.2. Singularitäten 85
5.3. Das Residuum 88
5.4. Die Umlaufzahl 89
5.5. Der Residuensatz 92
5.6. Uneigentliche Integrale 94
5.7. Integrale von Winkelfunktionen 96
Literatur 97
Anhang A. Übungsaufgaben 98

1. Vorbemerkungen

Die komplexe Analysis, auch Funktionentheorie genannt, ist das Studium komplex differenzierbarer Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge des Körpers der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bezeichnet. Bevor wir in Kapitel 2 zur Definition der komplexen Differenzierbarkeit kommen, wollen wir in diesem Kapitel die nötigen Grundbegriffe kurz wiederholen. Vieles davon wird schon aus den Vorlesungen über Analysis und Lineare Algebra bekannt sein.

1.1. Die komplexen Zahlen. Auf dem 2-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ wird eine Multiplikation definiert:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \tag{1}$$

Für $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ gilt dann offensichtlich:

$$\begin{aligned} (z_1z_2)z_3 &= z_1(z_2z_3) && \text{(Assoziativität)} \\ z_1z_2 &= z_2z_1 && \text{(Kommutativität)} \\ z(z_1 + z_2) &= zz_1 + zz_2 && \text{(Distributivität)} \\ z(1, 0) &= z && \text{(Einselement)} \end{aligned}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt außerdem:

$$(x, y)\left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1, 0) \qquad \text{(Inverses)}$$

Durch die Multiplikation (1) wird $\mathbb{R}^2$ also zu einem Körper der der *Körper der komplexen Zahlen* genannt und mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird. Wie üblich wird das *Einselement* $(1, 0)$ mit 1 und das *Nullelement* $(0, 0)$ mit 0 bezeichnet. Weiters setzt man $\mathbf{i} := (0, 1) \in \mathbb{C}$, für das dann gilt

$$\mathbf{i}^2 = -1.$$

Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ die Menge der nicht verschwindenden komplexen Zahlen. Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, ist $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ eine kommutative Gruppe. Für das multiplikative Inverse von $z \in \mathbb{C}^\times$ schreiben wir z^{-1} oder auch $\frac{1}{z}$.

Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ ist eine *Körpereinbettung,* wir können also $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auffassen. Beachte, dass die durch (1) definierte Multiplikation mit $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ mit der Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Es ist $(1, \mathbf{i})$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$, jedes $z \in \mathbb{C}$ kann daher eindeutig in der Form

$$z = x + \mathbf{i}y \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden. Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, heißt $\operatorname{Re} z := x$ der *Realteil,* und $\operatorname{Im} z := y$ der *Imaginärteil von z.* Es gilt also stets

$$z = \operatorname{Re} z + \mathbf{i} \operatorname{Im} z.$$

Für $z \in \mathbb{C}$, heißt $\bar{z} := \operatorname{Re} z - \mathbf{i} \operatorname{Im} z$ die *komplex Konjugierte von z.* Es gilt

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{und} \quad \overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

sowie

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2\mathbf{i}}(z - \bar{z}).$$

Weiters gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

Die komplexe Konjugation definiert daher einen *Körperautomorphismus* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, der $\mathbf{i}$ auf $-\mathbf{i}$ abbildet, und dessen *Fixkörper* mir $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ übereinstimmt.

Das *standard Euklidische Produkt* auf $\mathbb{R}^2$, $\langle x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$, kann mit Hilfe der komplexen Multiplikation wie folgt geschrieben werden

$$\langle z_1, z_2\rangle = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Da $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = \operatorname{Re}(z\bar{z})$ folgt für den *Absolutbetrag* $|z| := \sqrt{\langle z, z\rangle}$ daher

$$|z|^2 = z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

Damit erhalten wir folgenden Ausdruck für das Inverse einer komplexen Zahl

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^\times.$$

Wegen $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$ folgt

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad \text{sowie} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{falls } z_2 \neq 0. \tag{2}$$

Induktiv erhalten wir daraus insbesondere

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{als auch} \quad |z^n| = |z|^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^\times,\, n \in \mathbb{Z}.$$

Da $|\bar{z}|^2 = \bar{z}\bar{\bar{z}} = \bar{z}z = z\bar{z} = |z|^2$ gilt auch

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Der Absolutbetrag definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{C}^\times, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $z \mapsto |z|$. Insbesondere ist $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$.

Weiters gilt $\langle zz_1, z_2\rangle = \operatorname{Re}(zz_1\bar{z}_2) = \operatorname{Re}(z_1\bar{\bar{z}}\bar{z}_2)\operatorname{Re}(z_1, \overline{\bar{z}z_2}) = \langle z_1, \bar{z}z_2\rangle$, also

$$\langle zz_1, z_2\rangle = \langle z_1, \bar{z}z_2\rangle.$$

Daraus folgt nun $\langle zz_1, zz_2\rangle = \langle z_1, \bar{z}zz_2\rangle = \langle z_1, |z|^2z_2\rangle = |z|^2\langle z_1, z_2\rangle$, sowie $\langle \bar{z}_1, \bar{z}_2\rangle = \langle 1, z_1\bar{z}_2\rangle = \langle z_2, z_1\rangle = \langle z_1, z_2\rangle$, d.h.

$$\langle \bar{z}_1, \bar{z}_2\rangle = \langle z_1, z_2\rangle \quad \text{und} \quad \langle zz_1, zz_2\rangle = |z|^2\langle z_1, z_2\rangle. \tag{3}$$

Offensichtlich gilt auch $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Mühelos erhalten wir daraus $|\langle z_1, z_2\rangle| = |\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leq |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$, also die *Cauchy–Schwarz Ungleichung*

$$|\langle z_1, z_2\rangle| \leq |z_1||z_2|. \tag{4}$$

Wie üblich folgt dann $|z_1 + z_2|^2 = \langle z_1 + z_2, z_1 + z_2\rangle = \langle z_1, z_1\rangle + 2\langle z_1, z_2\rangle + \langle z_2, z_2\rangle \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$, also die *Dreiecks Ungleichung*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{5}$$

Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir auch, siehe Übungsbeispiel 6,

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|. \tag{6}$$

Aus der Cauchy–Schwarz Ungleichung (4) folgt

$$-1 \leq \frac{\langle z_1, z_2\rangle}{|z_1||z_2|} \leq 1, \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times.$$

Aus der Analysisvorlesung wissen wir, dass es daher genau eine Zahl $\varphi \in [0, \pi] := \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$ gibt, sodass

$$\cos\varphi = \frac{\langle z_1, z_2\rangle}{|z_1||z_2|}. \tag{7}$$

Diese Zahl φ heißt der *Winkel* zwischen $z_1 \in \mathbb{C}^\times$ und $z_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Schließlich sei noch erwähnt, dass für $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ und $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2 \in \mathbb{C}$ offensichtlich gilt

$$\det\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2). \tag{8}$$

1.2. Lineare Abbildungen. Da $\mathbb{C}$ sowohl reeller als auch komplexer Vektorraum ist können wir zwischen *reell linearen* und *komplex linearen* Abbildungen unterscheiden. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell linear heißt, falls

$$\begin{aligned} \psi(z_1 + z_2) &= \psi(z_1) + \psi(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \text{ und} \\ \psi(\lambda z) &= \lambda\psi(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Eine Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt komplex linear, falls

$$\begin{aligned} \psi(z_1 + z_2) &= \psi(z_1) + \psi(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \text{ und} \\ \psi(\lambda z) &= \lambda\psi(z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede komplex lineare Abbildung auch reell linear.

1.2.1. Lemma. *Es sei* $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ *die Matrix einer reell linearen Abbildung* $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *bezüglich der Standardbasis* $(1, \mathbf{i})$, *d.h.* $\psi(1) = a + \mathbf{i}b$ *und* $\psi(\mathbf{i}) = c + \mathbf{i}d$. *Dann sind äquivalent:*

(i) ψ *ist komplex linear.*
(ii) $\psi(\mathbf{i}) = \mathbf{i}\psi(1)$.
(iii) *Es gilt* $d = a$ *und* $c = -b$.

Die Matrixdarstellung einer komplex linearen Abbildungen ist also von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, *und es gilt* $\psi(z) = \psi(1)z = (a + \mathbf{i}b)z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) ist offensichtlich, denn für komplex lineares ψ gilt natürlich $\psi(\mathbf{i}) = \psi(\mathbf{i} \cdot 1) = \mathbf{i}\psi(1)$. Ad (ii)$\Rightarrow$(i): Seien $x, y \in \mathbb{R}$, und $z := x + \mathbf{i}y$. Aus $\psi(\mathbf{i}) = \mathbf{i}\psi(1)$ und der reellen Linearität folgt

$$\psi(z) = \psi(x + \mathbf{i}y) = \psi(x) + \psi(\mathbf{i}y) = x\psi(1) + y\psi(\mathbf{i}) = x\psi(1) + y\mathbf{i}\psi(1) = z\psi(1),$$

also ist ψ komplex linear. Die Äquivalenz (ii)$\Leftrightarrow$(iii) ist auch augenscheinlich, denn es gilt $\psi(\mathbf{i}) = \mathbf{i}\psi(1)$ genau dann, wenn $(c + \mathbf{i}d) = \mathbf{i}(a + \mathbf{i}b)$, und dies ist genau dann der Fall, wenn $d = a$ und $c = -b$. □

Eine injektive (also bijektive) reell lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *winkeltreu,* falls für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ der Winkel zwischen z_1 und z_2 mit dem Winkel zwischen $\psi(z_1)$ und $\psi(z_2)$ übereinstimmt. ψ ist also winkeltreu genau dann, wenn

$$\langle z_1, z_2\rangle |\psi(z_1)||\psi(z_2)| = \langle\psi(z_1), \psi(z_2)\rangle |z_1||z_2|, \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{9}$$

gilt, siehe (7). Weiters erinnern wir uns, dass eine bijektive reell lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *orientierungstreu* heißt, falls ihre Matrixdarstellung bezüglich einer (und dann jeder) Basis positive Determinante hat. Verwenden wir die Basis $(1, \mathbf{i})$ und (8) sehen wir, dass ψ genau dann orientierungstreu ist, wenn gilt

$$\mathrm{Im}\big(\overline{\psi(1)}\psi(\mathbf{i})\big) > 0. \tag{10}$$

Es gilt nun folgende Charakterisierung komplex lineare Abbildungen.

1.2.2. Proposition. *Es sei* $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine injektive reell lineare Abbildung. Dann ist* ψ *komplex linear genau dann, wenn* ψ *winkel- und orientierungstreu ist.*

Beweis. Sei zuerst $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex linear. Wir müssen (9) und (10) verifizieren. Unter Zuhilfenahme von (3) und (2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle z_1, z_2\rangle|\psi(z_1)||\psi(z_2)| = \langle z_1, z_2\rangle|z_1\psi(1)||z_2\psi(1)| = \langle z_1, z_2\rangle|\psi(1)|^2|z_1||z_2| \\ = \langle\psi(1)z_1, \psi(1)z_2\rangle|z_1||z_2| = \langle\psi(z_1), \psi(z_2)\rangle|z_1||z_2|\end{aligned}$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Also ist ψ winkeltreu. Da ψ injektiv ist, gilt weiters

$$\operatorname{Im}\bigl(\overline{\psi(1)}\psi(\mathbf{i})\bigr) = \operatorname{Im}\bigl(\overline{\psi(1)}\psi(1)\mathbf{i}\bigr) = \operatorname{Im}\bigl(|\psi(1)|^2\mathbf{i}\bigr) = |\psi(1)|^2 > 0.$$

Daher ist ψ auch orientierungstreu.

Sei nun umgekehrt ψ winkel- und orientierungstreu. Da ψ injektiv ist, gilt $\psi(1) \neq 0$ und $\psi(\mathbf{i}) \neq 0$. Setze $a := \frac{\psi(\mathbf{i})}{\psi(1)} \in \mathbb{C}^\times$. Nach Lemma 1.2.1 genügt es zu zeigen $a = \mathbf{i}$. Wenden wir (9) auf $z_1 = 1$ und $z_2 = \mathbf{i}$ an, dann folgt wegen $\langle 1, \mathbf{i}\rangle = 0$, $|1| \neq 0$, $|\mathbf{i}| \neq 0$, sofort

$$0 = \langle\psi(1), \psi(\mathbf{i})\rangle = \langle\psi(1), a\psi(1)\rangle = |\psi(1)|^2\langle 1, a\rangle = |\psi(1)|^2 \operatorname{Re} a.$$

Da $|\psi(1)|^2 \neq 0$ schließen wir $\operatorname{Re} a = 0$. Wenden wir (9) auf $z_1 = 1+\mathbf{i}$ und $z_2 = 1-\mathbf{i}$ an, dann folgt wegen $\langle 1+\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}\rangle = 0$, $|1+\mathbf{i}| \neq 0$, $|1-\mathbf{i}| \neq 0$ weiters

$$\begin{aligned}0 &= \bigl\langle\psi(1+\mathbf{i}), \psi(1-\mathbf{i})\bigr\rangle = \bigl\langle\psi(1)+\psi(\mathbf{i}), \psi(1)-\psi(\mathbf{i})\bigr\rangle \\ &= \bigl\langle(1+a)\psi(1), (1-a)\psi(1)\bigr\rangle = |\psi(1)|^2\bigl\langle 1+a, 1-a\bigr\rangle = |\psi(1)|^2(1-|a|^2).\end{aligned}$$

Da $|\psi(1)|^2 \neq 0$ schließen wir $|a|^2 = 1$. Zusammen mit $\operatorname{Re} a = 0$ folgt $a = \pm\mathbf{i}$. Aus (10) erhalten wir

$$0 < \operatorname{Im}\bigl(\overline{\psi(1)}\psi(\mathbf{i})\bigr) = \operatorname{Im}\bigl(\overline{\psi(1)}\psi(1)a\bigr) = \operatorname{Im}\bigl(|\psi(1)|^2 a\bigr) = |\psi(1)|^2 \operatorname{Im} a.$$

Da $|\psi(1)|^2 > 0$ schließen wir $\operatorname{Im} a > 0$, also ist $a = \mathbf{i}$, und ψ tatsächlich komplex linear. □

1.2.3. Beispiel. Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist winkeltreu, aber nicht orientierungstreu, und auch nicht komplex linear, vgl. Übungsaufgabe 7.

1.3. Folgen komplexer Zahlen. Es sei a_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge a_n heißt *konvergent* falls $a \in \mathbb{C}$ existiert, sodass gilt: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit[1]

$$|a - a_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall sagen wir die Folge *konvergiert gegen a*. Eine Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Zahlen konvergieren. Dies folgt leicht aus der Dreiecksungleichung, vgl. Übungsaufgabe 8. Konvergiert die Folge a_n gegen a dann heißt a der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge und wird mit $\lim_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet. Offensichtlich konvergiert die Folge a_n gegen a genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ gilt. Es ist leicht zu sehen, siehe Übungsaufgabe 9, dass eine Folge komplexer Zahlen a_n genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen $\operatorname{Re} a_n$ und $\operatorname{Im} a_n$ beide konvergieren. In diesem Fall gilt dann[2]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n. \tag{11}$$

---

[1] Dies ist äquivalent zu der Forderung: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

[2] Dies ist ein Spezialfall ($m = 2$) folgender aus der Analysis bekannten Tatsache. Eine Folge $\mathbf{x}_n$ in $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m)$, konvergiert genau dann, wenn jede Komponentenfolge x_n^j, $1 \leq j \leq m$, konvergiert, und in diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\lim_{n\to\infty} x_n^1, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n^m)$.

Für den Grenzwert von Folgen komplexer Zahlen gelten die üblichen Rechenregeln. Sind a_n und b_n zwei konvergente Folgen und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann konvergieren auch die Folgen $|a_n|$, $\bar{a}_n$, λa_n, $a_n + b_n$, $a_n b_n$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \big|\lim_{n\to\infty} a_n\big| \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n} \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{16}$$

Ist darüber hinaus $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und gilt $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so konvergiert auch $\frac{a_n}{b_n}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \tag{17}$$

Diese Eigenschaften folgen entweder mittels (11) aus den entsprechenden Eigenschaften reeller Folgen, oder (einfacher) durch direktes Nachrechnen, vgl. Übungsaufgabe 10. Schließlich sei noch erwähnt, dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Eine Folge komplexer Zahlen a_n heißt *Cauchyfolge* falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } m \geq n_0.$$

1.3.1. Proposition (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Eine Folge komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Sei also a_n eine konvergente Folge komplexer Zahlen, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also ist a_n eine Cauchyfolge.

Sei nun umgekehrt a_n eine Cauchyfolge. Wir zeigen, dass dann auch $\operatorname{Re} a_n$ und $\operatorname{Im} a_n$ Cauchyfolgen sind. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da a_n Cauchyfolge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $m \geq n_0$. Es folgt

$$|\operatorname{Re} a_m - \operatorname{Re} a_n| = |\operatorname{Re}(a_m - a_n)| \leq |a_m - a_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,\ m \geq n_0.$$

Ebenso folgt $|\operatorname{Im} a_m - \operatorname{Im} a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $m \geq n_0$. Also sind $\operatorname{Re} a_n$ und $\operatorname{Im} a_n$ Cauchyfolgen. Aus der Analysisvorlesung wissen wir, dass Cauchyfolgen reeller Zahlen konvergent sind.[3] Daher konvergieren die beiden Folgen $\operatorname{Re} a_n$ und $\operatorname{Im} a_n$. Nach (11) konvergiert dann auch a_n. □

[3]Wir erinnern uns an den Beweis dieser Tatsache. Besitzt eine Cauchyfolge einen Häufungspunkt, so muss sie gegen diesen konvergieren. Weiters sind Cauchyfolgen stets beschränkt. Beides folgt leicht mit Hilfe der Dreiecksungleichung, und gilt auch für Folgen komplexer Zahlen. Es genügt also die Existenz eines Häufungspunktes zu zeigen. Ist nun x_n eine reelle Cauchyfolge, dann existiert wegen der Beschränktheit $S := \limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n}\{x_k\}$. Offensichtlich ist S ein Häufungspunkt der Folge x_n. Also konvergiert x_n. Beachte, dass wir die Existenz des Supremums (und des Infimums) verwendet haben, also die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eingeht.

Es sei a_n eine Folge komplexer Zahlen. Ein Punkt $c \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge a_n, falls in jeder Kreisscheibe $B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$ mit Mittelpunkt c und Radius $r > 0$ unendlich viele Folgenelemente liegen. Offensichtlich ist c genau dann Häufungspunkt der Folge a_n, wenn a_n eine gegen c konvergente Teilfolge besitzt. Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt — ihren Limes. Im Allgemeinen kann eine Folge natürlich mehrere (oder gar keinen) Häufungspunkt besitzen.

1.4. Reihen komplexer Zahlen. Eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^\infty a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, heißt *konvergent* falls die Folge ihrer *Partialsummen* $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ konvergiert. In diesem Fall heißt $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n a_k$ der *Grenzwert* oder auch *Limes* der Reihe, wird mit $\sum_{n=0}^\infty a_n$ bezeichnet, und wir sagen die Reihe konvergiert gegen s. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^\infty \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty \operatorname{Im} a_n$ beide konvergieren. In diesem Fall gilt dann[4]

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \sum_{n=0}^\infty \operatorname{Im} a_n.$$

Dies folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft von Folgen, siehe (11).

Auch für Reihen komplexer Zahlen gelten die üblichen Rechenregeln. Sind $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei konvergente Reihen, und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=0}^\infty \lambda a_n$, $\sum_{n=0}^\infty a_n + b_n$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^\infty a_n \quad \text{sowie} \quad \sum_{n=0}^\infty a_n + b_n = \sum_{n=0}^\infty a_n + \sum_{n=0}^\infty b_n.$$

Bei konvergenten Reihen dürfen wir Klammern setzen ohne das Konvergenzverhalten zu ändern. Genauer gilt folgende triviale Beobachtung

1.4.1. Proposition (Klammersetzung). *Es sei $a = \sum_{n=0}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe. Sei weiters $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit $\sigma(0) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n := \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} a_k$. Dann konvergiert auch die geklammerte Reihe $\sum_{n=0}^\infty b_n$ gegen a.*

Beweis. Betrachte die Folgen der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ und $s'_n := \sum_{k=0}^n b_k$. Offensichtlich gilt dann $s'_n = s_{\sigma(n+1)-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist s'_n eine Teilfolge von s_n. Mit s_n muss also auch s'_n konvergieren, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^\infty b_n$ konvergiert. □

1.4.2. Proposition (Causchysches Konvergenzkriterium). *Eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\Big|\sum_{k=m}^n a_k\Big| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

Insbesondere gilt für eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ stets $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

[4]Wieder ist dies ein Spezialfall ($m = 2$) eines Resultats der Analysis. Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty \mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m) \in \mathbb{R}^m$, konvergiert genau dann, wenn jede Komponentenreihe $\sum_{n=0}^\infty x_n^j$, $1 \leq j \leq m$, konvergiert, und in diesem Fall gilt $\sum_{n=0}^\infty \mathbf{x}_n = (\sum_{n=0}^\infty x_n^1, \dots, \sum_{n=0}^\infty x_n^m)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 1.3.1 angewandt auf die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Für die zweite Behauptung bemerke, dass mit $n = m$ stets $\left|\sum_{k=m}^n a_k\right| = |a_n|$ gilt, und daher aus der Cauchybedingung $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ folgt. □

Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heißt *absolut konvergent* falls $\sum_{n=0}^\infty |a_n| < \infty$. Beachte, dass wegen $|a_n| \geq 0$, für das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ nur zwei Fälle eintreten können: entweder konvergiert $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ gegen eine reelle Zahl, oder $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ konvergiert gegen $+\infty$. Mit $\sum_{n=0}^\infty |a_n| < \infty$ meinen wir natürlich, dass der erste Fall eintritt. Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut, genau dann wenn $\sum_{n=0}^\infty \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty \operatorname{Im} a_n$ beide absolut konvergieren, vgl. Übungsaufgabe 9. Sind $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann sind offensichtlich auch $\sum_{n=0}^\infty \lambda a_n$ sowie $\sum_{n=0}^\infty a_n + b_n$ absolut konvergent, siehe Übungsaufgabe 10.

1.4.3. Proposition. *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergent, dann konvergiert sie, und es gilt*

$$\Big|\sum_{n=0}^\infty a_n\Big| \leq \sum_{n=0}^\infty |a_n|.$$

Beweis. Wir verwenden Proposition 1.4.2 um die Konvergenz von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ zu verifizieren. Sei also $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=0}^\infty a_k$ absolut konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \leq \varepsilon$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\Big|\sum_{k=m}^n a_k\Big| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

Aus Proposition 1.4.2 folgt daher die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$. Weiters gilt $|\sum_{k=0}^n a_k| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und mit Hilfe von (12) folgt

$$\Big|\sum_{n=0}^\infty a_n\Big| = \Big|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n a_k\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=0}^n a_k\Big| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{n=0}^\infty |a_n|. \qquad \square$$

1.4.4. Proposition (Klammersetzung für absolut konvergente Reihen). *Ist in der Situation von Proposition 1.4.1 die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergent, so gilt dies auch für die geklammerte Reihe $\sum_{n=0}^\infty b_n$.*

Beweis. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$\sum_{n=0}^m |b_n| = \sum_{n=0}^m \Big|\sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} a_k\Big| \leq \sum_{n=0}^m \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} |a_k| = \sum_{n=0}^{\sigma(m+1)-1} |a_n| \leq \sum_{n=0}^\infty |a_n|.$$

Da $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergiert, folgt $\sum_{n=0}^\infty |b_n| < \infty$. Also konvergiert auch $\sum_{n=0}^\infty b_n$ absolut. □

1.4.5. Proposition (Teilreihen). *Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe, und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv. Dann konvergiert auch die Teilreihe $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut.*

Beweis. Wegen der Injektivität von σ gilt

$$\sum_{n=0}^k |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=0}^{\max\{\sigma(j)|0\leq j\leq k\}} |a_n| \leq \sum_{n=0}^\infty |a_n| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergiert, folgt $\sum_{n=0}^\infty |a_{\sigma(n)}| < \infty$, also ist $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut konvergent. $\square$

1.4.6. Proposition (Umordnungssatz). *Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist dann auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut konvergent und hat den selben Grenzwert.*

Beweis. Durch Betrachtung von Real- und Imaginärteil kann dies leicht auf den reellen Fall zurückgeführt werden. Wir wollen uns hier aber nochmals an den rellen Beweis erinnern, der sich mühelos auf Reihen komplexer Zahlen verallgemeinern lässt. Aus Proposition 1.4.5 wissen wir bereits, dass $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut konvergiert. Betrachte $b_n := a_{\sigma(n)} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Es genügt zu zeigen $\sum_{n=0}^\infty b_n = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$S_n := \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{und} \quad S'_n := \{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}.$$

Dann gilt $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k\in S_n} a_k$, und, da σ injektiv ist, $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{k\in S'_n} a_k$. Wir schließen

$$\sum_{n=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k\in S'_n} a_k - \sum_{k\in S_n} a_k = \sum_{k\in S'_n\setminus S_n} a_k - \sum_{k\in S_n\setminus S'_n} a_k.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\Big|\sum_{k=0}^n b_k\Big| \leq \sum_{k\in S'_n\setminus S_n} |a_k| + \sum_{k\in S_n\setminus S'_n} |a_k| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Da $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \leq \varepsilon/2$. Da $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektiv ist, existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, mit $S_{n_0} \subseteq S'_{n_1}$. Für $n \geq n_1$ gilt dann $S_{n_0} \subseteq S_n$, $S_{n_0} \subseteq S'_n$, und daher auch

$$\sum_{k\in S'_n\setminus S_n} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \quad \text{sowie} \quad \sum_{k\in S_n\setminus S'_n} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Zusammen mit (18) erhalten wir

$$\Big|\sum_{k=0}^n b_k\Big| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| + \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Also gilt $\sum_{n=0}^\infty b_n = 0$. $\square$

1.4.7. Proposition (Reihenprodukte). *Seien $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Weiters sei $(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $n \mapsto (\sigma_1(n), \sigma_2(n))$, eine Bijektion. Setze $c_n := a_{\sigma_1(n)} b_{\sigma_2(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ absolut gegen $\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big)$.*

Beweis. Nach dem Umordnungssatz, siehe Proposition 1.4.6, genügt es dies für eine beliebige Bijektion zu zeigen. O.B.d.A. sei $(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ so, dass

$$\Big\{(\sigma_1(k), \sigma_2(k)) \;\Big|\; k \in \mathbb{N},\ k < (n+1)^2\Big\} = \Big\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\Big|\; i, j \leq n\Big\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $\sum_{k=0}^\infty c_k$ absolut konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} |c_k| = \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} |a_{\sigma_1(k)}||b_{\sigma_2(k)}| = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_i||b_j| = \Big(\sum_{i=0}^n |a_i|\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^n |b_j|\Big).$$

Da $\sum_{i=0}^\infty a_i$ und $\sum_{j=0}^\infty b_j$ absolut konvergieren, folgt $\sum_{k=0}^\infty |c_k| < \infty$. Also konvergiert $\sum_{k=0}^\infty c_k$ absolut. Ebenso gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} c_k = \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \Big(\sum_{i=0}^n a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^n b_j\Big).$$

Da $\sum_{k=0}^\infty c_k$ konvergiert, und wegen (16), erhalten wir daraus

$$\sum_{k=0}^\infty c_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n c_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} c_k = \Big(\sum_{i=0}^\infty a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^\infty b_j\Big). \qquad \square$$

1.4.8. Proposition (Cauchyprodukte). *Es seien* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *und* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *zwei absolut konvergente Reihen. Betrachte*

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ *absolut gegen* $\big(\sum_{n=0}^\infty a_n\big) \cdot \big(\sum_{n=0}^\infty b_n\big)$.

Beweis. Wähle eine Bijektion $(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big\{\big((\sigma_1(k), \sigma_2(k)\big) \,\Big|\, k \in \mathbb{N},\ \tfrac{n(n+1)}{2} \leq k < \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}\Big\} = \Big\{(i, n-i) \,\Big|\, i \in \mathbb{N},\ i \leq n\Big\}.$$

Nach Proposition 1.4.7 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=0}^\infty a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big).$$

Nach Wahl der Bijektion gilt

$$\sum_{k=n(n+1)/2}^{(n+1)(n+2)/2-1} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = c_n.$$

Nach Proposition 1.4.4 konvergiert auch $\sum_{n=0}^\infty c_n$ absolut und hat den gewünschten Grenzwert. $\square$

1.4.9. Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$. Beachte, dass diese Reihe absolut konvergiert, da ja $\sum_{n=0}^\infty \big|\frac{z^n}{n!}\big| = \sum_{n=0}^\infty \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < \infty$. Ist weiters $w \in \mathbb{C}$, dann folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes $(z+w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$ und Proposition 1.4.8

$$\begin{aligned}\exp(z) \cdot \exp(w) &= \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{w^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).\end{aligned}$$

Wir werden Potenzreihen später genauer behandeln und auch einen alternativen Beweis dieses Additionstheorems der Exponentialfunktion kennen lernen.

1.5. Offene und abgeschlossene Mengen. Für $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit
$$B_r(c) := \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z - c| < r\big\}$$
die *Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r.*

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *offen* falls für alle $x \in U$ ein $r > 0$ existiert, sodass $B_r(x) \subseteq U$. Etwa sind $\mathbb{C}$, $\emptyset$, und jede Kreisscheibe $B_r(c)$ offen. Sind U und V offene Teilmengen von $\mathbb{C}$, dann ist auch $U \cap V$ offen. Ist Λ eine beliebige Indexmenge, und sind U_λ, $\lambda \in \Lambda$, offene Teilmengen von $\mathbb{C}$, dann ist auch $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ offen.

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Umgebung von x,* falls eine offene Menge V existiert mit $x \in V \subseteq U$. Die Menge U ist eine Umgebung von x genau dann, wenn $r > 0$ existiert, sodass $B_r(x) \subseteq U$. Ist U eine Umgebung von x, und gilt $U \subseteq U'$, dann ist auch U' eine Umgebung von x. Offensichtlich ist eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Ein Punkt $x \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge a_n, wenn jede Umgebung von x unendlich viele Folgenelemente enthält. Die Folge a_n konvergiert genau dann gegen x, wenn für jede Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen,* falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Zum Beispiel sind $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\emptyset$ abgeschlossen. Sind A und B abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$, so ist auch $A \cup B$ abgeschlossen. Ist Λ eine Indexmenge, und sind A_λ, $\lambda \in \Lambda$, abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$, dann ist auch $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ abgeschlossen.

1.5.1. Proposition. *Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ sind äquivalent:*
- (i) *A ist abgeschlossen.*
- (ii) *Für jede Folge a_n in A und jeden Häufungspunkt z von a_n gilt $z \in A$.*
- (iii) *Der Limes jeder konvergenten Folge in A liegt wieder in A.*

Beweis. Ad (i)⇒(ii): Indirekt angenommen es gäbe einen Häufungspunkt z der Folge a_n der nicht in A liegt. Da A abgeschlossen ist, existiert $r > 0$ mit $A \cap B_r(z) = \emptyset$. Dann kann aber kein einziges a_n in $B_r(z)$ liegen, also kann z auch kein Häufungspunkt der Folge a_n sein, ein Widerspruch. Daher muss jeder Häufungspunkt in A liegen. Ad (ii)⇒(iii): Dies ist offensichltich, da ja der Limes einer konvergenten Folge auch ein Häufungspunkt dieser ist. Ad (iii)⇒(i): Indirekt angenommen A wäre nicht abgeschlossen. Dann existiert $z \in \mathbb{C} \setminus A$, sodass für alle $r > 0$ gilt $B_r(z) \cap A \neq \emptyset$. Wir finden daher eine Folge a_n in A mit $|a_n - z| < 1/(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da diese Folge gegen z konvergiert, muss nach Voraussetzung $z \in A$ gelten, ein Widerspruch. Also muss A abgeschlossen sein. □

1.5.2. Proposition (Intervallschachtelung). *Es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, sodass $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters seien alle Durchmesser $d_n := \sup_{a,b\in A_n}\{|a - b|\}$ endlich, und es gelte $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Dann existiert $a \in \mathbb{C}$ mit*
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}.$$

Beweis. Wähle $a_n \in A_n$. Wir zeigen zunächst, dass a_n eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_{n_0} \leq \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ gilt natürlich $a_n, a_m \in A_{n_0}$ und daher $|a_n - a_m| \leq d_{n_0} \leq \varepsilon$. Also ist a_n tatsächlich eine Cauchyfolge. Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, siehe Proposition 1.3.1. Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_m \in A_n$ für alle $m \geq n$. Wegen der Abgeschlosenheit von A_n muss daher auch der Grenzwert $a = \lim_{m\to\infty} a_m$ in A_n liegen, siehe Proposition 1.5.1.

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall ist, folgt $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Es bleibt noch zu zeigen, dass a der einige Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist. Indirekt angenommen es gäbe $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $z \neq a$. Da $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_{n_0} < |z-a|$. Da $z, a \in A_{n_0}$ folgt $|z-a| \leq d_{n_0} < |z-a|$, ein Widerspruch. Also kann es keinen von a verschiedenen Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ geben. □

Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Unter dem *Abschluss* von X verstehen wir die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ für die gilt: jede Umgebung von z enthält mindestens einen Punkte von X. Der Abschluss von X wird mit $\bar{X}$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $X \subseteq \bar{X}$. Es ist leicht einzusehen, dass $\bar{X}$ stets abgeschlossen ist. Es gilt $X = \bar{X}$ genau dann, wenn X abgeschlossen ist. Daraus folgt $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$. Die Menge $\bar{X}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die X enthält. Für jeden Punkt $z \in \bar{X}$ existiert eine Folge x_n in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. Ist $Y \subseteq \mathbb{C}$ eine weitere Menge, dann gilt $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$, sowie $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$. Ist darüberhinaus $X \subseteq Y$ dann gilt auch $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$, siehe Übungsaufgabe 16.

1.5.3. Beispiel. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Für den Abschluss der offenen Kreisscheibe $B_r(c)$ gilt

$$\bar{B}_r(c) = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z-c| \leq r\bigr\}.$$

Der Abschluss des offenen Intervalls $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ stimmt mit dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ überein, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Der Abschluss der rationalen Zahlen stimmt mit $\mathbb{R}$ überein, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Ebenso ist $\overline{\mathbb{Q} + \mathbf{i}\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$.

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Unter dem *Inneren von* X verstehen wir die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: X ist Umgebung von z. Das Innere von X wird mit $\mathring{X}$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\mathring{X} \subseteq X$. Auch ist $\mathring{X}$ stets offen. Es gilt $\mathring{X} = X$ genau dann, wenn X offen ist. Daraus folgt $\mathring{\mathring{X}} = \mathring{X}$. Die Menge $\mathring{X}$ ist die größte offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ die in X enthalten ist. Ist $z \in \mathring{X}$ und ist a_n eine Folge in $\mathbb{C}$ die gegen z konvergiert, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in X$ für alle $n \geq n_0$. Ist $Y \subseteq \mathbb{C}$ eine weiter Menge, dann gilt $(X \cap Y)^\circ = \mathring{X} \cap \mathring{Y}$, sowie $(X \cup Y)^\circ \supseteq \mathring{X} \cup \mathring{Y}$. Ist darüberhinaus $X \subseteq Y$ dann auch $\mathring{X} \subseteq \mathring{Y}$. Diese Eigenschaften sind in gewisser Weise dual zu den Eigenschaften des Abschlusses, und dies spiegelt sich in der Relation $\mathbb{C} \setminus \mathring{X} = \overline{\mathbb{C} \setminus X}$ wider.

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Unter dem *Rand von* X verstehen wir die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: in jeder Umgebung von z liegt mindestens ein Punkte von X und mindestens ein Punkt von $\mathbb{C} \setminus X$. Der Rand von X wird mit ∂X bezeichnet. Offensichtlich gilt $\partial X = \bar{X} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus X}$. Der Rand ist daher stets abgeschlossen. Weiters haben wir stets eine disjunkte Zerlegung, siehe Übungsaufgabe 17,

$$\mathbb{C} = \mathring{X} \cup \partial X \cup (\mathbb{C} \setminus \bar{X}), \quad \mathring{X} \cap \partial X = \mathring{X} \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \partial X \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \emptyset.$$

Ist $z \in \partial X$, dann existiert eine Folge a_n in X und eine Folge b_n in $\mathbb{C} \setminus X$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = z = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1.5.4. Beispiel. Ist $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ dann gilt

$$\partial B_r(c) = \partial \bar{B}_r(c) = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z-c| = r\bigr\}.$$

Bezeichnet $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene, dann gilt $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$. Siehe auch Übungsaufgabe 17.

Ist $X \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$, dann heißt z ein *Häufungspunkt von X* falls jede Umgebung von z mindestens einen Punkt von $X \setminus \{z\}$ enthält. Jeder Häufungspunkt von X liegt im Abschluss $\bar{X}$ von X. Ist z Häufungspunkt von X, dann existiert eine Folge x_n in $X \setminus \{z\}$ die gegen z konvergiert. Beachte, dass nicht jeder Punkt in $\bar{X}$ Häufungspunkt von X sein muss, etwa hat $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ überhaupt keinen Häufungspunkt. Jedoch ist jeder Punkt einer offenen Teilmenge auch Häufungspunkt dieser.

Wir führen noch einige Begriffe ein. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *offen in X,* falls für jeden Punkt $x \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $X \cap B_\delta(x) \subseteq U$. Offensichtlich ist U genau dann offen in X, wenn eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ existiert, sodass mit $U = \tilde{U} \cap X$. Die leere Menge und X sind stets offen in X. Eine Teilmenge $U \subseteq$ heißt *Umgebung von x in X,* falls eine in X offene Menge V existiert, sodass $x \in V \subseteq U$. Also ist U genau dann Umgebung von x in X, wenn $\delta > 0$ existiert, sodass $X \cap B_\delta(x) \subseteq U$. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen in X* falls $X \setminus A$ offen in X ist. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn eine abgeschlossene Menge $\tilde{A} \subseteq \mathbb{C}$ existiert, sodass $A = X \cap \tilde{A}$. Die leere Menge und X sind stets abgeschlossen in X.

1.5.5. Beispiel. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sind die Intervalle

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\},\\ (a,\infty) &= \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < \infty\} \quad \text{und}\\ (-\infty,a) &= \{t \in \mathbb{R} \mid -\infty < t < a\}\end{aligned}$$

offen in $\mathbb{R}$, aber nicht offen in $\mathbb{C}$.

1.6. Stetigkeit. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und $x \in X$. Dann heißt f *stetig bei x,* falls gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass[5]

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } |y - x| \leq \delta.$$

Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *stetig,* falls f bei jedem $x \in X$ stetig ist. Stetigkeit bei x lässt sich sowohl mit Hilfe von Folgen, als auch mit Hilfe von Umgebungen charakterisieren.

1.6.1. Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig bei x.*
(ii) *Für jede Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in X.*
(iii) *Für jede Folge x_n in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ konvergiert auch die Folge $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*
(iv) *Für jede Folge x_n in $X \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ konvergiert auch die Folge $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Beweis. Ad (i)⇒(ii): Sei also U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Nach Definition der Stetigkeit existiert $\delta > 0$, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $|y-x| < \delta$. Es folgt $f(X \cap B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, also auch $X \cap B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$. Daher ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in X. Ad (ii)⇒(iii): Sei x_n eine Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in X. Da x_n gegen x konvergiert, existiert n_0 mit $x_n \in f^{-1}(U)$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist aber auch $f(x_n) \in U$ für

[5] Dies ist äquivalent zur Forderung: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass folgendes gilt: $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $|y - x| < \delta$.

alle $n \geq n_0$. Da dies für alle Umgebungen U von x gilt, konvergiert $f(x_n)$ gegen x. Die Implikation (iii)⇒(iv) ist trivial. Ad (iv)⇒(i): Indirekt angenommen f wäre nicht stetig bei x. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: für alle $\delta > 0$ existiert $y \in X$ mit $|y - x| \leq \delta$ und $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$. Beachte, dass für jedes solche y natürlich $y \neq x$ gelten muss. Wir finden daher eine Folge x_n in $X \setminus \{x\}$ mit $|x_n - x| \leq 1/(n+1)$ und $|f(x_n) - f(x)| > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist x_n eine Folge in $X \setminus \{x\}$ die gegen x konvergiert, aber $f(x_n)$ kann nicht gegen $f(x)$ konvergieren, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muss f bei x stetig sein. □

Besonders elegant ist die Charakterisierung der Stetigkeit durch offene bzw. abgeschlossene Mengen.

1.6.2. Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X.*
(iii) *Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschl. in X.*

Beweis. Ad (i)⇒(ii): Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $x \in f^{-1}(U)$. Als offen Menge ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f bei x stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x, siehe Proposition 1.6.1. Da dies für alle $x \in f^{-1}(U)$ gilt, ist $f^{-1}(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte und damit offen. Ad (ii)⇒(i): Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(x) \in V \subseteq U$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(V)$ offen in X. Wegen $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ ist also $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in X. Nach Proposition 1.6.1 ist daher f bei x stetig. Da dies für alle $x \in X$ gilt, folgt die Stetigkeit von f. Ad (ii)⇔(iii): Dies folgt sofort aus den folgenden Tatsachen: $A \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist; und $f^{-1}(A)$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A)$ offen in X ist. □

Aus der Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen in Proposition 1.6.1 erhalten wir sofort einige grundlegende Eigenschaften stetiger Funktionen. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn die Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f : X \to \mathbb{C}, \qquad & (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)) \\ \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{C} \qquad & (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

beide stetig sind, siehe (11). Sind $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} |f| : X \to \mathbb{C}, \qquad & |f|(x) := |f(x)| \\ \bar{f} : X \to \mathbb{C}, \qquad & \bar{f}(x) := \overline{f(x)} \\ \lambda f : X \to \mathbb{C}, \qquad & (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \\ f + g : X \to \mathbb{C}, \qquad & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ fg : X \to \mathbb{C}, \qquad & (fg)(x) := f(x)g(x) \end{aligned}$$

alle stetig, siehe (12)–(16). Ist darüber hinaus $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{C}, \qquad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig, siehe (17). Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $h : Y \to \mathbb{C}$ stetig mit $h(Y) \subseteq X$, dann ist auch die Komposition

$$f \circ h : Y \to \mathbb{C}, \qquad (f \circ h)(y) := f(h(y))$$

stetig. Ist $Y \subseteq X$ und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist auch die Einschränkung

$$f|_Y : Y \to \mathbb{C}, \qquad f|_Y(y) := f(y)$$

stetig.

1.6.3. Beispiel. Jede konstante Abbildung ist stetig. Auch die identische Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$, ist offensichtlich stetig. Aus den obigen Eigenschaften folgt dann sofort, dass jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, stetig ist, $a_i \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Limiten von Funktionen. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und x_0 ein Häufungspunkt von X. Der Punkt x_0 kann, muss aber nicht, in X liegen. Wir sagen *der Limes von f für x gegen x_0 existiert,* falls $z \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - z| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } 0 < |x - x_0| \leq \delta.$$

Da x_0 ein Häufungspunkt von X ist, kann es höchstens ein solches z geben. In diesem Fall heißt z der *Grenzwert oder Limes von f für x gegen x_0,* und wird mit $\lim_{x\to x_0} f(x)$ bezeichnet. Beachte, dass selbst wenn $x_0 \in X$, der Funktionswert $f(x_0)$ unerheblich für Existenz und Wert des Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ist. Ist x_0 ein Häufungspunkt von X und gilt $x_0 \in X$, dann ist offensichtlich f bei x_0 stetig genau dann, wenn der Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

1.7.1. Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, x_0 ein Häufungspunkt von X, und $z \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Grenzwert* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert, und es gilt* $\lim_{x\to x_0} f(x) = z$.
(ii) *Die folgende Funktion ist bei x_0 stetig:*

$$\tilde f : X \cup \{x_0\}, \qquad \tilde f(y) := \begin{cases} f(y) & \text{falls } y \neq x_0 \\ z & \text{falls } y = x_0 \end{cases}$$

(iii) *Für jede Folge a_n in $X \setminus \{x_0\}$ mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ *konvergiert auch die Folge $f(a_n)$, und es gilt* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = z$.

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) ist offensichtlich. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt aus Proposition 1.6.1 angewandt auf $\tilde f$. □

Aus Proposition 1.7.1 und den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir sofort die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ Funktionen, x_0 ein Häufungspunkt von X, und $\lambda \in \mathbb{C}$. Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0}(\operatorname{Re} f)(x)$ und $\lim_{x\to x_0}(\operatorname{Im} f)(x)$ beide existieren, und in diesem Fall gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\operatorname{Re} f)(x) + \mathbf{i} \lim_{x\to x_0} (\operatorname{Im} f)(x).$$

Existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$, dann existieren auch die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} \bar f(x)$, $\lim_{x\to x_0} |f|(x)$, $\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x)$, $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)$,

$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\bar{f}(x)=\overline{\lim_{x\to x_0}f(x)} \tag{19}$$

$$\lim_{x\to x_0}|f|(x)=\big|\lim_{x\to x_0}f(x)\big| \tag{20}$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0}f(x) \tag{21}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x) \tag{22}$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\Big(\lim_{x\to x_0}f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0}g(x)\Big) \tag{23}$$

Ist darüber hinaus $g(x)\neq 0$ für alle $x\in X$, und gilt $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$, dann existiert auch $\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)} \tag{24}$$

1.8. Zusammenhang.

1.8.1. Definition (Zusammenhang). Eine Teilmenge $X\subseteq\mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend,* falls jede nicht leere offene und abgeschlossene Menge in X schon mit X übereinstimmt. D.h. X und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X die gleichzeitig offen und abgeschlossen in X sind.

Sei $X\subseteq\mathbb{C}$, $f:X\to\mathbb{C}$ eine Funktion und $z\in X$. Wir sagen die Funktion f ist *lokal um z konstant,* falls eine Umgebung von z in X existiert auf der f konstant ist. Die Funktion $f:X\to\mathbb{C}$ heißt *lokal konstant,* falls sie um jeden Punkt von X lokal konstant ist. Für uns sind zusammenhängende Mengen wegen folgender Eigenschaft interessant.

1.8.2. Proposition. *Es sei $X\subseteq\mathbb{C}$ zusammenhängend, und $f:X\to\mathbb{C}$ lokal konstant. Dann ist f konstant.*

Beweis. O.B.d.A. sei $X\neq\emptyset$. Sei $z_0\in X$, und setze $c:=f(z_0)$. Betrachte $S:=\{z\in X\mid f(z)=c\}$. Dann gilt $z_0\in S$, also ist S eine nicht leere Teilmenge von X. Da f lokal konstant ist, ist S offen in X. Aus demselben Grund ist auch $X\setminus S$ offen in X, d.h. S ist abgeschlossen in X. Damit ist S eine nicht leere, offene und abgeschlossene Menge in X. Da X zusammenhängend ist, folgt $S=X$. Also gilt $f(z)=c$ für alle $z\in X$. □

1.8.3. Proposition. *Ist $X\subseteq\mathbb{C}$ zusammenhängend und $f:X\to\mathbb{C}$ stetig, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $S\subseteq f(X)$ eine nicht leere, offene und abgeschlossene Menge in $S(X)$. Es ist zu zeigen, dass $S=f(X)$ gilt. Betrachte $S':=f^{-1}(S)\subseteq X$. Da S nicht leer ist, ist auch S' nicht leer. Da f stetig und S offen in $f(X)$ ist, ist auch S' offen in X, siehe Proposition 1.6.2. Genauso folgt aus der Stetigkeit von f und der Abgeschlossenheit von S, dass S' abgeschlossen in X ist. Also ist S' eine nicht leere, offene und abgeschlossene Menge in X. Aus dem Zusammenhang von X folgt daher $X=S'$, also $S=f(S')=f(X)$. □

1.8.4. Proposition. *Jedes Intervall $[a,b]=\{t\in\mathbb{R}\mid a\leq t\leq b\}$ ist zusammenhängend, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$.*

Beweis. Sei $S \subseteq [a,b]$ nicht leer, offen und abgeschlossen in $[a,b]$. Es ist zu zeigen $S = [a,b]$. Sei $t_0 \in S$, und betrachte $s := \sup\bigl\{t \in [t_0,b] \bigm| [t_0,t] \subseteq S\bigr\}$. Dann gilt $[t_0,s) \subseteq S$, und wegen der Abgeschlossenheit von S sogar $[t_0,s] \subseteq S$. Wir behaupten nun $s = b$. Indirekt angenommen es gelte $s < b$. Da S offen in $[a,b]$ ist existiert $\delta > 0$ sodass $[s-\delta, s+\delta] \subseteq S$. Es folgt $[t_0, s+\delta] \subseteq S$, ein Widerspruch zur Definition von s. Also gilt tatsächlich $s = b$ und damit $[t_0,b] \subseteq S$. Analog lässt sich durch Betrachtung von $\inf\bigl\{t \in [a,t_0] \bigm| [t,t_0] \subseteq S\bigr\}$ zeigen, dass $[a,t_0] \subseteq S$. Es folgt dann $[a,b] = [a,t_0] \cup [t_0,b] \subseteq S$, also $S = [a,b]$. □

Selbst für Intervalle ist es also einigermaßen kompliziert zu verifizieren, dass sie zusammenhängend sind. Wir werden nun ein Kriterium kennenlernen, dass es gestattet, in allen für uns interessanten Fällen, auf "einen Blick" festzustellen ob eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist oder nicht. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Unter einer *stetigen Kurve in* X verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$, wobei wieder $[a,b]$ das Intervall mit Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnet, $a \leq b$.

1.8.5. Definition (Wegzusammenhang). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend* falls je zwei Punkte $z_1, z_2 \in X$ durch eine stetige Kurve in X verbunden werden können, d.h. es existiert eine stetige Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$.

1.8.6. Proposition. *Jede wegzusammenhängende Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ wegzusammenhängend. Indirekt angenommen X wäre nicht zusammenhängend. Dann existiert eine nicht leere, offene und abgeschlossene Menge S in X, für die aber $S \neq X$ gilt. Wähle $z_1 \in S$ und $z_2 \in X \setminus S$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert eine stetige Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Betrachte nun $S' := \gamma^{-1}(S) \subseteq [a,b]$. Da $a \in S'$, gilt $S' \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von γ ist S' offen und abgeschlossen in $[a,b]$, siehe Proposition 1.6.2. Nach Proposition 1.8.4 ist $[a,b]$ zusammenhängend, also folgt $S' = [a,b]$. Dies widerspricht aber $b \notin S'$. Daher muss X zusammenhängend sein. □

1.8.7. Beispiel. Wir erinnern uns, dass eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ *konvex* heißt, falls mit je zwei Punkte $z_0, z_1 \in X$ stets auch die *Verbindungsstrecke* $[z_0, z_1] = \bigl\{(1-t)z_0 + tz_1 \mid t \in [0,1]\bigr\}$ ganz in X liegt. Offensichtlich sind konvexe Mengen wegzusammenhängend. Nach Proposition 1.8.6 ist also jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ zusammenhängend. Insbesondere sind alle Intervalle (a,b), $(a,b]$, (a,∞), $[a,\infty]$, $\mathbb{R}$ etc. zusammenhängend. Die *obere Halbebene* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\mathbb{C}$ selbst, sind zusammenhängend. Auch sind alle Kreisscheiben $B_r(c)$ und $\bar{B}_r(c)$ zusammenhängend. Es seien noch einige nicht konvexe Teilmengen erwähnt, denen wir später begegnen werden. Die *punktierte Ebene* $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die *geschlitzte Ebene* $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sind beide zusammenhängend. Dasselbe gilt für $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $\mathbb{C} \setminus \mathbf{i}\mathbb{Z}$. Wieder folgen diese Behauptungen sofort aus Proposition 1.8.6.

Im Allgemeinen muss eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ nicht wezusammenhängend sein. Für offene Teilmengen gilt jedoch, siehe Übungsaufgabe 13,

1.8.8. Proposition. *Es sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen. Dann ist* U *zusammenhängend genau dann, wenn* U *wegzusammenhängend ist.*

Wir führen noch einen für die Funktionentheorie wichtigen Begriff ein.

1.8.9. Definition (Gebiete). Eine nicht leere, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ wird *Gebiet* genannt.

1.9. Kompakte Teilmengen. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Eine Familie $\mathcal{U}$ von offenen Mengen in K heißt *offene Überdeckung* von K, falls $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = K$ gilt. Unter einer *endlichen Teilüberdeckung* einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von K, verstehen wir endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ für die schon $\bigcup_{j=1}^n U_j = K$ gilt.

1.9.1. Definition (Kompaktheit). Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt *kompakt* falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1.9.2. Proposition. *Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Betrachte $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Da f stetig ist, ist dies eine offene Überdeckung von K, siehe Proposition 1.6.2. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n) = K$. Dann gilt aber auch $U_1 \cup \cdots \cup U_n = f(K)$. Also besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. □

1.9.3. Proposition. *Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Indirekt angenommen K wäre nicht abgeschlossen. Dann existiert $z \in \mathbb{C} \setminus K$, sodass für alle $r > 0$ gilt $\bar{B}_r(z) \cap K \neq \emptyset$. Also ist $\{K \setminus \bar{B}_r(z) \mid r > 0\}$ eine offene Überdeckung von K, die keine endliche Teilüberdeckung besitzen kann, ein Widerspruch zur Kompaktheit von K. Also muss K abgeschlossen sein. □

1.9.4. Proposition. *Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, und A abgeschlossen in K, dann ist auch A kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von A. Es ist zu zeigen, dass eine endliche Teilüberdeckung existiert. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ existiert eine in K offene Menge V_λ mit $U_\lambda = A \cap V_\lambda$. Da A abgeschlossen in K ist, ist $K \setminus A$ offen in K. Also ist $\{K \setminus A\} \cup \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist existieren endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ sodass $K = (K \setminus A) \cup V_{\lambda_1} \cup V_{\lambda_2} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}$. Dann gilt aber auch $U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} = A$. Also haben wir die gewünschte endliche Teilüberdeckung gefunden. □

1.9.5. Proposition. *Jedes abgeschlossene Rechteck*

$$R = [a, b] \times \mathbf{i}[c, d] = \big\{x + \mathbf{i}y \bigm| a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\big\}$$

ist kompakt, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von R. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Indirekt angenommen $\mathcal{U}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Schreibe $R_0 := R$. Teile R_0 durch halbieren der Seiten in vier abgeschlossene Rechtecke. Es bezeichne R_1 eines dieser vier Teilrechtecke für das die offene Überdeckung $\mathcal{U}|_{R_1} := \{U \cap R_1 \mid U \in \mathcal{U}\}$ von R_1 keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Teile nun R_1 in vier gleiche abgeschlossene Rechtecke, und bezeichne mit R_2 eines dieser neuen Rechtecke für das $\mathcal{U}|_{R_2}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir fahren induktiv fort und erhalten eine Folge von Rechtecken R_n mit folgenden Eigenschaften:

(i) R_n ist nicht leer und abgeschlossen in $\mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $R_{n+1} \subseteq R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\mathcal{U}|_{R_n} = \{R_n \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $d_n := \sup_{z,w \in R_n}\{|z-w|\} \leq 2^{-n}\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Proposition 1.5.2 ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n = \{z\}$ für ein gewisses $z \in \mathbb{C}$. Da $z \in R$, existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $z \in U$. Da U offen in R ist, existiert $\delta > 0$ mit $R \cap B_\delta(z) \subseteq U$. Da $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ und wegen (iv) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n \subseteq B_\delta(z)$. Es folgt $R_n \subseteq U$, aber dies widerspricht (iii). Also muss $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzen. □

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt *beschränkt,* falls $R > 0$ existiert mit $X \subseteq B_R(0)$.

1.9.6. Proposition (Heine–Borel, Bolzano–Weierstraß). *Für eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *K ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in K besitzt eine Teilf. die gegen einen Punkt in K konvergiert.*

(iii) *K ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Ad (iii)⇒(i): Da K beschränkt ist, existiert ein abgeschlossenes Rechteck $R = [a,b] \times \mathbf{i}[c,d]$ mit $K \subseteq R$. Nach Proposition 1.9.5 ist R kompakt. Da K abgeschlossen ist, ist nach Proposition 1.9.4 auch K kompakt. Ad (i)⇒(ii): Sei also K kompakt und z_n eine Folge in K. Es genügt zu zeigen, dass z_n einen Häufungspunkt in K hat, denn dann existiert auch eine Teilfolge die gegen diesen konvergiert. Indirekt angenommen z_n hätte keinen Häufungspunkt in K. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ eine offen Umgebung U_x von x in K die nur endlich viele der Folgenelemente z_n enthält. Wegen der Kompaktheit von K müssen schon endlich viele der U_x ganz K überdecken. Seien also $x_1, \dots, x_k \in K$ mit $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k} = K$. Da in jedem der U_{x_i} nur endlich viele Folgenelemente liegen, gilt dies auch für K. Da jede Folge aber unendlich viele Folgenelemente hat, erhalten wir einen Widerspruch. Daher muss z_n einen Häufungspunkt in K besitzen. Ad (ii)⇒(iii): Wäre K nicht beschränkt, dann existiert eine Folge z_n in K mit $|z_n| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge besitzt keine konvergent Teilfolge, ein Widerspruch. Also muss K beschränkt sein. Wäre K nicht abgeschlossen, dann existiert $z \notin K$ und eine Folge z_n in K die gegen z konvergiert. Mit z_n konvergiert auch jede Teilfolge gegen z. Also existiert keine Teilfolge von z_n die gegen einen Punkt in K konvergiert, ein Widerspruch. Also muss K auch abgeschlossen sein. □

1.9.7. Beispiel. Aus Proposition 1.9.6 erhalten wir sofort wichtige Beispiele kompakter Mengen. Etwa ist für jedes $c \in \mathbb{C}$ und jedes $r > 0$ die abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{B}_r(c)$ kompakt, da sie ja beschränkt und abgeschlossen ist. Genauso ist für alle $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ auch die Verbindungsstrecke

$$[z_0, z_1] := \big\{(1-t)z_0 + tz_1 \,\big|\, t \in [0,1]\big\}$$

kompakt. Insbesondere sind alle Intervalle $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, kompakt. Nicht kompakt sind, unter anderem, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ und alle offenen Kreisscheiben $B_r(c)$.

1.9.8. Proposition. *Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, dann hat f ein Maximum, d.h. es existiert $z \in K$ mit $f(z) = \sup_{x\in K}\{f(x)\} = \max_{x\in K}\{f(x)\}$.*

Beweis. Nach Definition des Supremums finden wir eine Folge z_n in K mit $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \sup_{x\in K}\{f(x)\}$. Nach Propositon 1.9.6 existiert eine Teilfolge von z_n die gegen ein $z \in K$ konvergiert. O.B.d.A. konvergiere z_n gegen z. Aus der Stetigkeit von f folgt nun

$$f(z) = f\big(\lim_{n\to\infty} z_n\big) = \lim_{k\to\infty} f(z_n) = \sup_{x\in K}\{f(x)\}. \qquad \square$$

1.9.9. Proposition (Lebesguezahl). *Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert $\delta > 0$, sodass gilt: für jede Teilmenge $A \subseteq K$ mit Durchmesser $\sup_{a,b \in A}\{|a-b|\} \leq \delta$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $A \subseteq U$.*

Beweis. Für jeden Punkt $z \in K$ wähle $U_z \in \mathcal{U}$ mit $z \in U_z$. Da U_z offen in K ist, finden wir $r_z > 0$, sodass

$$K \cap B_{2r_z}(z) \subseteq U_z. \tag{25}$$

Betrachte $\mathcal{V} := \{K \cap B_{r_z}(z) \mid z \in K\}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung. Seien also $z_1, \ldots, z_n \in K$, sodass

$$K = \big(K \cap B_{r_{z_1}}(z_1)\big) \cup \cdots \cup \big(K \cap B_{r_{z_n}}(z_n)\big). \tag{26}$$

Setze $\delta := \min\{r_{z_1}, \ldots, r_{z_n}\} > 0$. Sei nun $A \subseteq K$, o.B.d.A. $A \neq \emptyset$, mit

$$\sup_{a,b \in A}\{|a-b|\} \leq \delta. \tag{27}$$

Wähle $a \in A$. Nach (26) existiert $1 \leq j \leq n$ mit $a \in B_{r_{z_j}}(z_j)$. Wegen (27) gilt

$$|b - z_j| \leq |b-a| + |a - z_j| < \delta + r_{z_j} \leq 2r_{z_j} \quad \text{für alle } b \in A.$$

Es folgt $A \subseteq B_{2r_{z_j}}(z_j)$, und wegen (25) also $A \subseteq U_{z_j}$. □

1.10. Funktionenfolgen. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Die Folge f_n heißt *punktweise konvergent*, falls für jeden Punkt $x \in X$ der Limes $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. In diesem Fall wird die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ die *Grenzfunktion* der Folge f_n genannt, und f_n heißt *punktweise gegen f konvergent.* Für die Grenzfunktion schreiben wir auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge, und konvergiert die Folge der Einschränkungen $f_n|_A : A \to \mathbb{C}$ punktweise, dann heißt f_n *auf A punktweise konvergent.*

Eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent,* falls f_n punktweise konvergiert und für die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in X.$$

Es heißt dann f_n *gleichmäßig gegen f* konvergent. Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge und konvergieren die Einschränkungen $f_n|_A : A \to \mathbb{C}$ gleichmäßig, dann wird f_n *auf A gleichmäßig konvergent* genannt.

Ist $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so definieren wir die *Supremumsnorm von f*

$$\|f\|_X := \sup_{x \in X}\big\{|f(x)|\big\}.$$

Beachte, dass $\|f\|_X = \infty$ möglich ist. Dies hat formal ähnliche Eigenschaften wie der Absolutbetrag komplexer Zahlen. Für Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|f\|_X = 0 \Leftrightarrow f = 0 \tag{28}$$

$$\|\lambda f\|_X = |\lambda| \cdot \|f\|_X \tag{29}$$

$$\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X \tag{30}$$

$$\|fg\|_X \leq \|f\|_X \cdot \|g\|_X \tag{31}$$

wobei die Konventionen $z + \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $0 \cdot \infty = 0$ und $\infty \cdot \infty = \infty$ Anwendung finden, siehe Übungsaufgabe 19. Offensichtlich konvergiert $f_n : X \to \mathbb{C}$ genau dann gleichmäßig gegen f, wenn gilt[6]

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0.$$

1.10.1. Proposition (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Eine Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig genau dann, wenn die folgende Cauchybedingung erfüllt ist: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass*

$$\|f_n - f_m\|_X \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq n_0 \textit{ und alle } m \geq n_0.$$

Beweis. Die Cauchybedingung ist offensichtlich notwendig, denn konvergiert f_n gleichmäßig gegen f und ist $\varepsilon > 0$ dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_n - f\|_X \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ folgt dann mit Hilfe von (30)

$$\|f_n - f_m\|_X \leq \|f_n - f\|_X + \|f - f_m\|_X \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also erfüllt die Folge f_n die Cauchybedingung.

Sei nun umgekehrt die Cauchybedingung für f_n erfüllt. Dann ist für fixes $x \in X$ die Folge $f_n(x)$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher, siehe Proposition 1.3.1. Definiere $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Es ist zu zeigen, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen der Cauchybedingung existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,\ m \geq n_0 \text{ und alle } x \in X.$$

Für $x \in X$ und $n \geq n_0$ erhalten wir daher

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen f. □

Eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt *lokal gleichmäßig konvergent,* wenn jeder Punkt von X eine Umgebung U in X besitzt auf der f_n gleichmäßig konvergiert. Klarerweise konvergiert eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen auch lokal gleichmäßig.

1.10.2. Proposition. *Es sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da f_n lokal gleichmäßig konvergiert, existiert eine Umgebung U von x in X, sodass $f_n|_U$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } y \in U.$$

Da f_{n_0} stetig ist, existiert eine Umgebung V von x in X mit

$$|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{für alle } y \in V.$$

Für $y \in U \cap V$ und $n \geq n_0$ erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit U und V ist auch $U \cap V$ eine Umgebung von x in X. Also ist f bei x stetig, siehe Proposition 1.6.1. Da x beliebig war, folgt die Stetigkeit von f. □

[6] Insbesondere soll $\|f_n - f\|_X$ endlich sein, für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

1.10.3. PROPOSITION. *Es sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen. Dann konvergiert f_n gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von X.*

BEWEIS. Sei also $K \subseteq X$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Setze $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Da f_n auf X lokal gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch f_n auch auf K lokal gleichmäßig. Also besitzt jeder Punkt von K eine offene Umgebung in K auf der f_n gleichmäßig konvergiert. Da K kompakt ist, überdecken schon endlich viele dieser offenen Mengen ganz K. Es existieren also endlich viele in K offene Mengen $U_1, \dots, U_N$, sodass

$$K = U_1 \cup \dots \cup U_N, \tag{32}$$

und so, dass für jedes $1 \le j \le N$ die Folge f_n auf U_j gleichmäßig konvergiert. Da $f|_{U_j}$ gleichmäßig konvergiert, existieren $n_0^j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le N$, mit

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_0^j \text{ und alle } x \in U_j.$$

Sei $n_0 := \max\{n_0^1, \dots, n_0^N\}$. Dann folgt wegen (32)

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_0 \text{ und alle } x \in K.$$

Also konvergiert f_n auf K gleichmäßig gegen f. □

Wir notieren noch einige einfache Eigenschaften (lokal) gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen, siehe Übungsaufgabe 14. Es seien $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ zwei (lokal) gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen, und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren auch die Funktionenfolgen $\bar{f}_n$, $|f_n|$, λf_n, $f_n + g_n$ (lokal) gleichmäßig, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} f_n} \tag{33}$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n| = \big|\lim_{n\to\infty} f_n\big| \tag{34}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda f_n = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n \tag{35}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n + g_n = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n \tag{36}$$

Sind darüber hinaus $\lim_{n\to\infty} f_n$ und $\lim_{n\to\infty} g_n$ (lokal) beschränkt,[7] dann konvergiert auch $f_n g_n$ (lokal) gleichmäßig, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n g_n = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \lim_{n\to\infty} g_n \tag{37}$$

Sei weiters $g_n(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolgen f_n und g_n sollen gleichmäßig konvergieren, und $\lim_{n\to\infty} f_n$ sei beschränkt. Weiters existiere $\varepsilon > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} |g_n(x)| \ge \varepsilon$ für alle $x \in X$. Dann konvergiert auch $\frac{f_n}{g_n}$ gleichmäßig, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} f_n}{\lim_{n\to\infty} g_n}. \tag{38}$$

Seien nun f_n und g_n lokal gleichmäßig konvergent, und $\lim_{n\to\infty} f_n$ lokal beschränkt. Darüberhinaus soll für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x in X und $\varepsilon > 0$ existieren, sodass $\lim_{n\to\infty} |g_n(x)| \ge \varepsilon$ für alle $x \in U$. Dann konvergiert $\frac{f_n}{g_n}$ lokal gleichmäßig, und es gilt (38).

[7]Eine Funktion $h : X \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls $\|h\|_X < \infty$. Die Funktion $h : X \to \mathbb{C}$ heißt lokal beschränkt, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X besitzt, sodass $h|_U$ beschränkt ist. Beachte, dass stetige Funktionen immer lokal beschränkt sind.

1.11. Funktionenreihen. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *punktweise konvergent* falls die Folge ihrer *Partialsummen* $s_n := \sum_{k=0}^{k} f_k : X \to \mathbb{C}$ punktweise konvergiert. Ist $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ die Grenzfunktion, dann sagen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise gegen s, und schreiben auch $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *auf A punktweise konvergent,* falls $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_A$ punktweise konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *gleichmäßig konvergent* falls die Folge iherer Partialsummen gleichmäßig konvergiert. Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *auf A gleichmäßig konvergent,* falls $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_A$ gleichmäßig konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *lokal gleichmäßig konvergent* falls die Folge ihrer Partialsummen lokal gleichmäßig konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *punktweise absolut konvergent,* wenn für jedes $x \in X$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergiert.

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ (lokal) gleichmäßig konvergent und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann konvergieren auch $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda f_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n + g_n)$ (lokal) gleichmäßig, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda f_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad \text{sowie} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n + g_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n.$$

1.11.1. Proposition (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Es sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig genau dann, wenn folgendes Cauchykriterium erfüllt ist: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} f_k \Big\|_X \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

Insbesondere gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_X = 0$, falls $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.10.1 angewandt auf $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. □

1.11.2. Proposition. *Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.10.2 angewandt auf $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. □

1.11.3. Proposition. *Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von X.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.10.3 angewandt auf $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. □

1.11.4. Proposition. *Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, sodass*[8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

Beweis. Wir verwenden Proposition 1.11.1 um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ zu zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n_0}^{\infty} \|f_k\|_X \leq \varepsilon$. Für $n \geq m \geq n_0$ gilt dann wegen (30)

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} f_k \Big\|_X \leq \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|_X \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|f_k\|_X \leq \varepsilon.$$

[8] Insbesondere soll $\|f_n\|_X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich sein.

Nach Proposition 1.11.1 ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ also gleichmäßig konvergent. $\square$

Ist $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so schreiben wir für die Supremumsnorm der Einschränkung $f|_A : A \to \mathbb{C}$ auch $\|f\|_A := \big\|f|_A\big\| = \sup_{x\in A}\big\{|f(x)|\big\}$.

1.11.5. Definition (Normale Konvergenz von Reihen). Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty$ heißt *normal konvergent* falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x in X existiert, sodass gilt[9]

$$\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U < \infty.$$

Normal konvergente Funktionenreihen haben sehr angenehme Eigenschaften.

1.11.6. Proposition. *Es seien $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ zwei normal konvergente Reihen von Funktion und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) *Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiert lokal gleichmäßig.*
(ii) *Sind alle f_n stetig, dann ist auch $\sum_{n=0}^\infty f_n$ stetig.*
(iii) *Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von X.*
(iv) *Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiert punktweise absolut.*
(v) *Für jede streng monoton wachsende Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sigma(0) = 0$ konvergiert auch die geklammerte Reihe $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} f_k$ normal und hat dieselbe Grenzfunktion.*
(vi) *Für jede streng monoton wachsende Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergiert auch die Teilreihe $\sum_{n=0}^\infty f_{\sigma(n)}$ normal.*
(vii) *Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_{\sigma(n)}$ normal und hat dieselbe Grenzfunktion.*
(viii) *Die Reihen $\sum_{n=0}^\infty \lambda f_n$ und $\sum_{n=0}^\infty f_n + g_n$ konvergieren normal gegen $\lambda\sum_{n=0}^\infty f_n$ bzw. $\sum_{n=0}^\infty f_n + \sum_{n=0}^\infty g_n$.*
(ix) *Das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$ konvergiert normal und hat die Grenzfunktion $\big(\sum_{n=0}^\infty f_n\big) \cdot \big(\sum_{n=0}^\infty g_n\big)$.*

Beweis. Ad (i): Sei $x \in X$. Wähle eine Umgebung U von x in X, für die $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U < \infty$ gilt. Nach Proposition 1.11.4 konvergiert $\sum_{n=0}^\infty f_n$ gleichmäßig auf U. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ lokal gleichmäßig. Behauptung (ii) folgt nun aus (i) und Proposition 1.11.2. Behauptung (iii) folgt aus (i) und Proposition 1.11.3. Behauptung (iv) ist trivial. Um (v) zu sehen, sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x in X, sodass $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U < \infty$. Wenden wir Proposition 1.4.1 auf die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U$ an, erhalten wir mittels (30)

$$\sum_{n=0}^\infty \Bigg\| \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} f_k \Bigg\|_U \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} \|f_k\|_U = \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U < \infty.$$

Also ist $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} f_k$ normal konvergent. Wegen Proposition 1.4.1 gilt auch $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} f_k(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ für alle $x \in X$. Um (vi) zu sehen, sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x in U, sodass $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_U < \infty$. Aus Proposition 1.4.5 folgt $\sum_{n=0}^\infty \|f_{\sigma(n)}\|_U < \infty$. Also ist auch $\sum_{n=0}^\infty f_{\sigma(n)}$ normal konvergent. Nun zu

[9] Insbesondere soll $\|f_n\|_U$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich sein.

(vii). Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x in X, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty$. Wenden wir Proposition 1.4.6 auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U$ and, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{\sigma(n)}\|_U = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty.$$

Also konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ normal. Nach (iv) und Proposition 1.4.6 gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Ad (viii). Sei wieder $x \in X$ und U eine Umgebung von x in X, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_U < \infty$. Mit Hilfe von (30) und (29) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n + \lambda g_n\|_U \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U + |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_U < \infty.$$

Also ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_n + \lambda g_n$ normal konvergent. Schließlich kommen wir zu (ix). Sei $x \in X$. Wähle U, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_U < \infty$. Wenden wir Proposition 1.4.8 auf die beiden absolut konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_U$ an, erhalten wir mit Hilfe von (30) und (31):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Big\| \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \Big\|_U &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \|f_k g_{n-k}\|_U \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_U \cdot \|g_{n-k}\|_U = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_U \right) < \infty\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$ normal. Nach (iv) und Proposition 1.4.8 gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) g_{n-k}(x) = \big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\big) \cdot \big(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\big)$ für alle $x \in X$. $\square$

1.11.7. Beispiel (Die Exponentialreihe). Betrachte $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wir behaupten diese Reihe konvergiert normal auf $\mathbb{C}$. Sei dazu $x \in \mathbb{C}$. Wähle $R > 0$ mit $x \in B_R(0)$. Dann ist $U := B_R(0)$ eine Umgebung von x. Für jedes $z \in U$ gilt $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}$, also $\left\|\frac{z^n}{n!}\right\|_U \leq \frac{R^n}{n!}$. Es folgt $\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{z^n}{n!}\|_U \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} = e^R < \infty$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ tatsächlich normal auf $\mathbb{C}$.

1.11.8. Beispiel (Die geometrische Reihe). Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Betrachte die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{z-c}{r}\big)^n$. Wir behaupten diese Reihe konvergiert normal auf $B_r(c)$. Sei dazu $x \in B_r(c)$. Wähle $R > 0$ mit $|x - c| < R < r$. Dann ist $U := B_R(c)$ eine Umgebung von x. Für jedes $z \in U$ gilt $\left|\frac{z-c}{r}\right| \leq \frac{R}{r} < 1$, also $\|\frac{z-c}{r}\|_U \leq \frac{R}{r}$. Es folgt $\sum_{n=0}^{\infty} \|(\frac{z-c}{r})^n\|_U \leq \sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{R}{r}\big)^n = \frac{r}{r-R} < \infty$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{z-c}{r}\big)^n$ normal auf $B_r(c)$.

1.11.9. Bemerkung. Eine Folge oder Reihe von Funktionen $X \to \mathbb{C}$ heißt *kompakt konvergent,* wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig konvergiert. Wir haben oben gesehen, dass lokal gleichmäßig konvergente Folgen und Reihen kompakt konvergieren, siehe Proposition 1.10.3 und 1.11.3. Ist X offen in $\mathbb{C}$, dann gilt auch die Umkehrung, jede kompakt konvergente Folge oder Reihe konvergiert lokal gleichmäßig. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass für offenes X jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt, etwa eine abgeschlossene Kreisscheibe mit hinreichend kleinem Radius.[10] Für Funktionen die auf offenen

[10] Dasselbe gilt übrigens auch für abgeschlossenes X, allgemeiner für lokal kompaktes X.

Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind ist also lokal gleichmäßige Konvergenz dasselbe wie kompakte Konvergenz. In der Literatur wird dann manchmal von kompakter Konvergenz gesprochen, wir werden hier durchgehend von lokal gleichmäßiger Konvergenz sprechen.

2. Holomorphe Funktionen

Wir kommen nun zum zentralen Begriff der komplexen Analysis, den holomorphen, d.h. komplex differenzierbaren, Funktionen. In Abschnitt 2.1 werden wir dieses Konzept definieren und einige elementare Eigenschaften wie Produktregel und Kettenregel beweisen. In Abschnitt 2.2 werden wir den Zusammenhang zwischen reeller Differenzierbarkeit und Holomorphie untersuchen. Mit den konvergenten Potenzreihen werden wir in Abschnitt 2.3 eine große Klasse holomorpher Funktionen kennenlernen. Wichtige Beispiel sind die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen. Diese werden wir in Abschnitt 2.4 etwas genauer diskutieren.

2.1. Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen.

2.1.1. Definition (Holomorphe Funktionen). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *bei* z_0 *komplex differenzierbar* falls

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{39}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(z_0)$ die *Ableitung von* f *bei* z_0. Die Funktion f heißt *komplex differenzierbar* oder *holomorph* falls sie bei jedem $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist. Ist f holomorph, dann wird die durch (39) gegebene Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$ die *Ableitung von* f genannt.

2.1.2. Beispiel (Konstante Abbildungen). Für $c \in \mathbb{C}$ ist die *konstante Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := c$, holomorph, und es gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2.1.3. Beispiel (Identität). Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z$, ist holomorph, und es gilt $f'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2.1.4. Beispiel (Inversion). Die Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, ist holomorph, und es gilt $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Dies folgt aus

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z_0 - z}{zz_0(z - z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{-1}{zz_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

2.1.5. Beispiel (Komplexe Konjugation). Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}$, ist bei keinem $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn die beiden Folgen $z_0 + \frac{1}{n}$ und $z_0 + \frac{\mathbf{i}}{n}$ konvergieren beide gegen z_0, aber es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_0 + \frac{1}{n}) - f(z_0)}{(z_0 + \frac{1}{n}) - z_0} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + \frac{\mathbf{i}}{n}) - f(z_0)}{(z_0 + \frac{\mathbf{i}}{n}) - z_0} = -1.$$

Daher existiert $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ nicht, siehe Proposition 1.7.1.

2.1.6. Proposition. *Jede holomorphe Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Da f bei z_0 komplex differenzierbar ist folgt mittels (23)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z\to z_0} z - z_0 = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Daher gilt auch $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, also ist f bei z_0 stetig. $\square$

2.1.7. Proposition. *Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, dann ist auch $f+g : U \to \mathbb{C}$, $(f+g)(z) := f(z)+g(z)$, holomorph, und für die Ableitungen gilt $(f+g)' = f' + g'$.*

Beweis. Sei $z_0 \in U$. Für $z \in U$ mit $z_0 \neq z$ gilt

$$\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Da f und g bei z_0 komplex differenzierbar sind, folgt, siehe (22),

$$\lim_{z\to z_0} \frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) + g'(z_0).$$

Daher ist $f+g$ bei z_0 komplex differenzierbar und $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$. $\square$

2.1.8. Proposition (Produktregel). *Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, dann ist auch $fg : U \to \mathbb{C}$, $(fg)(z) := f(z)g(z)$, holomorph, und für die Ableitungen gilt $(fg)' = f'g + fg'$.*

Beweis. Sei $z_0 \in U$. Für $z \in U$ mit $z \neq z_0$ gilt

$$\frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0} = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} g(z) + f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Da f und g bei z_0 komplex differenzierbar sind, und weil g bei z_0 stetig ist, siehe Proposition 2.1.6, folgt mit Hilfe von (21)–(23)

$$\lim_{z\to z_0} \frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \lim_{z\to z_0} g(z) + f(z_0) \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Also ist fg bei z_0 komplex differenzierbar, und es gilt $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$. $\square$

2.1.9. Proposition (Kettenregel). *Sind $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, mit $f(U) \subseteq V$, dann ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{C}$, $(g\circ f)(z) := g(f(z))$, holomorph und für die Ableitungen gilt $(g\circ f)' = (g' \circ f)f'$.*

Beweis. Sei $z_0 \in U$ und $w_0 := f(z_0) \in V$. Betrachte die Funktion

$$g^* : V \to \mathbb{C}, \quad g^*(w) := \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} & \text{falls } w \neq w_0 \\ g'(w_0) & \text{falls } w = w_0. \end{cases}$$

Da g bei w_0 komplex differenzierbar ist, ist g^* stetig, siehe Proposition 1.7.1. Für alle $w \in V$ gilt

$$g(w) - g(w_0) = g^*(w)(w-w_0).$$

Für $z \in U$ gilt daher auch

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = g^*(f(z))\big(f(z)-f(z_0)\big).$$

Da f bei z_0 komplex differenzierbar ist, und weil $g^* \circ f$ bei z_0 stetig ist, folgt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (g^* \circ f)(z) \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= g^*(f(z_0)) \cdot f'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Also ist $g \circ f$ bei z_0 komplex differenzierbar, und $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$. □

2.1.10. Proposition (Quotientenregel). *Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g} : U \to \mathbb{C}$, $\frac{f}{g}(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$, holomorph und für die Ableitungen gilt $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Beweis. Mittles der Produktregel, der Kettenregel und Beispiel 2.1.4 folgt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f \frac{1}{g^2} g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$ □

2.1.11. Beispiel (Monome). Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ ist das *Monom* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := az^n$, holomorph und es gilt $f'(z) = naz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies folgt mittels Induktion aus der Produktregel, Beispiel 2.1.2 und Beispiel 2.1.3.

2.1.12. Beispiel (Polynome). Es seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist das *Polynom* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ holomorph, und es gilt $p'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies folgt aus Beispiel 2.1.11 und Proposition 2.1.7.

2.1.13. Beispiel (Rationale Funtionen). Seien $p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $q(z) := \sum_{k=0}^m b_k z^k$ zwei Polynome, und es bezeichne $N := \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$ die Menge der Nullstellen von q. Dann ist die *rationale Funktion* $\frac{p}{q} : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ holomorph und $\left(\frac{p}{q}\right)' : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ ist wieder eine rationale Funktion. Dies folgt mittels der Quotientenregel aus Beispiel 2.1.12.

2.2. Zusammenhang mit reeller Differenzierbarkeit. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir erinnern uns, dass f *bei x_0 (reell) differenzierbar* heißt, falls eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, sodass gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

In diesem Fall ist T eindeutig, wird mit Df_{x_0} bezeichnet, und heißt das *Differential von f bei x_0*. Die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt *reell differenzierbar* falls sie bei jedem $x_0 \in U$ reell differenzierbar ist. Es bezeichnen $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ die Komponenten von f, d.h. $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Ist f bei x_0 reell differenzierbar, dann sind auch die Funktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ bei x_0 reell differenzierbar, $1 \leq i \leq m$, und es existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t}$$

wobei $e_j \in \mathbb{R}^n$ den j-ten Einheitsvektor bezeichnet. Die Matrixdarstellung von Df_{x_0} bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ hat die Form:

$$[Df_{x_0}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, dann können wir U auch als offene Menge von $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Definiere

$$u : U \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + \mathbf{i}y)$$
$$v : U \to \mathbb{R}, \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + \mathbf{i}y)$$

Dann sind u und v die Komponenten von f, also $f = u + \mathbf{i}v$. Falls die partiellen Ableitungen existieren, dann schreiben wir $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y := \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x := \frac{\partial v}{\partial x}$, $v_y := \frac{\partial v}{\partial y}$. Ist also f reell differenzierbar dann gilt bezüglich der Standardbasis $(1, \mathbf{i})$ von $\mathbb{C}$

$$[Df] = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}. \tag{40}$$

2.2.1. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, und daher $f = u + \mathbf{i}v$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist holomorph.*
(ii) *f ist reell differenzierbar, und Df_z ist komplex linear für alle $z \in U$.*
(iii) *f ist reell differenzierbar, und es gelten die* Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x. \tag{41}$$

Sind (i)–(iii) erfüllt dann gilt $f' = u_x + \mathbf{i}v_x$.

Beweis. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt sofort aus Lemma 1.2.1 und (40).

Ad (i)⇒(ii). Sei also f bei $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Die Ableitung $f'(z_0)$ können wir als komplex lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(w) := f'(z_0)w$ auffassen. Da f bei z_0 komplex differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)|}{|z - z_0|} \\ &\qquad = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)}{z - z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| = 0. \end{aligned}$$

Also ist f bei z_0 reell differenzierbar mit komplex linearem Differential $Df_{z_0} = T$.

Ad (ii)⇒(i). Sei nun f bei z_0 reell differenzierbar mit komplex linearem Differential $T = Df_{z_0}$. Dann ist T durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $T(1)$ gegeben, d.h. $T(z) = T(1)z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da f bei z_0 reell differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - T(1)\right| \\ &\qquad = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)}{z - z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0. \end{aligned}$$

Wir schließen $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = T(1)$. Daher ist f bei z_0 komplex differenzierbar, und es gilt $f'(z_0) = T(1) = u_x + \mathbf{i}v_x$. □

2.2.2. Definition (Konforme Abbildungen). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *konform*, falls f reell differenzierbar ist, und für jedes $z \in U$ das Differential $Df_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ winkel- und orientierungstreu ist.[11]

2.2.3. Korollar. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f konform genau dann, wenn f holomorph ist und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ gilt.*

[11] Insbesondere soll das Differential Df_z injektiv (und daher bijektiv) sein, vgl. Abschnitt 1.2.

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.2.1 und Proposition 1.2.2. $\square$

2.2.4. Korollar. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und C^2, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, und daher $f = u + \mathbf{i}v$. Dann gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Real- und Imaginärteil von f sind also harmonische Funktionen.[12]

Beweis. Da f C^2 ist gilt für die zweiten partiellen Ableitungen $u_{xy} = u_{yx}$ und $v_{xy} = v_{yx}$. Aus den Cauchy–Riemann Gleichungen (41) folgt daher $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$ und $v_{xx} = -u_{yx} = -u_{xy} = -v_{yy}$. $\square$

2.2.5. Proposition. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f' = 0$. Dann ist f lokal konstant.*

Beweis. Sei $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Da $f' = 0$, folgt aus Satz 2.2.1

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0.$$

Sei $c \in U$, und wähle $r > 0$, sodass $B_r(c) \subseteq U$. Sei weiters $z \in B_r(c)$. Es genügt zu zeigen $u(z) = u(c)$ und $v(z) = v(c)$, denn dann ist $f = u + \mathbf{i}v$ auf der Umgebung $B_r(c)$ von c konstant. Definiere eine Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(t) := u(c + t(z - c))$. Aus der Kettenregel der reellen Analysis und $u_x = u_y = 0$ folgt $h'(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$. Also, siehe Analysis, ist h konstant, und daher $u(c) = h(0) = h(1) = u(z)$. Analog lässt sich $v(c) = v(z)$ zeigen. $\square$

Wir erinnern uns, dass eine nicht leere offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ Gebiet genannt wird, siehe Definition 1.8.9.

2.2.6. Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 2.2.5 und Proposition 1.8.2. $\square$

2.2.7. Beispiel (Hauptzweig des Logarithmus). Betrachte die Funktion

$$L : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}, \quad L(z) := \log|z| + \mathbf{i} \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}. \tag{42}$$

Für $u(x,y) := \operatorname{Re} L(x + \mathbf{i}y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ und $v(x,y) := \operatorname{Im} L(x + \mathbf{i}y) = \arctan \frac{y}{x}$ zeigt eine einfache Rechnung

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad u_y = -v_x = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, ist L reell differenzierbar. Nach Satz 2.2.1 ist (42) holomorph, und für die Ableitung gilt $L' = u_x + \mathbf{i}v_x$, d.h. $L'(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$. Es bezeichne $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die geschlitzte Ebene. Die Funktion

$$\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}, \quad \log(z) := \begin{cases} L(z) & \text{falls } \operatorname{Re} z > 0 \\ L(-\mathbf{i}z) + \mathbf{i}\pi/2 & \text{falls } \operatorname{Im} z > 0 \\ L(\mathbf{i}z) - \mathbf{i}\pi/2 & \text{falls } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \tag{43}$$

heißt der *Hauptzweig des Logarithmus.* Unter Verwendung der bekannten Formeln $|\mathbf{i}z| = |-\mathbf{i}z| = |z|$, $\operatorname{Re}(\mathbf{i}z) = -\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im}(\mathbf{i}z) = \operatorname{Re} z$ für $z \in \mathbb{C}$, sowie $\arctan(-t) = -\arctan(t)$, $\arctan(1/t) = \pi/2 - \arctan t$ für $t > 0$, zeigt eine einfache Rechnung,

[12] Wir werden bald sehen, dass jede holomorphe Funktion schon C^∞ ist. Die Forderung, dass f zweimal stetig differenzierbar sei, ist daher überflüssig.

dass (43) wohldefiniert ist, d.h. für $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ gilt $L(z) = L(-\mathbf{i}z) + \mathbf{i}\pi/2$; und für $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ gilt $L(z) = L(\mathbf{i}z) - \mathbf{i}\pi/2$. Da (42) holomorph ist, ist auch (43) holomorph. Da $L'(z) = \frac{1}{z}$, folgt sofort

$$\log'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-. \tag{44}$$

Beachte, dass (43) bei positiven reellen Argumenten mit dem aus der Analysis bekannten natürlichen Logarithmus übereinstimmt. Inbesondere gilt $\log(1) = 0$. Die Funktion (43) kann nicht stetig auf $\mathbb{C}^\times$ fortgesetzt werden, siehe Übungsbeispiel 24. Offensichtlich gilt

$$\overline{\log(z)} = \log(\bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\log(z)) = \log|z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Der Imaginärteil von $\log(z)$ wird das *Argument* von z genannt,

$$\arg : \mathbb{C}^- \to (-\pi, \pi), \quad \arg(z) := \operatorname{Im}(\log(z)).$$

Beachte, dass $|\arg(z)|$ gerade der Winkel zwischen 1 und z ist. Es gilt

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}^- \text{ mit } \big|\arg(z) + \arg(w)\big| < \pi. \tag{45}$$

Dies folgt aus (43) oder (einfacher) mit Hilfe der Eigenschaften der Exponentialfunktion, siehe Proposition 2.4.2 unten. Ohne der Voraussetzung $|\arg(z)+\arg(w)| < \pi$ wird (45) falsch, siehe Übungsaufgabe 25.

2.3. Potenzreihen.

2.3.1. Definition. Unter einer (komplexen) *Potenzreihe* verstehen wir einen formalen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sind. Der *Konvergenzradius* r einer Potenzreihe ist durch

$$r := \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \text{die Folge } |a_n| t^n \text{ ist beschränkt}\big\} \tag{46}$$

definiert. Die Potenzreihe heißt *konvergent* falls $r > 0$ gilt. Ist $r = \infty$ dann heißt sie *überall konvergent.* Falls $r = 0$, dann wird sie manchmal auch *nirgends konvergent* genannt.

2.3.2. Lemma. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} r &= \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \textit{die Folge } |a_n| t^n \textit{ ist beschränkt}\big\} \\ &= \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \lim_{n\to\infty} |a_n| t^n = 0\big\} \\ &= \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty\big\} \end{aligned}$$

Beweis. Aus $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} |a_n| t^n = 0$, also gilt

$$\sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty\big\} \leq \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \lim_{n\to\infty} |a_n| t^n = 0\big\}.$$

Aus $\lim_{n\to\infty} |a_n| t^n = 0$ folgt die Beschränktheit von $|a_n| t^n$, daher

$$\sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \lim_{n\to\infty} |a_n| t^n = 0\big\} \leq \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| |a_n| t^n \text{ ist beschränkt}\big\}.$$

Es bleibt zu zeigen

$$r = \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| |a_n| t^n \text{ ist beschränkt}\big\} \leq \sup\big\{t \in [0, \infty) \bigm| \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty\big\}.$$

Sei $0 < s < r$. Es genügt zu zeigen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n < \infty$. Wähle t mit $s < t < r$, und sei $q := \frac{s}{t} < 1$. Dann ist $|a_n| t^n$ beschränkt, also existiert $C \geq 0$ mit $|a_n| t^n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $|a_n| s^n = |a_n| t^n q^n \leq C q^n$. Da $0 < q < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} C q^n = \frac{C}{1-q}$. Es folgt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n \leq \frac{C}{1-q} < \infty$. □

Die Definition des Konvergenzradius ist durch folgenden Satz gerechtfertigt.

2.3.3. Satz. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann konvergiert die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{47}$$

normal auf $B_r(z_0)$; für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(z_0)$ divergiert sie. Die durch (47) *gegebene Funktion $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Die durch gliedweise Differentiation gewonnene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ hat auch Konvergenzradius r und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \text{\textit{für alle} } z \in B_r(z_0). \tag{48}$$

Beweis. Ist $|z - z_0| > r$ dann ist die Folge $|a_n(z - z_0)^n| = |a_n||z - z_0|^n$ unbeschränkt nach Definition von r, und daher kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ nicht konvergieren, siehe Proposition 1.4.2. Also divergiert (47) für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(z_0)$.

Als nächstes zeigen wir, dass (47) auf $B_r(z_0)$ normal konvergiert. O.B.d.A. sei $r > 0$. Sei $x \in B_r(z_0)$, und wähle r_1, mit $|x - z_0| < r_1 < r$. Dann ist $U := B_{r_1}(z_0)$ eine Umgebung von x. Für $z \in U$ folgt $\left|a_n(z - z_0)^n\right| = |a_n||z - z_0|^n \leq |a_n| r_1^n$ also $\left\|a_n(z - z_0)^n\right\|_U \leq |a_n| r_1^n$. Da $r_1 < r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n < \infty$, siehe Lemma 2.3.2. Es folgt $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_U < \infty$. Daher konvergiert (47) normal auf $B_r(z_0)$.

Sei r' der Konvergenzradius der Potenzreihe (48). Wir zeigen zunächst $r = r'$. Ist die Folge $|n a_n| t^{n-1}$ beschränkt, dann ist auch $|a_n| t^n = (|n a_n| t^{n-1})(\frac{t}{n})$ beschränkt, da ja $\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} = 0$. Es folgt $r' \leq r$. Um $r \leq r'$ einzusehen, genügt es zu zeigen, dass für jedes s mit $0 < s < r$ auch $s \leq r'$ gilt. Sei also $0 < s < r$. Wähle t mit $s < t < r$. Nach Definition von r ist die Folge $|a_n| t^n$ beschränkt. Für $q := \frac{s}{t}$ gilt $0 < q < 1$ und $|n a_n| s^{n-1} = (\frac{|a_n|}{s} t^n)(n q^n)$. Da die Folge $\frac{|a_n|}{s} t^n$ beschränkt ist, und weil $\lim_{n\to\infty} n q^n = 0$, ist auch die Folge $|n a_n| s^{n-1}$ beschränkt, also $s \leq r'$. Daher haben die Potenzreihen (47) und (48) den gleichen Konvergenzradius.

Schließlich zeigen wir, dass f holomorph ist und die Ableitung durch (48) gegeben ist. Sei dazu $z_1 \in B_r(z_0)$. Es ist zu zeigen

$$\lim_{z\to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}. \tag{49}$$

Für $n \geq 1$ setzte

$$g_n(z) := \sum_{j=0}^{n-1} (z - z_0)^j (z_1 - z_0)^{n-1-j}.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
g_n(z)(z-z_1) &= g_n(z)\big((z-z_0)-(z_1-z_0)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^{j+1}(z_1-z_0)^{n-1-j} - \sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^j(z_1-z_0)^{n-j} \\
&= (z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n
\end{aligned}
$$

und daher

$$\frac{\sum_{n=0}^k a_n(z-z_0)^n - \sum_{n=0}^k a_n(z_1-z_0)^n}{z-z_1} = \sum_{n=1}^k a_n g_n(z).$$

für alle $z \neq z_1$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $k \to \infty$ erhalten wir

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \sum_{n=1}^\infty a_n g_n(z) \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0),\ z \neq z_1. \tag{50}$$

Sei ρ so, dass $|z_1-z_0| < \rho < r$. Für $z \in V := B_\rho(z_0)$ gilt dann

$$|a_n g_n(z)| \leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z-z_0|^j |z_1-z_0|^{n-1-j} \leq n|a_n|\rho^{n-1},$$

also $\|a_n g_n\|_V \leq n|a_n|\rho^{n-1}$. Da $\rho < r = r'$ gilt $\sum_{n=1}^\infty n|a_n|\rho^{n-1} < \infty$, siehe Lemma 2.3.2. Es folgt $\sum_{n=1}^\infty \|a_n g_n\|_V < \infty$. Also konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n g_n$ normal auf V. Daher ist $z \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n g_n(z)$ auf V stetig, siehe Proposition 1.11.6. Insbesondere folgt

$$\lim_{z\to z_1} \sum_{n=1}^\infty a_n g_n(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n g_n(z_1) = \sum_{n=1}^\infty a_n n (z_1-z_0)^{n-1}.$$

Zusammen mit (50) folgt nun (49). □

2.3.4. Definition (Höhere Ableitungen). Sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Ist die Ableitung $f' : U \to \mathbb{C}$ wieder komplex differenzierbar, dann heißt f *zweimal komplex differenzierbar* und $f^{(2)} := f'' := (f')' : U \to \mathbb{C}$ heißt die *zweite Ableitung* von f. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv: f heißt k-mal komplex differenzierbar, falls f komplex differenzierbar ist und die Ableitung f' $(k-1)$-mal komplex differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f^{(k)} := (f')^{(k-1)} : U \to \mathbb{C}$ die k-te Ableitung von f. Die Funktion f heißt *beliebig oft komplex differenzierbar,* falls sie k-mal komplex differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$.

2.3.5. Korollar. *Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist*

$$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$$

beliebig oft komplex differenzierbar, und für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(k)} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f^{(k)}(z) = k! \sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} a_n (z-z_0)^{n-k} \tag{51}$$

wobei die Potenzreihen (51) *wieder Konvergenzradius r haben. Insbesondere gilt*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Beweis. Dies folgt mittels Induktion aus Satz 2.3.3. □

2.3.6. Korollar. *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(z-z_0)^n$ *zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien* $r > 0$ *und* $\tilde{r} > 0$. *Weiters sei* $U \subseteq B_r(z_0) \cap B_{\tilde{r}}(z_0)$ *eine Umgebung von* z_0 *mit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(z-z_0)^n$ *für alle* $z \in U$. *Dann gilt* $r = \tilde{r}$, *und* $a_n = \tilde{a}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 2.3.5, siehe (52). □

2.3.7. Definition (Stammfunktionen). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$ gilt.

2.3.8. Korollar. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$, *und*

$$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{53}$$

Dann hat auch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ *Konvergenzradius* r, *und*

$$F : B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \tag{54}$$

ist eine Stammfunktion von f.

Beweis. Wenden wir Satz 2.3.3 auf die Potenzreihe (54) an, dann sehen wir, dass sie den gleichen Konvergenzradius wie (53) hat und $F' = f$ gilt. □

Für die folgenden Formeln für den Konvergenzradius erinnern uns noch an die Definition des *Limes superior* und der *Limes inferior* einer Folge reeller Zahlen:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \bigl(\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}\bigr) \tag{55}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \bigl(\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}\bigr) \tag{56}$$

2.3.9. Proposition (Formel von Cauchy–Hadamard). *Der Konvergenzradius* r *einer Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist durch*

$$r = \Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Bigr)^{-1}$$

gegeben, wobei die Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} = 0$ *Anwendung finden.*

Beweis. Setze $R := \bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\bigr)^{-1}$. Um $r \le R$ einzusehen, genügt es zu zeigen, dass für jedes s mit $0 < s < r$ auch $s \le R$ gilt. Sei also $0 < s < r$. Nach Lemma 2.3.2 gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n|s^n = 0$. Insbesondere existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n|s^n \le 1$ und daher auch $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{s}$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Es folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{s}$ also $R \ge s$.

Um $R \le r$ einzusehen, reicht es zu zeigen, dass für jedes t mit $0 < t < R$ auch $t \le r$ gilt. Sei also $0 < t < R$. Dann gilt $\frac{1}{t} > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wegen (55) existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{t} \ge \sqrt[n]{|a_n|}$, und daher auch $1 \ge |a_n|t^n$, für alle $n \ge n_0$. Die Folge $|a_n|t^n$ ist also beschränkt und daher $t \le r$. □

Zur Berechnung des Konvergenzradiuses ist folgendes Resultat oft hilfreich.

2.3.10. Proposition (Quotientenkriterium). *Es sei* $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe und fast alle* $a_n \neq 0$. *Dann gilt für ihren Konvergenzradius* r

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq r \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Inbesondere gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

falls dieser Limes existiert.

Beweis. O.B.d.A. seien alle $a_n \neq 0$. Setzte $S := \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Um $S \leq r$ zu erhalten, genügt es zu zeigen, dass für jedes s mit $0 < s < S$ auch $s \leq r$ gilt. Sei also $0 < s < S$. Wegen (56) existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \geq s$ für alle $n \geq n_0$. Mittels Induktion folgt sofort $|a_{n_0+k}|s^{n_0+k} \leq |a_{n_0}|s^{n_0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $|a_n|s^n$ ist also beschränkt und daher $s \leq r$.

Für die zweite Ungleichung setze $T := \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Um $r \leq T$ einzusehen, reicht es zu zeigen, dass für jedes t mit $T < t < \infty$ auch $r \leq t$ gilt. Sei also $T < t < \infty$. Wegen (55) existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq t$ für alle $n \geq n_0$. Mittels Induktion folgt sofort $|a_{n_0}|t^{n_0} \leq |a_{n_0+k}|t^{n_0+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $|a_{n_0}|t^{n_0} > 0$, ist die Folge $|a_n|t^n$ keine Nullfolge, und daher $r \leq t$, siehe Lemma 2.3.2. □

2.3.11. Beispiel (Die Exponentialfunktion). Mit Hilfe der Quotientenregel sehen wir, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}z^n$ überall konvergiert. Also definiert

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

eine holomorphe Funktion, die die *komplexe Exponentialfunktion* genannt wird. Offensichtlich gilt $\exp(0) = 1$. Für ihre Ableitung finden wir $\exp'(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n!}z^{n-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}z^{n-1} = \exp(z)$, also

$$\exp'(z) = \exp(z). \tag{57}$$

Aus $\overline{\sum_{n=0}^k \frac{z^k}{k!}} = \sum_{n=0}^k \frac{\bar z^k}{k!}$ erhalten wir mit $k \to \infty$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar z). \tag{58}$$

Beachte, dass die komplexe Exponentialfunktion bei reellen Argumenten mit der aus der Analysisvorlesung bekannten gleichnamigen Funktion überein stimmt.

2.3.12. Beispiel (Der komplexe Logarithmus). Mit Hilfe des Quotientenkriteriums sehen wir, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ Konvergenzradius 1 hat. Also definiert

$$L : B_1(1) \to \mathbb{C}, \quad L(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \tag{59}$$

eine holomorphe Funktion. Offensichtlich gilt $L(1) = 0$. Da

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty (1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z},$$

siehe Übungsaufgabe 15, folgt aus Satz 2.3.3

$$L'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in B_1(1). \tag{60}$$

Erinnern wir uns an den Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$, siehe Beispiel 2.2.7, sehen wir also $(L - \log)' = 0$ auf $B_1(1)$ und $(L - \log)(1) = 0$. Nach Korollar 2.2.6 gilt daher $\log(z) = L(z)$ für alle $z \in B_1(1)$, d.h.

$$\log(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \quad \text{für alle } z \in B_1(1).$$

2.3.13. Beispiel (Die komplexen Winkelfunktionen). Da die Exponentialreihe, siehe Beispiel 2.3.11, überall konvergiert gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, siehe Proposition 2.3.10. Wenden wir Proposition 2.3.10 auf die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ an, sehen wir, dass auch sie überall konvergiert. Also definiert

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

eine holomorphe Funktion, die die *komplexe Sinusfunktion* genannt wird. Genauso sehen wir, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ überall konvergiert. Daher definiert

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

eine holomorphe Funktion, die die *komplexe Cosinusfunktion* genannt wird. Aus Satz 2.3.3 folgt sofort

$$\sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z). \tag{61}$$

Offensichtlich gilt auch

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z). \tag{62}$$

Wie in Beispiel 2.3.11 erhalten wir

$$\overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}) \quad \text{und} \quad \overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}).$$

Auch die komplexe Sinus- und Cosinusfunktionen stimmen bei reellen Argumenten mit den aus der Analysis bekannten gleichnamigen Funktionen überein.

2.3.14. Beispiel (Eulersche Formel). Da $\mathbf{i}^{2n} = (-1)^n$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{2k+1} \frac{(\mathbf{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\mathbf{i}z)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{k} \frac{(\mathbf{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{i}\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Mit $k \to \infty$ erhalten wir die *Eulersche Formel*

$$e^{\mathbf{i}z} = \cos(z) + \mathbf{i}\sin(z). \tag{63}$$

Insbesondere gilt

$$e^{2\mathbf{i}\pi} = 1, \quad e^{\mathbf{i}\pi} = -1, \quad e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i} \quad \text{und} \quad e^{-\mathbf{i}\pi/2} = -\mathbf{i}. \tag{64}$$

Aus (63) und (62) folgt sofort

$$\sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-\mathbf{i}z}}{2}. \tag{65}$$

2.4. Mehr über klassische Funktionen.

2.4.1. Definition (Periodische Funktionen). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die additive Untergruppe

$$\operatorname{Per}(f) := \Big\{ p \in \mathbb{C} \ \Big| \ p + U = U \text{ und } f(z+p) = f(z) \text{ für alle } z \in U \Big\} \subseteq (\mathbb{C}, +)$$

heißt die *Gruppe der Perioden von* f. Ist $\operatorname{Per}(f) \neq \{0\}$ dann heißt f *periodisch,* und jedes $0 \neq p \in \operatorname{Per}(f)$ heißt eine *Periode* von f.

2.4.2. Proposition (Exponentialfunktion). *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \tag{66}$$

sowie $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$. *Die Exponentialfunktion liefert also einen Gruppenhomomorphismus* $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$. *Dieser Homomorphismus ist surjektiv. Weiters gilt*

$$\exp(x + \mathbf{i}y) = e^x\big(\cos y + \mathbf{i}\sin y\big) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{67}$$

Der Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C}^- \to \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\} \to \mathbb{C}^-$, *d.h. es gilt*

$$\exp(\log(z)) = z \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^-, \tag{68}$$

sowie

$$\log(\exp(z)) = z \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |\operatorname{Im} z| < \pi. \tag{69}$$

Weiters gilt

$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z), \tag{70}$$

und $|\exp(z)| = 1$ *genau dann wenn* $z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$. *Wir erhalten daher einen surjektiven Homomorphismus* $\exp : (\mathbf{i}\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot)$. *Weiters gilt*

$$\operatorname{Per}(\exp) = \operatorname{Kern}(\exp) = 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}.$$

Insbesondere wird also jeder Wert in $\mathbb{C}^\times$ *von der Exponentialfunktion abzählbar unendlich oft angenommen.*

Beweis. Wir haben (66) schon in Beispiel 1.4.9 gezeigt, wollen hier aber noch einen anderen Beweis kennen lernen. Für fixes $v \in \mathbb{C}$ betrachten wir die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)\exp(v - z)$. Aus (57) schließen wir $f' = 0$ und wegen Korollar 2.2.6 also $f(z) = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zusammmen mit $\exp(0) = 1$ erhalten wir $\exp(z)\exp(v - z) = \exp(0)\exp(v - 0) = \exp(v)$ für alle $v, z \in \mathbb{C}$. Setzen wir $v = w + z$ folgt schließlich (66). Insbesondere erhalten wir $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$, daher $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$. Aus (66) und der Eulerschen Formel (63) folgt (67). Damit sehen wir auch, dass für $|\operatorname{Im} z| < \pi$ tatsächlich $\exp(z) \in \mathbb{C}^-$ gilt. Um (68) einzusehen, betrachten wir die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\exp(\log(z))}{z}$. Unter Zuhilfenahme der Quotientenregel, der Kettenregel (57) und (44) folgt $f' = 0$. Nach Korollar 2.2.6 muss f daher konstant $\exp(\log(1)) = \exp(0) = 1$ sein, woraus (68) folgt. Auch bei (69) können wir ähnlich vorgehen. Betrachte die holomorphe Funktion $g : \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \log(\exp(z)) - z$. Dann ist $g' = 0$ und da $g(0) = 0$ folgt (69). Die Surjektivität von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ folgt aus (67) und bekannten Eigenschaften der reellen Sinus- und Cosinusfunktion. Alternativ dazu können wir aber auch wie folgt vorgehen. Wegen (68) gilt zumindest $\mathbb{C}^- \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Aus (66) und (64) folgt $\exp(z + \mathbf{i}\pi) = -\exp(z)$, und daher $-\exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C})$. Damit erhalten wir $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^- \cup (-\mathbb{C}^-) \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Also ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ surjektiv. Wegen (58) und (66) gilt:

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\bar{z}) \\ = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re} z) = \big(\exp(\operatorname{Re} z)\big)^2$$

Da für reelle x offensichtlich immer $\exp(x) > 0$ gilt, folgt (70). Für reelle x gilt $\exp(x) = 1$ genau dann, wenn $x = 0$. Zusammen mit (70) folgt $|\exp(z)| = 1$ genau dann wenn $\operatorname{Re} z = 0$, also genau dann, wenn $z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$. Aus (66) folgt $\operatorname{Per}(\exp) = \operatorname{Kern}(\exp)$. Wegen (64) gilt $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{Kern}(\exp)$. Ist Umgekehrt $z \in \operatorname{Kern}(\exp)$, dann auch $|\exp(z)| = 1$, also $z = \mathbf{i}y$ für ein $y \in \mathbb{R}$, und wegen (67) $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Aus der Analysisvorlesung wissen wir, dass dann $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ folgt, also $z = \mathbf{i}y \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$. Damit ist auch $\operatorname{Kern}(\exp) = 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$ gezeigt. □

2.4.3. Bemerkung (Polarkoordinaten). Nach Proposition 2.4.2 lässt sich also jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als $z = re^{\mathbf{i}\theta}$ mit $r = |z| \geq 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ schreiben. Dabei ist jedoch θ nicht eindeutig bestimmt. Für $z = 0$ ist θ völlig beliebig, und für $z \neq 0$ nur bis auf Addition einer Zahl in $2\pi\mathbb{Z}$ wohlbestimmt. Die Multiplikation komplexer Zahlen, die in dieser Form gegeben sind ist besonders einfach:

$$r_1e^{\mathbf{i}\theta_1} \cdot r_2e^{\mathbf{i}\theta_2} = r_1r_2e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

Ist $z \in \mathbb{C}^-$, dann können wir $\theta \in (-\pi, \pi)$ wählen, und in diesem Fall ist $\theta = \arg(z)$, also $\log(z) = \log r + \mathbf{i}\theta$.

2.4.4. Bemerkung. Ist $z \in \mathbb{C}^-$ und $s \in \mathbb{C}$ dann definieren wir

$$z^s := \exp(s\log(z)) \in \mathbb{C}^\times \tag{71}$$

Für eine detailiertere Diskussion dieser komplexen Potenzen verweisen wir auf Übungsaufgaben 32 und 34. Dort wird auch gezeigt, dass (71) für $s \in \mathbb{Z}$ mit der üblichen Definition übereinstimmt. Mit Hilfe von (71) erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, holomorphe Wurzelfunktionen

$$\mathbb{C}^- \xrightarrow{\sqrt[k]{\ }} \mathbb{C}^\times, \quad \sqrt[k]{z} := z^{1/k} := \exp(\log(z)/k) \quad k \in \mathbb{N},\, k \geq 1. \tag{72}$$

Wegen (66) gilt stets

$$\big(\sqrt[k]{z}\big)^k = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } k \in \mathbb{N},\, k \geq 1.$$

Weiters gilt, vgl. (45),

$$\sqrt[k]{z_1z_2} = \sqrt[k]{z_1} \cdot \sqrt[k]{z_2} \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}^- \text{ mit } |\arg(z_1) + \arg(z_2)| < \pi. \tag{73}$$

Ist $z = re^{\mathbf{i}\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi)$, dann gilt $\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r}e^{\mathbf{i}\theta/k}$. Daraus sehen wir auch sofort, dass (73) ohne die Zusatzvoraussetzung $|\arg(z_1) + \arg(z_2)| < \pi$ falsch wird. Ist $z_0 \in (-\infty, 0)$, und sind a_n, b_n Folgen mit $\operatorname{Im} a_n > 0$, $\operatorname{Im} b_n < 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = z_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{|z_0|}e^{\mathbf{i}\pi/k} \neq \sqrt[k]{|z_0|}e^{-\mathbf{i}\pi/k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{b_n}.$$

Für $k \geq 2$ kann also (72) nicht stetig auf $\mathbb{C}^\times$ fortgesetzt werden.

2.4.5. Proposition (Sinus und Cosinus). *Die Funktionen* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind surjektiv, und es gelten die Additionstheoreme*

$$\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w) \tag{74}$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \tag{75}$$

sowie

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1. \tag{76}$$

als auch

$$\sin(z+\pi/2) = \cos(z) \quad \textit{und} \quad \cos(z+\pi/2) = -\sin(z) \tag{77}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. *Die Nullstellenmenge der komplexen Sinusfunktion ist* $\pi\mathbb{Z}$. *Die Nullstellenmenge der komplexen Cosinusfunktion ist* $\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$. *Für die Perioden gilt*

$$\operatorname{Per}(\sin) = \operatorname{Per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Insbesondere wird also jeder Wert in $\mathbb{C}$ *sowohl von der Sinus- wie auch von der Cosinusfunktion abzählbar unendlich oft angenommen.*

Beweis. Die beiden Gleichungen (74) und (75) folgen aus (65) und (66) durch einfache Rechnung. Setzen wir in (75) $w = -z$ so erhalten wir (76), siehe (62). Aus der reellen Analysis wissen wir $\sin(\pi/2) = 1$ und $\cos(\pi/2) = 0$, woraus sofort (77) folgt. Nun zur Surjektivität der Sinusfunktion. Sei $w \in \mathbb{C}$. Für $u := \mathbf{i}w + \sqrt{1-w^2}$ gilt[13] $u \neq 0$ und $u^2 - 2\mathbf{i}wu - 1 = 0$, also auch $u - u^{-1} = 2\mathbf{i}w$. Wegen Proposition 2.4.2 existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{\mathbf{i}z} = u$. Mit (65) folgt $\sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}} = \frac{u-u^{-1}}{2\mathbf{i}} = w$. Also ist $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv. Die Surjektivität der Cosinusfunktion folgt nun aus (77). Wegen (65) gilt $\sin(z) = 0$ genau dann wenn $e^{2\mathbf{i}z} = 1$. Nach Proposition 2.4.2 tritt dies genau dann ein wenn $z \in \pi\mathbb{Z}$. Daher stimmt die Nullstellenmenge der Sinusfunktion mit $\pi\mathbb{Z}$ überein. Die Nullstellenmenge der Cosinusfunktion kann nun mittels (77) bestimmt werden. Aus (74) folgt, dass $p \in \operatorname{Per}(\sin)$ genau dann, wenn $\sin(p) = 0$ und $\cos(p) = 1$ gilt. Zusammen mit dem Wissen über die Nullstellenmege der Sinusfunktion sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $p \in 2\pi\mathbb{Z}$. Wegen (77) gilt $\operatorname{Per}(\sin) = \operatorname{Per}(\cos)$. □

2.4.6. Proposition (Tangens und Cotangens). *Die Funktionen*

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \pi(\tfrac{1}{2}+\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}, \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2\mathbf{i}z} - 1}{\mathbf{i}(e^{2\mathbf{i}z} + 1)} \tag{78}$$

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{\mathbf{i}(e^{2\mathbf{i}z} + 1)}{e^{2\mathbf{i}z} - 1} \tag{79}$$

sind holomorph mit Ableitungen

$$\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z) \quad \textit{und} \quad \cot'(z) = \frac{-1}{\sin^2(z)} = -1 - \cot^2(z).$$

Die Abbildungen (78) *und* (79) *sind surjektiv. Es gelten die Additionstheoreme*

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}$$
$$\cot(z+w) = \frac{\cot(z)\cot(w) - 1}{\cot(z) + \cot(w)}$$

[13] Hier bezeichnet $\sqrt{1-w^2}$ eine Quadratwurzel von $1-w^2$, vgl. Übungsaufgaben 4 und 5.

wann immer beide Seiten definiert sind. Weiters gilt

$$\tan(z+\pi/2) = -\cot(z) \quad \textit{sowie} \quad \cot(z+\pi/2) = -\tan(z).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{z\to\pi(\frac{1}{2}+n)} |\tan(z)| = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{z\to\pi n} |\cot(z)| = \infty,$$

Tangens und Cotangens können also nicht stetig auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Die Nullstellenmenge der Tangensfunktion ist $\pi\mathbb{Z}$, die Nullstellenmenge der Cotangensfunktion $\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$. Für die Perioden gilt

$$\mathrm{Per}(\tan) = \mathrm{Per}(\cot) = \pi\mathbb{Z}.$$

Insbesondere wird also jeder Wert in $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ sowohl von der Tangens- wie auch von der Cotangensfunktion abzählbar unendlich oft angenommen.

Beweis. Dies folgt alles leicht aus den oben besprochenen Eigenschaften von sin, cos und exp, siehe Übungsaufgabe 28. □

3. Wegintegrale und das Integrallemma von Goursat

In diesem Kapitel wollen wir Kurvenintegrale behandeln. In Abschnitt 3.1 wiederholen wir Integrale und Ableitung von komplexwertigen Funktionen die auf reellen Intervallen definiert sind. In Abschnitt 3.2 definieren wir Wege als stückweise stetig differenzierbare Abbildung von einem reellen Itervall in die komplexe Ebene. Dies verursacht einige technische Unannehmlichkeiten, in Anwendungen werden wir aber oft solchen Wegen begegnen. In Abschnitt 3.3 führen wir dann den zentralen Begriff des Kurvenintegrals ein, und beweisen einige fundamentale Eigenschaften, wie die Reparametrisierungsinvarianz und eine Abschätzung durch die Länge des Weges. Abschnitt 3.4 ist von der Frage dominiert, inwiefern ein zum Hauptsatz der Differential und Intergalrechnung analoges Resultat für diese Kurvenintegrale gilt. Die Situation ist hier ein wenig komplizierter als in der eindimensionalen reellen Analysis. Im Abschnitt 3.5 beweisen wir ein eintscheidendes erstes Resultat der Funktionentheorie — das Integrallemma von Goursat. Zwei Korollare davon seien hier schon erwähnt: Holomorphe Funktionen sind lokal integrabel, d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung auf der eine Stammfunktion existiert; und es gilt der Cauchysche Integralsatz, d.h. das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion längs des Randes einer Kreisscheibe, deren Abschluss zur Gänze im Definitionsgebiet der Funktion liegt, verschwindet.

3.1. Integrale komplexwertiger Funktionen. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Für $a, b \in I$ definieren wir

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b (\mathrm{Re}\, f)(t)dt + \mathbf{i}\int_a^b (\mathrm{Im}\, f)(t)dt. \tag{80}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Re}\, f : I \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{Re}\, f)(t) := \mathrm{Re}(f(t))$ den Realteil und $\mathrm{Im}\, f : I \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{Im}\, f)(t) := \mathrm{Im}(f(t))$ den Imaginärteil von f, also $f = \mathrm{Re}\, f + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}\, f$. Mit f sind natürlich auch $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ stetig. Die Integrale auf der rechten Seite von (80) bezeichnen die aus der Analysisvorlesung bekannten Riemannintegrale stetiger reellwertiger Funktionen. Bis auf die Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ist $\int_a^b f(t)dt$ natürlich genau das Riemannintegral der stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}^2$, das ja auch in der Analysis besprochen wurde. Dementsprechend gelten die üblichen elementaren Eigenschaften.

3.1.1. Proposition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{C}$ stetig, $a, b, x \in I$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{Re}\big(\int_a^b f(t)dt\big) = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt$ *und* $\operatorname{Im}\big(\int_a^b f(t)dt\big) = \int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)dt$.
(ii) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
(iii) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ *und* $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
(iv) $\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
(v) $\big|\int_a^b f(t)dt\big| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Beweis. Behauptung (i) ist wirklich nur unsere Definition, siehe (80). Ad (ii): Nach (i) und dem entsprechendem Resultat für rellwertige Funktionen gilt

$$\operatorname{Re}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt = -\int_b^a (\operatorname{Re} f)(t)dt = \operatorname{Re}\Big(-\int_b^a f(t)dt\Big).$$

Genauso lässt sich $\operatorname{Im}\int_a^b f(t)dt = \operatorname{Im}\big(-\int_b^a f(t)dt\big)$ zeigen, woraus (ii) folgt. Ad (iii): Aus (i) und der Linearität des Integrals reellwertiger Funktionen schließen wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_a^b (f+g)(t)dt &= \int_a^b \big(\operatorname{Re}(f+g)\big)(t)dt \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g)(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt + \int_a^b (\operatorname{Re} g)(t)dt \\ &= \operatorname{Re}\int_a^b f(t)dt + \operatorname{Re}\int_a^b g(t)dt = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\right).\end{aligned}$$

Genauso lässt sich $\operatorname{Im}\int_a^b (f+g)(t)dt = \operatorname{Im}\big(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\big)$ zeigen, woraus die erste Behauptung in (iii) folgt. Um die zweite Aussage zu sehen verwenden wir wieder (ii) sowie die Linearität des Integrals reellwertiger Funktionen und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_a^b (\lambda f)(t)dt &= \int_a^b \big(\operatorname{Re}(\lambda f)\big)(t)dt = \int_a^b \big(\operatorname{Re}\lambda \operatorname{Re} f - \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} f\big)(t)dt \\ &= \operatorname{Re}\lambda \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt - \operatorname{Im}\lambda \int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)dt \\ &= \operatorname{Re}\lambda \operatorname{Re}\int_a^b f(t)dt - \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\int_a^b f(t)dt = \operatorname{Re}\Big(\lambda \int_a^b f(t)dt\Big).\end{aligned}$$

Genauso lässt sich $\operatorname{Im}\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \operatorname{Im}\big(\lambda \int_a^b f(t)dt\big)$ zeigen, woraus der zweite Teil von (iii) folgt. Ad (iv): Wieder verwenden wir (i) und die entsprechende Aussage über Integrale reellwertiger Funtionen um

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt\right) &= \int_a^x (\operatorname{Re} f)(t)dt + \int_x^b (\operatorname{Re} f)(t)dt \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt = \operatorname{Re}\int_a^b f(t)dt\end{aligned}$$

zu erhalten. Genauso lässt sich $\operatorname{Im}\big(\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt\big) = \operatorname{Im}\int_a^b f(t)dt$ zeigen, woraus dann (iv) folgt. Nun zu (v): Es existiert $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $\lambda \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}$. Wegen

(i) und (iii) gilt dann $\lambda\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Re}\big(\lambda\int_a^b f(t)dt\big) = \int_a^b\big(\mathrm{Re}(\lambda f)\big)(t)dt$, also

$$\Big|\lambda\int_a^b f(t)dt\Big| = \Big|\int_a^b\big(\mathrm{Re}(\lambda f)\big)(t)dt\Big| \leq \int_a^b\big|\big(\mathrm{Re}(\lambda f)\big)(t)\big|dt. \tag{81}$$

Hier haben wir die zu (v) analoge Eigenschaft reellwertiger Funktionen verwendet. Da $\big|\big(\mathrm{Re}(\lambda f)\big)(t)\big| \leq \big|(\lambda f)(t)\big| = |\lambda||f(t)|$ folgt aus (81) und der Monotonie des Integrals reellwertiger Funktionen

$$\begin{aligned}|\lambda|\Big|\int_a^b f(t)dt\Big| &= \Big|\lambda\int_a^b f(t)dt\Big| \\ &\leq \int_a^b\big|\big(\mathrm{Re}(\lambda f)\big)(t)\big|dt \leq \int_a^b|\lambda||f(t)|dt = |\lambda|\int_a^b|f(t)|dt.\end{aligned}$$

Wegen $|\lambda| \neq 0$ erhalten wir daraus Behauptung (v). □

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *bei $t_0 \in I$ differenzierbar* falls der folgende Grenzwert existiert

$$f'(t_0) := \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \tag{82}$$

Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar,* falls sie bei jedem $t_0 \in I$ differenzierbar ist.[14] In diesem Fall heißt die durch (82) definierte Fuktion $f' : I \to \mathbb{C}$ die Ableitung von f. Jede differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist stetig. Ist $f' : I \to \mathbb{C}$ stetig, so heißt f *stetig differenzierbar.* Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist genau dann (stetig) differenzierbar, wenn $\mathrm{Re}\, f : I \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}\, f : I \to \mathbb{R}$ beide (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$f'(t) := (\mathrm{Re}\, f)'(t) + \mathbf{i}(\mathrm{Im}\, f)'(t). \tag{83}$$

Bis auf die Identification $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist dies genau der Differenzierbarkeitsbegriff der reellen Analysis. Demensprechend gelten die üblichen elementaren Eigenschaften.

3.1.2. Proposition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Sei weiters $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f(I) \subseteq U$. Schließlich sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Re}(f') = (\mathrm{Re}\, f)'$ *und* $\mathrm{Im}(f') = (\mathrm{Im}\, f)'$.
(ii) *$f + g$ ist differenzierbar und es gilt die Summenregel $(f + g)' = f' + g'$.*
(iii) *fg ist differenzierbar und es gilt die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$.*
(iv) *Ist $g(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar und es gilt die Quotientenregel $\big(\frac{f}{g}\big)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.*
(v) *$f \circ \varphi$ ist differenzierbar und es gilt die Kettenregel $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$.*
(vi) *$h \circ f$ ist differenzierbar und es gilt die Kettenregel $(h \circ f)' = (h' \circ f)f'$.*

Beweis. Diese Eigenschaften können wie in Abschnitt 2.1 bewiesen werden, oder aus den Eigenschaften differenzierbarer Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^2$ hergeleitet werden. Wir wollen sie hier auf die bekannten Eigenschaften reellwertiger differenzierbarer Funktionen $I \to \mathbb{R}$ zurückführen.

Behauptung (i) folgt aus (83). Ad (ii): Aus der Summenregel für die Ableitungen reellwertiger Funktionen wissen wir, dass $\mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}\, f+\mathrm{Re}\, g$ differenzierbar

[14]Ist einer, oder sind beide Randpunkte von I in I enthalten, sollen dort also auch die einseitigen Ableitungen existieren.

ist und $(\operatorname{Re}(f+g))' = (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Re} g)'$ gilt. Genauso ist $\operatorname{Im}(f+g)$ differenzierbar und es gilt $(\operatorname{Im}(f+g))' = (\operatorname{Im} f)' + (\operatorname{Im} g)'$. Also ist $f+g$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f+g)' &= (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Re} g)' + \mathbf{i}\big((\operatorname{Im} f)' + (\operatorname{Im} g)'\big) \\ &= (\operatorname{Re} f)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} f)' + (\operatorname{Re} g)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} g)' = f' + g'.\end{aligned}$$

Ad (iii): Aus der Produkt- und Summenregel für die Ableitungen reellwertiger Funktionen wissen wir, dass $\operatorname{Re}(fg) = (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} g) - (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} g)$ differenzierbar ist und es gilt

$$(\operatorname{Re}(fg))' = (\operatorname{Re} f)'(\operatorname{Re} g) + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} g)' - (\operatorname{Im} f)'(\operatorname{Im} g) - (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} g)'.$$

Genauso ist $\operatorname{Im}(fg) = (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Im} g) + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} g)$ differenzierbar und es gilt

$$(\operatorname{Im}(fg))' = (\operatorname{Re} f)'(\operatorname{Im} g) + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Im} g)' + (\operatorname{Im} f)'(\operatorname{Re} g) + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} g)'.$$

Also ist fg differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(fg)' &= (\operatorname{Re} f)'(\operatorname{Re} g) + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} g)' - (\operatorname{Im} f)'(\operatorname{Im} g) - (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} g)' \\ &\qquad + \mathbf{i}\Big((\operatorname{Re} f)'(\operatorname{Im} g) + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Im} g)' + (\operatorname{Im} f)'(\operatorname{Re} g) + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} g)'\Big) \\ &= \big((\operatorname{Re} f)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} f)'\big)\big((\operatorname{Re} g) + \mathbf{i}(\operatorname{Im} g)\big) \\ &\qquad + \big((\operatorname{Re} f) + \mathbf{i}(\operatorname{Im} f)\big)\big((\operatorname{Re} g)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} g)'\big) \\ &= f'g + fg'\end{aligned}$$

Ad (v): Aus der eindimensionalen Kettenregel folgt, dass $\operatorname{Re}(f\circ\varphi) = (\operatorname{Re} f)\circ\varphi$ differenzierbar ist und $(\operatorname{Re}(f\circ\varphi))' = ((\operatorname{Re} f)'\circ\varphi)\varphi'$ gilt. Genauso ist $\operatorname{Im}(f\circ\varphi) = (\operatorname{Im} f)\circ\varphi$ differenzierbar und es gilt $(\operatorname{Im}(f\circ\varphi))' = ((\operatorname{Im} f)'\circ\varphi)\varphi'$. Daher ist $f\circ\varphi$ differenzierbar und es folgt

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)' &= ((\operatorname{Re} f)'\circ\varphi)\varphi' + \mathbf{i}((\operatorname{Im} f)'\circ\varphi)\varphi' \\ &= \big(((\operatorname{Re} f)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} f)')\circ\varphi\big)\varphi' = (f'\circ\varphi)\varphi'.\end{aligned}$$

Ad (vi): Nach Satz 2.2.1 ist h reell differenzierbar. Aus der Kettenregel für Kompositionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ schließen wir dass $\operatorname{Re}(h\circ f) = (\operatorname{Re} h)\circ f$ differenzierbar ist und es gilt:

$$\big(\operatorname{Re}(h\circ f)\big)' = \big((\operatorname{Re} h)_x\circ f\big)(\operatorname{Re} f)' + \big((\operatorname{Re} h)_y\circ f\big)(\operatorname{Im} f)'.$$

Genauso ist $\operatorname{Im}(h\circ f) = (\operatorname{Im} h)\circ f$ differenzierbar und es gilt

$$\big(\operatorname{Im}(h\circ f)\big)' = \big((\operatorname{Im} h)_x\circ f\big)(\operatorname{Re} f)' + \big((\operatorname{Im} h)_y\circ f\big)(\operatorname{Im} f)'.$$

Also ist $h\circ f$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}(h\circ f)' &= \big((\operatorname{Re} h)_x\circ f\big)(\operatorname{Re} f)' + \big((\operatorname{Re} h)_y\circ f\big)(\operatorname{Im} f)' \\ &\qquad + \mathbf{i}\Big(\big((\operatorname{Im} h)_x\circ f\big)(\operatorname{Re} f)' + \big((\operatorname{Im} h)_y\circ f\big)(\operatorname{Im} f)'\Big)\end{aligned} \tag{84}$$

Nach Satz 2.2.1 gilt $h' = (\operatorname{Re} h)_x + \mathbf{i}(\operatorname{Im} h)_x$ also

$$(h'\circ f)f' = \big(\operatorname{Re} h)_x\circ f + \mathbf{i}(\operatorname{Im} h)_x\circ f\big)\big((\operatorname{Re} f)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} f)'\big)$$

Erinnern wir uns an die Cauchy–Riemann Gleichungen $(\operatorname{Re} h)_x = (\operatorname{Im} h)_y$ und $(\operatorname{Re} h)_y = -(\operatorname{Im} h)_x$, siehe Satz 2.2.1(iii), sehen wir, dass dies mit (84) überein.

Ad (iv): Wenden wir (iii) sowie (vi) mit $h : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $h(z) := z^{-1}$ an, siehe Beispiel 2.1.4, erhalten wir

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)' = \Big(f\frac{1}{g}\Big)' = f'\frac{1}{g} + f\Big(\frac{1}{g}\Big)' = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad \square$$

3.1.3. Definition (Stammfunktionen). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

3.1.4. Proposition (Hauptsatz). *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

(i) *Für jedes $a \in I$ ist die Funktion $F : I \to \mathbb{C}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f.*
(ii) *Für jede Stammfunktion F von f, und für alle $a, b \in I$ gilt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*

Beweis. Ad (i): Nach Proposition 3.1.1(i) und dem Hauptsatz für reellwertige Funktionen ist $\operatorname{Re} F : I \to \mathbb{R}$, $(\operatorname{Re} F)(x) = \operatorname{Re}\Big(\int_a^x f(t)dt\Big) = \int_a^x (\operatorname{Re} f)(t)dt$ eine Stammfunktion von $\operatorname{Re} f$. Genauso ist $\operatorname{Im} F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\operatorname{Im} f$. Daher ist F differenzierbar und es gilt

$$F' = (\operatorname{Re} F)' + \mathbf{i}(\operatorname{Im} F)' = \operatorname{Re} f + \mathbf{i} \operatorname{Im} f = f.$$

Also ist F eine Stammfunktion von f und wir haben (i) bewiesen. Nun zu (ii): Ist F eine Stammfunktion von f dann ist wegen Proposition 3.1.2(i) $\operatorname{Re} F$ eine Stammfunktion von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} F$ eine Stammfunktion von $\operatorname{Im} f$. Aus dem Hauptsatz für reellwertige Funktionen folgt nun:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt + \mathbf{i}\int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)dt \\
&= (\operatorname{Re} F)(b) - (\operatorname{Re} F)(a) + \mathbf{i}\big((\operatorname{Im} F)(b) - (\operatorname{Im} F)(a)\big) \\
&= \big((\operatorname{Re} F) + \mathbf{i}(\operatorname{Im} F)\big)(b) - \big((\operatorname{Re} F) + \mathbf{i}(\operatorname{Im} F)\big)(a) \\
&= F(b) - F(a) \qquad \square
\end{aligned}$$

Als unmittelbare Konsequenz von Proposition 3.1.4 halten wir noch fest

3.1.5. Proposition. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann gilt $f' = 0$ genau dann, wenn f konstant ist.*

Beweis. Gilt $f' = 0$, dann ist f stetig differenzierbar, und aus Proposition 3.1.4(ii) erhalten wir $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = \int_a^b 0dt = 0$ für alle $a, b \in I$. Also ist f konstant. Die Tatsache, dass für eine konstante Abbildung $f' = 0$ gilt ist trivial. $\square$

3.1.6. Proposition (Partielle Integration). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $g : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{C}$ von f*

$$\int_a^b (fg)(t)dt = (Fg)(b) - (Fg)(a) - \int_a^b (Fg')(t)dt.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Nach Proposition 3.1.2(iii) ist die Funktion $Fg : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit Ableitung $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$. Aus Proposition 3.1.4(ii) erhalten wir

$$\int_a^b (fg + Fg')(t)dt = (Fg)(b) - (Fg)(a)$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

3.1.7. Proposition (Substitutionsregel). *Sind I und J zwei Intervalle, $\varphi : J \to I$ stetig differenzierbar, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $a, b \in J$ dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Beweis. Nach Proposition 3.1.4 existiert eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{C}$ von f, und es gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \tag{85}$$

Aus Proposition 3.1.2(v) folgt $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Also ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(f \circ \varphi)\varphi'$. Nach Proposition 3.1.4(ii) gilt daher

$$\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a). \tag{86}$$

Aus (85) und (86) folgt nun die Behauptung. □

3.2. Wege und ihre Länge.

3.2.1. Definition (Wege). Unter einem *Weg* verstehen wir eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. D.h. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es existieren endlich viele $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist.[15] Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *geschlossen* falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Mit $\gamma^* : [a, b] \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir den zu γ *inversen Weg,* $\gamma^*(t) := \gamma(a + b - t)$. Ist $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ ein weiterer Weg, und gilt $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(\tilde{a})$, dann bezeichnen wir mit $\gamma\tilde{\gamma}$ den Weg der durch

$$\gamma\tilde{\gamma} : [a, b + \tilde{b} - \tilde{a}] \to \mathbb{C}, \quad (\gamma\tilde{\gamma})(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } a \leq t \leq b \\ \tilde{\gamma}(t - b + \tilde{a}) & \text{falls } b \leq t \leq b + \tilde{b} - \tilde{a} \end{cases}$$

gegeben ist. D.h. $\gamma\tilde{\gamma}$ ist der Weg, der zuerst γ und danach $\tilde{\gamma}$ durchläuft, er heißt die *Konkatenation* von γ und $\tilde{\gamma}$, oder auch der *Summenweg* von γ und $\tilde{\gamma}$.

3.2.2. Definition (Länge von Wegen). Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, und $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist. Unter der *Länge des Weges* γ verstehen wir die reelle nicht negative Zahl

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt.$$

[15] Insbesondere sollen an den Randpunkten die einseitigen Ableitungen existieren.

3.2.3. Bemerkung. Die Länge eines Weges ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der t_j. Um dies einzusehen betrachten wir $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist. Sei nun $1 \leq k \leq n$, $t' \in [t_{k-1}, t_k]$, und betrachte die verfeinerte Zerlegung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{k-1} \leq t' \leq t_k \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b. \tag{87}$$

Nach Proposition 3.1.1(iv) gilt

$$\int_{t_{k-1}}^{t'} |\gamma'(t)|dt + \int_{t'}^{t_k} |\gamma'(t)|dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt.$$

Berechnen wir die Länge des Weges mit Hilfe der verfeinerten Zerlergung (87) erhalten wir also wieder $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt$. Mittels Induktion sehen wir, dass wir sogar endlich viele solche Verfeinerungspunkte t' einfügen können und immer noch $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt$ erhalten. Sei nun $a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_m = b$ eine zweite Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wähle eine Zerlegung $a = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_p = b$, die sowohl $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ als auch $a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_m = b$ verfeinert. Nach obigem gilt dann

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt = \sum_{j=0}^{p} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |\gamma'(t)|dt = \sum_{j=0}^{m} \int_{s_{j-1}}^{s_j} |\gamma'(t)|dt.$$

Also ist die Definition der Länge wirklich unabhängig von der gewählten Zerlegung.

Die Länge eines Weges ist unabhängig von seiner Parametrisierung.

3.2.4. Proposition. *Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Weiters sei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, monoton wachsend und so, dass $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Dann ist auch $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{C}$ ein Weg, und es gilt $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist. Nach Proposition 3.1.2(v) ist dann $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit Ableitung $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$, und wir erhalten

$$L(\gamma \circ \varphi) = \int_c^d |(\gamma \circ \varphi)'(s)|ds = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))||\varphi'(s)|ds.$$

Da φ monoton wachsend ist, wissen wir aus der Analysisvorlesung, dass $\varphi'(s) \geq 0$ für alle $s \in [c, d]$. Mit Hilfe der Substitutionsformel für reellwertige Funktionen folgt

$$L(\gamma \circ \varphi) = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))||\varphi'(s)|ds = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))|\varphi'(s)ds = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = L(\gamma).$$

Damit ist das Lemma für stetig differenzierbare γ gezeigt. Sei nun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg, und $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist. Offensichtlich gilt

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} L\big(\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}\big). \tag{88}$$

Aus den Voraussetzungen an φ folgt sofort, dass $c = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = d$ existieren, mit $\varphi(s_j) = t_j$ für alle $0 \leq j \leq n$, und $\varphi([s_{j-1}, s_j]) \subseteq [t_{j-1}, t_j]$ für alle

$1 \leq j \leq n$. Also ist $(\gamma \circ \varphi)|_{[s_{j-1}, s_j]}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar. Damit ist $\gamma \circ \varphi$ ein Weg, und wir erhalten

$$L(\gamma \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{n} L\big((\gamma \circ \varphi)|_{[s_{j-1}, s_j]}\big). \tag{89}$$

Da wir die Aussage für stetig differenzierbare Wege schon bewiesen haben, gilt $L\big(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}\big) = L\big((\gamma \circ \varphi)|_{[s_{j-1}, s_j]}\big)$ für alle $1 \leq j \leq n$. Aus (88) und (89) folgt daher $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$. $\square$

Wege können immer stetig differenzierbar parametrisiert werden, genauer gilt

3.2.5. Lemma. *Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Dann existiert eine stetig differenzierbare streng monoton wachsende und bijektive Abbildung $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, sodass der reparametrisierte Weg $\gamma \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist.*[16]

Beweis. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Abbildung

$$\psi : [0, 1] \to [0, 1], \quad \psi(s) := s^2(s-2)^2$$

stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Weiters ist $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$. Für $c < d$ ist daher auch die Abbildung

$$\psi_{c,d} : [c, d] \to [c, d], \quad \psi_{c,d}(t) := c + (d-c)\psi\Big(\frac{t-c}{d-c}\Big)$$

stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und bijektiv. Wieder gilt $\psi'_{c,d}(c) = \psi'_{c,d}(d) = 0$. Sei nun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist. Definiere

$$\varphi : [a, b] \to [a, b], \quad \varphi(t) := \psi_{t_{j-1}, t_j}(t) \quad \text{falls } t_{j-1} \leq t \leq t_j.$$

Da $\psi_{t_{j-1}, t_j}(t_j) = t_j = \psi_{t_j, t_{j+1}}(t_j)$ ist dies wohl definiert und stetig. Da $\psi'_{t_{j-1}, t_j}(t_j) = 0 = \psi'_{t_j, t_{j+1}}(t_j)$ ist φ stetig differenzierbar. Offensichtlich ist φ auch streng monoton wachsend und bijektiv. Weiters ist $(\gamma \circ \varphi)|_{[t_{j-1}, t_j]} = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \circ \psi_{t_{j-1}, t_j}$ stetig differenzierbar. Für die Ableitung beim Randpunkt t_j gilt

$$\big((\gamma \circ \varphi)|_{[t_{j-1}, t_j]}\big)'(t_j) = \big(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}\big)'(t_j) \cdot \psi'_{t_{j-1}, t_j}(t_j) = 0.$$

Genauso erhalten wir $\big((\gamma \circ \varphi)|_{[t_j, t_{j+1}]}\big)'(t_j) = 0$. Also ist $\gamma \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. $\square$

3.2.6. Proposition. *Es seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(\tilde{a})$. Dann gilt:*

(i) $L(\gamma) = 0$ *genau dann, wenn γ konstant ist.*
(ii) $L(\gamma^*) = L(\gamma)$.
(iii) $L(\gamma\tilde{\gamma}) = L(\gamma) + L(\tilde{\gamma})$.

Beweis. Nach Lemma 3.2.5 existiert eine stetig differenzierbare monoton wachsende Bijektion $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, sodass $\gamma \circ \varphi$ stetig differenzierbar ist. Ad (i): Klarerweise hat jeder konstante Weg verschwindende Länge. Sei nun umgekehrt $L(\gamma) = 0$. Nach Proposition 3.2.4 gilt dann auch $0 = L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi) = \int_a^b |(\gamma \circ \varphi)'(t)| dt$. Da $t \mapsto |(\gamma \circ \varphi)'(t)|$ stetig und nicht negativ ist, muss $|(\gamma \circ \varphi)'(t)| = 0$ für alle $t \in [a, b]$

[16]Es ist sogar möglich dieses φ glatt, d.h. C^∞, zu wählen, wir werden dies aber nicht benötigen.

gelten. Also hat $\gamma\circ\varphi$ verschwindende Ableitung und ist daher konstant, siehe Proposition 3.1.5. Dann ist aber auch γ konstant. Ad (ii): Betrachte die stetig differenzierbare monoton wachsende Bijektion $\sigma:[a,b]\to[a,b]$, $\sigma(t):=a+b-\varphi(a+b-t)$. Offensichtlich gilt $(\gamma\circ\varphi)^*=\gamma^*\circ\sigma$. Nach Proposition 3.2.4 haben wir $L(\gamma)=L(\gamma\circ\varphi)$ und $L(\gamma^*)=L(\gamma^*\circ\sigma)=L((\gamma\circ\varphi)^*)$. Da $\gamma\circ\varphi$ stetig differenzierbar ist, erhalten wir aus der Kettenregel $((\gamma\circ\varphi)^*)'(t)=-(\gamma\circ\varphi)'(a+b-t)$. Mit Hilfe der Substitution $s=a+b-t$ folgt nun

$$\begin{aligned}L(\gamma^*)=L\big((\gamma\circ\varphi)^*\big)&=\int_a^b\big|((\gamma\circ\varphi)^*)'(t)\big|dt=\int_a^b\big|(\gamma\circ\varphi)'(a+b-t)\big|dt\\&=-\int_b^a\big|(\gamma\circ\varphi)'(s)\big|ds=\int_a^b\big|(\gamma\circ\varphi)'(s)\big|ds=L(\gamma\circ\varphi)=L(\gamma).\end{aligned}$$

Behauptung (iii) ist offensichtlich, da wir ja $L(\gamma\tilde\gamma)$ mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls $[a,b+\tilde b-\tilde a]$ berechnen können, die den Unterteilungspunkt b enthält. □

3.3. Kurvenintegrale.

3.3.1. Definition (Kurvenintegrale). Es sei $X\subseteq\mathbb{C}$, $f:X\to\mathbb{C}$ stetig und $\gamma:[a,b]\to X\subseteq\mathbb{C}$ ein Weg. Weiters seien $a=t_0\le t_1\le\cdots\le t_n=b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für jedes $1\le j\le n$ stetig differenzierbar ist. Dann heißt

$$\int_\gamma fdz:=\int_\gamma f(z)dz:=\sum_{n=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

das *Wegintegral* oder *Kurvenintegral* von f längs γ.

3.3.2. Bemerkung. Genau wie in Bemerkung 3.2.3 lässt sich zeigen, dass das Kurvenintegral wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der t_j abhängt.

Das Kurvenintegral hängt nicht von der Parametrisierung des Weges ab.

3.3.3. Proposition. *Sei $X\subseteq\mathbb{C}$, $f:X\to\mathbb{C}$ stetig, und $\gamma:[a,b]\to X\subseteq\mathbb{C}$ ein Weg. Sei weiters $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbar, monoton wachsend und so, dass $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$. Dann gilt*[17]

$$\int_{\gamma\circ\varphi}fdz=\int_\gamma fdz.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass γ stetig differenzierbar ist. Nach der Kettenregel, siehe Proposition 3.1.2(v), ist dann $\gamma\circ\varphi$ stetig differenzierbar mit Ableitung $(\gamma\circ\varphi)'=(\gamma'\circ\varphi)\varphi'$. Mit Hilfe der Substitutionsformel aus Proposition 3.1.7 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi}fdz=\int_c^d f\big((\gamma\circ\varphi)(s)\big)\cdot(\gamma\circ\varphi)'(s)ds&=\int_c^d\big((f\circ\gamma)\gamma'\big)(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)ds\\&=\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)}\big((f\circ\gamma)\gamma'\big)(t)dt=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_\gamma fdz.\end{aligned}$$

[17] Dies bleibt für beliebiges stetig differenzierbares $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ mit $\varphi(c)=a$ und $\varphi(d)=b$ richtig. Für stetig differenzierbares γ folgt dies aus derselben Rechnung, für stückweise stetig differenzierbares γ ist der Beweis jedoch etwas umständlicher.

Damit ist die Proposition für stetig differenzierbare Wege bewiesen. Sei nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg, und $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für alle $1 \leq j \leq n$ stetig differenzierbar ist. Nach Definition gilt dann

$$\int_\gamma f dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f dz. \tag{90}$$

Aus den Voraussetzungen an φ folgt sofort, dass $c = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = d$ existieren, sodass $\varphi(s_j) = t_j$ für alle $0 \leq j \leq n$, und $\varphi([s_{j-1}, s_j]) = [t_{j-1}, t_j]$ für alle $1 \leq j \leq n$. Dann ist auch $(\gamma \circ \varphi)|_{[s_{j-1},s_j]}$ stetig differenzierbar, und nach Definition

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f dz = \sum_{j=1}^n \int_{(\gamma\circ\varphi)|_{[s_{j-1},s_j]}} f dz. \tag{91}$$

Da wir die Aussage für stetig differenzierbare Wege schon gezeigt haben, folgt $\int_{(\gamma\circ\varphi)|_{[s_{j-1},s_j]}} f dz = \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f dz$. Zusammen mit (90) und (91) erhalten wir also $\int_{\gamma\circ\varphi} f dz = \int_\gamma f dz$. □

Es gelten folgende elementare Eigenschaften des Kurvenintegrals.

3.3.4. Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiters seien $\gamma : [a,b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ und $\tilde\gamma : [\tilde a, \tilde b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma(b) = \tilde\gamma(\tilde a)$. Dann gilt:*

(i) $\int_{\gamma^*} f dz = -\int_\gamma f dz$.
(ii) $\int_\gamma (f+g) dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz$ *und* $\int_\gamma (\lambda f) dz = \lambda \int_\gamma f dz$.
(iii) $\int_{\gamma\tilde\gamma} f dz = \int_\gamma f dz + \int_{\tilde\gamma} f dz$.
(iv) $\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \|f\|_{\gamma([a,b])} \cdot L(\gamma)$.

Beweis. Wir beginnen mit (i). Sei zunächst γ stetig differenzierbar. Nach Proposition 3.1.2(v) gilt dann $(\gamma^*)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$. Unter Verwendung der Substitution $s = a+b-t$, siehe Proposition 3.1.7, und Proposition 3.1.1(ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma*} f dz &= \int_a^b f(\gamma^*(t))((\gamma^*)'(t)) dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t)) dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s) ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s) ds = -\int_\gamma f dz.\end{aligned}$$

Damit ist (i) für stetig differenzierbare Wege gezeigt. Sei nun γ ein beliebiger Weg. Nach Lemma 3.2.5 existiert eine stetig differenzierbare monoton wachsende Bijektion $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, sodass $\gamma\circ\varphi$ stetig differenzierbar ist. Betrachte $\sigma : [a,b] \to [a,b]$, $\sigma(t) := a+b-\varphi(a+b-t)$. Dann ist auch σ eine stetig differenzierbare monoton wachsende Bijektion. Offensichtlich gilt $(\gamma \circ \varphi)^* = \gamma^* \circ \sigma$. Da die Aussage für stetig differenzierbare Wege schon bewiesen ist, erhalten wir mit Hilfe von Proposition 3.3.3

$$\int_{\gamma^*} f dz = \int_{\gamma^*\circ\sigma} f dz = \int_{(\gamma\circ\varphi)^*} f dz = -\int_{\gamma\circ\varphi} f dz = -\int_\gamma f dz.$$

Damit ist (i) für beliebige Wege gezeigt. Behautung (ii) folgt sofort aus Proposition 3.1.1(iii). Behauptung (iii) ist offensichtlich, da wir ja $\int_{\gamma\tilde\gamma} f dz$ mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls $[a, b+\tilde b-\tilde a]$ berechnen können, die den Punkt b als Unterteilungspunkt enthält. Nun zu (iv). Nach Lemma 3.2.5 existiert eine streng monoton wachsende stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, sodass $\gamma \circ \varphi$ stetig differenzierbar ist. Nach Proposition 3.2.4 und Proposition 3.3.3 ändern sich beide Seiten der fraglichen Ungleichung nicht, wenn wir γ durch $\gamma\circ\varphi$ ersetzen. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass γ stetig differenzierbar ist. Aus Proposition 3.1.1(v) und der Monotonie des Integrals reellwertiger Funktionen erhalten wir dann

$$\Big|\int_\gamma f dz\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\Big| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$
$$\leq \|f\|_{\gamma([a,b])}\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \|f\|_{\gamma([a,b])} \cdot L(\gamma).$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

3.3.5. Proposition. *Es sei $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung $h' : U \to \mathbb{C}$.*[18] *Sei weiters $f : h(U) \to \mathbb{C}$ stetig, und $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Dann ist $h \circ \gamma : [a,b] \to h(U)$ ein Weg, $(f \circ h)h' : U \to \mathbb{C}$ stetig, und es gilt*

$$\int_{h\circ\gamma} f dz = \int_\gamma (f \circ h)h' dz.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 3.1.2(vi). □

3.3.6. Proposition. *Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$, und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen die auf X lokal gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Sei weiters $\gamma : [a,b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ ein Weg. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz.$$

Beweis. Da γ stetig ist, ist $\gamma([a,b])$ kompakt, siehe Proposition 1.9.2. Nach Proposition 1.10.3 konvergiert daher f_n auf $\gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\gamma([a,b])} = 0.$$

Zusammen mit Proposition 3.3.4(ii) und (iv) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_\gamma f_n dz - \int_\gamma f dz\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\int_\gamma (f_n - f)dz\Big| \leq \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\gamma([a,b])} \cdot L(\gamma) = 0,$$

also auch $\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz$. □

3.3.7. Korollar. *Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$, und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass die Reihe $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ auf X lokal gleichmäßig konvergiert. Sei weiters $\gamma : [a,b] \to X$ ein Weg. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty\int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz.$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.3.6 angewandt auf die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$, siehe auch Proposition 3.3.4(ii). □

[18] Wie schon früher bemerkt, werden wir bald sehen, dass jede holomorphe Funktion C^∞ ist. Die Voraussetzung, dass $h' : U \to \mathbb{C}$ stetig sei, ist daher überflüssig.

3.4. Integrable Funktionen. Der eine Teil des Hauptsatzes, siehe Proposition 3.1.4(ii), hat ein einfaches Analogon für Kurvenintegrale. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, und existiert eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$ von f, siehe Definition 2.3.7, dann können mit Hilfe dieser Stammfunktion, alle Kurvenintegrale von f berechnet werden. Genauer haben wir

3.4.1. Proposition. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$, und sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg. Dann gilt*

$$\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

In dieser Situation hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma f dz$ also nur von f und den beiden Endpunkten $\gamma(a)$, $\gamma(b)$, nicht aber vom eigentlichen Weg γ ab. Insbesondere ist $\int_\gamma f dz = 0$ falls γ geschlossen ist.

Beweis. Nach Lemma 3.2.5 existiert eine streng monoton wachsende stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, sodass $\gamma \circ \varphi$ stetig differenzierbar ist. Nach Proposition 3.3.3 ändern sich beide Seiten der fraglichen Gleichung nicht, wenn wir γ durch $\gamma \circ \varphi$ ersetzen. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist. Nach der Kettenregel gilt dann $(F \circ \gamma)' = (F' \circ \gamma)\gamma' = (f \circ \gamma)\gamma'$, siehe Proposition 3.1.2(vi). Also ist $F \circ \gamma$ eine Stammfunktion von $(f \circ \gamma)\gamma'$ im Sinn von Definition 3.1.3. Nach dem Hauptsatz, siehe Proposition 3.1.4(ii), gilt daher

$$\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \big((f \circ \gamma)\gamma'\big)(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

Es stellt sich nun die Frage welche Funktionen eine Stammfunktion besitzen. Wir geben ihnen einmal einen Namen.

3.4.2. Definition (Integrable Funktionen). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *integrabel* falls eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ existiert. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrabel* falls jeder Punkt in U eine Umgebung V besitzt, sodass $f|_V$ integrabel ist.

3.4.3. Beispiel. Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die Funktion $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ integrabel, siehe Korollar 2.3.8. Insbesondere sind $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und auch jedes Polynom integrabel. Die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, ist lokal integrabel: auf $\mathbb{C}^-$ ist $z \mapsto \log(z)$ eine lokale Stammfunktion, und auf $-\mathbb{C}^-$ ist $z \mapsto \log(-z)$ eine lokale Stammfunktion, siehe (44). Beachte jedoch, dass die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ nicht integrabel ist. Denn betrachten wir den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^\times$, $\gamma(t) := re^{\mathbf{i}t}$, $r > 0$, dann gilt $\gamma'(t) = \mathbf{i}re^{\mathbf{i}t}$ und daher

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\mathbf{i}t}} \mathbf{i}re^{\mathbf{i}t} dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{i} dt = 2\pi\mathbf{i} \neq 0.$$

Nach Proposition 3.4.1 kann $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ also nicht integrabel sein. Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ist nicht einmal lokal integrabel, denn

$$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{re^{\mathbf{i}t}} \mathbf{i}re^{\mathbf{i}t} dt = \int_0^{2\pi} re^{-\mathbf{i}t} \mathbf{i}re^{\mathbf{i}t} dt = \int_0^{2\pi} r^2 \mathbf{i} dt = 2\pi r^2 \mathbf{i} \neq 0.$$

Wäre die komplexe Konjugation lokal um 0 integrabel, dann müsste dieses Integral aber für hinreichend kleine $r > 0$ verschwinden, was nicht der Fall ist.

3.4.4. Schreibweise. Sind $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ dann bezeichnen wir mit

$$[z_0, z_1] := \big\{ z_0 + t(z_1 - z_0) \bigm| t \in [0,1] \big\}$$

die Strecke von z_0 nach z_1. Ist $f : [z_0, z_1] \to \mathbb{C}$ stetig, dann schreiben wir

$$\int_{[z_0,z_1]} f dz := \int_\gamma f dz = (z_1 - z_0) \int_0^1 f\big(z_0 + t(z_1 - z_0)\big) dt$$

wobei γ den Weg $\gamma : [0,1] \to [z_0, z_1]$, $\gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$ bezeichnet. Beachte, dass hier die Reihenfolge der Punkte wesentlich ist, denn es gilt $\int_{[z_0,z_1]} f dz = -\int_{[z_1,z_0]} f dz$, siehe Proposition 3.3.4(i).

3.4.5. Schreibweise. Sind $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dann bezeichnen wir mit Δ_{z_0,z_1,z_2} die konvexe Hülle der Punkte z_0, z_1, z_2, also das abgeschlossene Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1, z_2. Für den Rand des Dreiecks gilt

$$\partial\Delta_{z_0,z_1,z_2} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0].$$

Ist $f : \partial\Delta_{z_0,z_1,z_2} \to \mathbb{C}$ stetig dann schreiben wir

$$\int_{\partial\Delta_{z_0,z_1,z_2}} f dz := \int_{[z_0,z_1]} f dz + \int_{[z_1,z_2]} f dz + \int_{[z_2,z_0]} f dz.$$

Dies ist das Kurvenintegral von f längs des geschlossenen Weges der einmal den Rand des Dreiecks durchläuft. Beachte, dass auch hier die Reihenfolge der Eckpunkte entscheidend ist, denn es gilt $\int_{\partial\Delta_{z_0,z_1,z_2}} f dz = -\int_{\partial\Delta_{z_0,z_2,z_1}} f dz$, siehe Proposition 3.3.4(i).

Es gilt nun folgende partielle Umkehrung von Proposition 3.4.1.

3.4.6. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, und es gelte $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subseteq U$. Dann ist f lokal integrabel.*

Beweis. Sei $c \in U$ und $r > 0$, sodass $B_r(c) \subseteq U$. Es genügt eine Stammfunktion von $f|_{B_r(c)}$ zu konstruieren. Definiere

$$F : B_r(c) \to \mathbb{C}, \quad F(w) := \int_{[c,w]} f dz.$$

Sei $w_0 \in B_r(c)$ beliebig fix. Es genügt zu zeigen, dass F bei w_0 komplex differenzierbar ist und $F'(w_0) = f(w_0)$ gilt. Für alle $w \in B_r(c)$ gilt $\Delta_{c,w_0,w} \subseteq B_r(c)$, und nach Voraussetzung daher

$$0 = \int_{\partial\Delta_{c,w_0,w}} f dz = \int_{[c,w_0]} f dz + \int_{[w_0,w]} f dz + \int_{[w,c]} f dz \quad \text{für alle } w \in B_r(c).$$

Mittels Proposition 3.3.4(i) erhalten wir

$$F(w) - F(w_0) = \int_{[w_0,w]} f dz \quad \text{für alle } w \in B_r(c). \tag{92}$$

Offensichtlich gilt auch

$$\begin{aligned}\int_{[w_0,w]} f dz &= \int_{[w_0,w]} f(w_0) + f(z) - f(w_0) dz \\ &= f(w_0)(w - w_0) + \int_{[w_0,w]} f(z) - f(w_0) dz \quad \text{für alle } w \in B_r(c).\end{aligned}$$

Zusammen mit (92) und Proposition 3.3.4(iv) erhalten

$$\begin{aligned}\Big|F(w) - F(w_0) - f(w_0)(w - w_0)\Big| &= \Big|\int_{[w_0,w]} f(z) - f(w_0) dz\Big| \\ &\leq \|f - f(w_0)\|_{[w,w_0]} \cdot L\big([w_0, w]\big) \leq \|f - f(w_0)\|_{[w,w_0]} \cdot |w - w_0|,\end{aligned}$$

und daher

$$\left|\frac{F(w) - F(w_0)}{w - w_0} - f(w_0)\right| \leq \|f - f(w_0)\|_{[w,w_0]} \quad \text{für alle } w \in B_r(c),\, w \neq w_0.$$

Da f bei w_0 stetig ist gilt $\lim_{w \to w_0} \|f - f(w_0)\|_{[w,w_0]} = 0$, und wir schließen

$$\lim_{w \to w_0} \frac{F(w) - F(w_0)}{w - w_0} = f(w_0).$$

Damit ist F bei w_0 komplex differenzierbar, und es gilt $F'(w_0) = f(w_0)$. □

3.5. Das Integrallemma von Goursat. Wir zeigen nun, dass jede holomorphe Funktion lokal integrabel ist. Es gilt auch die Umkehrung, jede lokal integrable Funktion ist holomorph, wir werden dies aber erst in Kapitel 4 sehen. Um dies zu zeigen, verifizieren wir, dass die Bedingung in Proposition 3.4.6 erfüllt ist

3.5.1. Satz (Integrallemma von Goursat). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\Delta \subseteq U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

Beweis. Es seien $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Eckpunkte von Δ, d.h. $\Delta = \Delta_{z_0,z_1,z_2}$. Bezeichne mit $z_0' := \frac{1}{2}(z_1+z_2)$, $z_1' := \frac{1}{2}(z_0+z_2)$ und $z_2' := \frac{1}{2}(z_0+z_1)$ die Mittelpunkte der Kanten von Δ. Wir erhalten vier Dreiecke

$$\Delta_{z_0,z_2',z_1'}, \quad \Delta_{z_2',z_1,z_0'}, \quad \Delta_{z_1',z_0',z_2}, \quad \text{und} \quad \Delta_{z_0',z_1',z_2'}$$

die alle in Δ enthalten sind. Bezeichne mit Δ^1 eines dieser vier Dreiecke für das $\big|\int_{\partial\Delta^1} f dz\big|$ maximal ist. Wegen Proposition 3.3.4(i) und (iii) sowie Proposition 3.3.3 gilt dann

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial\Delta} f dz\Big| &= \Big|\int_{\partial\Delta_{z_0,z_2',z_1'}} f dz + \int_{\partial\Delta_{z_2',z_1,z_0'}} f dz + \int_{\partial\Delta_{z_1',z_0',z_2}} f dz + \int_{\partial\Delta_{z_0',z_1',z_2'}}\Big| \\ &\leq \Big|\int_{\partial\Delta_{z_0,z_2',z_1'}} f dz\Big| + \Big|\int_{\partial\Delta_{z_2',z_1,z_0'}} f dz\Big| \\ &\quad + \Big|\int_{\partial\Delta_{z_1',z_0',z_2}} f dz\Big| + \Big|\int_{\partial\Delta_{z_0',z_1',z_2'}}\Big| \leq 4\Big|\int_{\partial\Delta^1} f dz\Big|.\end{aligned}$$

Wir wenden nun die selbe Konstruktion auf Δ^1 an und erhalten ein Dreieck $\Delta^2 \subseteq \Delta^1$ für das gilt $\big|\int_{\partial\Delta^1} f dz\big| \leq 4\big|\int_{\partial\Delta^2} f dz\big|$. Induktiv fortfahrend konstruieren wir eine

Folge von Dreiecken $\Delta \supseteq \Delta^1 \supseteq \Delta^2 \supseteq \cdots$ mit $\left|\int_{\partial\Delta^n} f dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta^{n+1}} f dz\right|$. Wir schließen daraus

$$\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta^n} f dz\right| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{93}$$

Der Durchschnitt all dieser Dreiecke besteht aus genau einem Punkt, siehe Proposition 1.5.2,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta^n = \{c\}, \quad c \in U. \tag{94}$$

Nach Konstruktion der Dreiecke gilt klarerweise $L(\partial\Delta^{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta^n)$ also

$$L(\partial\Delta^n) = 2^{-n}L(\partial\Delta) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{95}$$

Außerdem gilt, wie für jedes Dreieck,

$$\max_{z,w\in\Delta^n} |z-w| \leq L(\partial\Delta^n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{96}$$

Die holomorphe Funktion $z \mapsto f(c) + f'(c)(z-c)$ besitzt eine Stammfunktion, etwa $z \mapsto f(c)(z-c) + \frac{1}{2}f'(c)(z-c)^2$, also folgt aus Proposition 3.4.1

$$\int_{\partial\Delta^n} f(c) + f'(c)(z-c)dz = 0.$$

Unter Verwendung von Proposition 3.3.4(ii) und (iv) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta^n} f dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta^n} f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)dz\right| \\ &\leq \max_{z\in\partial\Delta^n}\left\{\left|f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)\right|\right\}L(\partial\Delta^n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{97}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f in c komplex differenzierbar ist, existiert $\delta > 0$, sodass für alle $z \in U$ mit $0 < |z-c| \leq \delta$ gilt $\left|\frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c)\right| \leq \varepsilon$. Oder äquivalent,

$$\left|f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)\right| \leq \varepsilon|z-c| \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } |z-c| \leq \delta.$$

Nach (94) existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $z \in \Delta^m$ gilt $|z-c| \leq \delta$. Es folgt

$$\left|f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)\right| \leq \varepsilon|z-c| \quad \text{für alle } z \in \Delta^m.$$

Daraus, und aus (96) schließen wir

$$\max_{z\in\partial\Delta^m}\left\{\left|f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)\right|\right\} \leq \varepsilon L(\partial\Delta^m).$$

Zusammen mit (93), (97) und (95) erhalten wir

$$\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \leq 4^m\left|\int_{\partial\Delta^m} f dz\right| \leq 4^m\varepsilon L(\partial\Delta^m)^2 = \varepsilon L(\partial\Delta)^2.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ sein. □

3.5.2. Korollar. *Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist f lokal integrabel.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.5.1 und Proposition 3.4.6. □

3.6. Homotopie. Das Kurvenintegral von holomorphen Funktionen hängt im Allgemeinen sehr wohl vom Weg ab, jedoch nur von sehr wesentlichen Eigenschaften des Weges. Um dies durchsichtig formulieren zu können, führen wir nun den Begriff der Homotopie von Wegen ein.

3.6.1. Definition (Homotopie von Wegen). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Unter einer *Homotopie von Wegen in* U verstehen wir eine stetige Abbildung $H : [a,b]\times[0,1] \to U$, sodass für $s = 0$ und $s = 1$ die Abbildung $H_s : [a,b] \to U$, $H_s(t) := H(t,s)$ ein Weg im Sinn von Definition 3.2.1 ist, und darüber hinaus auch $H^a : [0,1] \to U$, $H^a(s) := H(a,s)$ sowie $H^b : [0,1] \to U$, $H^b(s) := H(b,s)$ Wege im Sinn von Definition 3.2.1 sind. Eine Homotopie H wie oben heißt *Homotopie relativ Endpunkten,* falls H^a und H^b konstante Wege sind. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ heißen *homotop relativ Endpunkten in* U*,* falls eine Homotopie relativ Endpunkten $H : [a,b]\times[0,1] \to U$ mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$ existiert. Unter einer *Homotopie geschlossener Wege* verstehen wir eine Homotopie $H : [a,b]\times[0,1] \to U$ mit $H^a = H^b$, d.h. $H^a(s) = H^b(s)$ für alle $s \in [0,1]$. Zwei geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ heißen homotop in U falls eine Homotopie geschlossener Wege $H : [a,b]\times[0,1] \to U$ existiert mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to U$ heißt *nullhomotop in* U*,* falls er in U homotop zu einem konstanten Weg ist.

3.6.2. Bemerkung. Beachte, dass homotop relativ Endpunkten in U zu sein eine Äquivalenzrelation ist. Genauso definiert Homotopie geschlossener Wege in U eine Äquivalenzrelation. Für genaue Formulierungen siehe Übungsbeispiel 44.

3.6.3. Beispiel (Reparametrisierte Wege sind homotop). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg, und $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(a) = a$ und $\varphi(b) = b$. Dann sind γ und $\gamma\circ\varphi$ homotop relativ Endpunkten in U. Eine Homotopie relative Endpunkten in U die dies bewerkstelligt ist leicht angegeben

$$H : [a,b] \times [0,1] \to U, \quad H(t,s) := \gamma\big((1-s)t + s\varphi(t)\big).$$

Offensichtlich ist H_s für jedes $s \in [0,1]$ ein Weg, und es gilt $H^a(s) = \gamma(a)$ sowie $H^b(s) = \gamma(b)$ für alle $s \in [0,1]$. Also ist dieses H tatsächlich eine Homotopie relativ Endpunkten in U. Wegen $H_0(t) = \gamma(t)$ und $H_1(t) = \gamma(\varphi(t))$ sind also γ und $\gamma \circ \varphi$ homotop relativ Enpunkten in U.

3.6.4. Beispiel. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $K \subseteq U$ konvex. Dann sind je zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to K \subseteq U$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ homotop relativ Endpunkten in U. Als Homotopie können wir

$$H : [a,b] \times [0,1] \to K \subseteq U, \quad H(t,s) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$

verwenden. Beachte, dass H wegen der Konvexheit von K wirklich Werte in $K \subseteq U$ hat. Offensichtlich ist H eine Homotopie relativ Endpunkten in U mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Insbesondere ist jeder geschlossene Weg $\gamma : [a,b] \to K \subseteq U$ nullhomotop in U, wir brauchen obiges ja bloss auf $\gamma_0 = \gamma$ und den konstanten Weg $\gamma_1 = \gamma(a) = \gamma(b)$ anwenden.

3.6.5. Beispiel. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $r > 0$, sodass $\bar{B}_r(c) \subseteq U$. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ der geschlossene Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \bar{B}_r(c) \subseteq U$, $\gamma(t) := c + re^{\mathbf{i}kt}$ nullhomotop in U. Dies folgt aus Beispiel 3.6.4, da ja $\bar{B}_r(c)$ konvex ist.

3.6.6. Beispiel. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $B = B_r(c)$, $\tilde{B} = B_{\tilde{r}}(\tilde{c})$ zwei offene Kreisscheiben mit $\tilde{B} \subseteq B$ und $\bar{B} \setminus \tilde{B} \subseteq U$. Beachte, dass $\tilde{B}$ nicht in U liegen muss.

Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachte die folgenden beiden geschlossenen Wege in U:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial B \subseteq U \qquad \gamma(t) := c + re^{\mathbf{i}kt}$$
$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \partial \tilde{B} \subseteq U \qquad \tilde{\gamma}(t) := \tilde{c} + \tilde{r}e^{\mathbf{i}kt}$$

Diese beiden geschlossenen Wege sind homotop in U. Eine geeignete Homotopie kann wie folgt angegeben werden.

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \bar{B} \setminus \tilde{B} \subseteq U, \quad H(t, s) = s\big(\tilde{c} + \tilde{r}e^{\mathbf{i}kt}\big) + (1 - s)\big(c + re^{\mathbf{i}kt}\big).$$

Beachte, dass wegen $\tilde{B} \subseteq B$ gilt $|c - \tilde{c}| + \tilde{r} \le r$, also für alle $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned}\big|H(t, s) - \tilde{c}\big| &= \big|(s\tilde{r} + (1 - s)r)e^{\mathbf{i}kt} + (1 - s)(c - \tilde{c})\big| \\ &\ge \big|(s\tilde{r} + (1 - s)r)e^{\mathbf{i}kt}\big| - (1 - s)\big|c - \tilde{c}\big| = s\tilde{r} + (1 - s)r - (1 - s)\big|c - \tilde{c}\big| \\ &\ge s\tilde{r} + (1 - s)r + (1 - s)(\tilde{r} - r) = \tilde{r}\end{aligned}$$

und damit H wirklich Werte in $\bar{B} \setminus \tilde{B} \subseteq U$ hat. Offensichtlich gilt $H(0, s) = H(2\pi, s)$ für alle $s \in [0, 1]$, also ist H eine Homotopie geschlossener Wege in U. Da $H(t, 0) = \gamma(t)$ und $H(t, 1) = \tilde{\gamma}(t)$ sind γ und $\tilde{\gamma}$ homotop in U.

3.6.7. Proposition. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ eine Homotopie von Wegen in U. Dann gilt*

$$\int_{H_1} f dz - \int_{H_0} f dz = \int_{H^b} f dz - \int_{H^a} f dz.$$

Beweis. Da f holomorph ist, ist es auch lokal integrabel, siehe Korollar 3.5.2. Daher gibt es um jeden Punkt $z \in U$ eine offene Kreisscheibe $B^z \subseteq U$ auf der eine Stammfunktion von f existiert. Da $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ stetig ist, bildet $\{H^{-1}(B^z) \mid z \in U\}$ eine offene Überdeckung von $[a, b] \times [0, 1]$. Da letzteres kompakt ist, siehe Proposition 1.9.5, existiert $\varepsilon > 0$ (Lebeguezahl) mit der folgenden Eigenschaft: sind $I \subseteq [a, b]$ und $J \subseteq [0, 1]$ zwei Intervalle mit Länge höchstens ε, dann ist $I \times J$ schon ganz in einer dieser offenen Mengen $H^{-1}(B^z)$ enthalten, siehe Proposition 1.9.9.

Wähle nun $N \in \mathbb{N}$, sodass $(b - a)/N \le \varepsilon$ und $1/N \le \varepsilon$. Definiere

$$\begin{aligned} t_j &:= a + j(b - a)/N \in [a, b] & j &= 0, \dots, N \\ I_j &:= [t_{j-1}, t_j] \subseteq [a, b] & j &= 1, \dots, N \\ s_k &:= k/N \in [0, 1] & k &= 0, \dots, N \\ J_k &:= [s_{k-1}, s_k] \subseteq [0, 1] & k &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Dann hat jedes der Intervalle I_j und J_k Länge höchstens ε. Nach Konstruktion existiert für jedes Paar (j, k) mit $1 \le j, k \le N$ eine offene Kreisscheibe $B_{j,k} \subseteq U$ und eine Stammfunktion $F_{j,k} : B_{j,k} \to \mathbb{C}$ von f, $F'_{j,k} = f|_{B_{j,k}}$, sodass

$$H\big(I_j \times J_k\big) \subseteq B_{j,k} \quad \text{für alle } 1 \le j, k \le N.$$

Für $1 \le j, k \le N$ setze:

$$\begin{aligned} P_{j,k} &:= F_{j,k}(H(t_{j-1}, s_{k-1})) & Q_{j,k} &:= F_{j,k}(H(t_j, s_{k-1})) \\ R_{j,k} &:= F_{j,k}(H(t_j, s_k)) & S_{j,k} &:= F_{j,k}(H(t_{j-1}, s_k)) \end{aligned}$$

Da der Weg $H_0|_{I_j}$ in $B_{j,1}$ liegt und $F_{j,1}$ eine auf $B_{j,1}$ definierte Stammfunktion von f ist folgt mit Hilfe von Proposition 3.3.4(iii) und Proposition 3.4.1

$$\int_{H_0} f dz = \sum_{j=1}^N \int_{H_0|_{I_j}} f dz = \sum_{j=1}^N F_{j,1}(H_0(t_j)) - F_{j,1}(H_0(t_{j-1})) = \sum_{j=1}^N Q_{j,1} - P_{j,1}.$$

ebenso gilt

$$\int_{H_1} f dz = \sum_{j=1}^N \int_{H_1|_{I_j}} f dz = \sum_{j=1}^N F_{j,N}(H_1(t_j)) - F_{j,N}(H_1(t_{j-1})) = \sum_{j=1}^N R_{j,N} - S_{j,N}$$

$$\int_{H^a} f dz = \sum_{k=1}^N \int_{H^a|_{J_k}} f dz = \sum_{k=1}^N F_{1,k}(H^a(s_k)) - F_{1,k}(H^a(s_{k-1})) = \sum_{k=1}^N S_{1,k} - P_{1,k}$$

$$\int_{H^b} f dz = \sum_{k=1}^N \int_{H^b|_{J_k}} f dz = \sum_{k=1}^N F_{N,k}(H^b(s_k)) - F_{N,k}(H^b(s_{k-1})) = \sum_{k=1}^N R_{N,k} - Q_{N,k}$$

Auf $B_{j,k} \cap B_{j+1,k}$ ist sowohl $F_{j,k}$ als auch $F_{j+1,k}$ Stammfunktion von f. Daher muss auf $B_{j,k} \cap B_{j+1,k}$ gelten $(F_{j+1,k} - F_{j,k})' = 0$. Als Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist $B_{j,k} \cap B_{j+1,k}$ wieder konvex und daher insbesondere zusammenhängend. Also muss $F_{j+1,k} - F_{j,k}$ auf $B_{j,k} \cap B_{j+1,k}$ konstant sein, siehe Proposition 2.2.5. Da $H(t_j, s_k)$ und $H(t_j, s_{k-1})$ beide in $B_{j,k} \cap B_{j+1,k}$ liegen folgt

$$(F_{j+1,k} - F_{j,k})(H(t_j, s_k)) = (F_{j+1,k} - F_{j,k})(H(t_j, s_{k-1})),$$

also

$$S_{j+1,k} - P_{j+1,k} = R_{j,k} - Q_{j,k} \quad \text{für alle } 1 \le j < N,\ 1 \le k \le N. \tag{98}$$

Ebenso ist auf $B_{j,k} \cap B_{j,k+1}$ sowohl $F_{j,k}$ als auch $F_{j,k+1}$ Stammfunktion von f. Daher muss $F_{j,k+1} - F_{j,k}$ auf $B_{j,k} \cap B_{j,k+1}$ konstant sein. Da $H(t_j, s_k)$ und $H(t_{j-1}, s_k)$ beide in $B_{j,k} \cap B_{j,k+1}$ liegen erhalten wir

$$(F_{j,k+1} - F_{j,k})(H(t_j, s_k)) = (F_{j,k+1} - F_{j,k})(H(t_{j-1}, s_k))$$

also

$$Q_{j,k+1} - P_{j,k+1} = R_{j,k} - S_{j,k} \quad \text{für alle } 1 \le j \le N,\ 1 \le k < N. \tag{99}$$

Summieren wir die offensichtlichen Identitäten

$$(S_{j,k} - P_{j,k}) + (R_{j,k} - S_{j,k}) + (Q_{j,k} - R_{j,k}) + (P_{j,k} - Q_{j,k}) = 0$$

über alle $1 \le j \le N$ und verwenden (98) erhalten durch teleskopartiges Kürzen

$$S_{1,k} - P_{1,k} + \sum_{j=1}^N \big(R_{j,k} - S_{j,k}\big) + Q_{N,k} - R_{N,k} + \sum_{j=1}^N \big(P_{j,k} - Q_{j,k}\big) = 0$$

für alle $1 \le k \le N$. Summiere wir nun über alle $1 \le k \le N$ und verwenden (99) erhalten wir wieder durch teleskopartiges Kürzen

$$\sum_{k=1}^N \big(S_{1,k} - P_{1,k}\big) + \sum_{j=1}^N \big(R_{j,N} - S_{j,N}\big) + \sum_{k=1}^N \big(Q_{N,k} - R_{N,k}\big) + \sum_{j=1}^N (P_{j,1} - Q_{j,1}) = 0.$$

Mit Hilfe der obigen Formeln gibt dies

$$\int_{H^a} f dz + \int_{H_1} f dz - \int_{H^b} f dz - \int_{H_0} f dz = 0,$$

womit die Proposition gezeigt wäre. □

Wir halten noch einige Spezialfälle fest, die wir später verwenden werden.

3.6.8. KOROLLAR. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ zwei Wege, die in U homotop relative Endpunkten sind. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

BEWEIS. Da γ_0 und γ_1 homotop relative Endpunkten sind, existiert eine Homtopie H von Wegen relativ Endpunkten in U mit $H_0 = \gamma_0$, $H_1 = \gamma_1$ und, sodass H^a und H^b beides konstante Wege sind. Da das Kurvenintegral längs konstanter Wege verschwindet, gilt $\int_{H^a} f dz - \int_{H^b} f dz = 0 - 0 = 0$. Aus Proposition 3.6.7 folgt daher $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{H_0} f dz = \int_{H_1} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$. □

3.6.9. KOROLLAR. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ zwei in U homotope geschlossene Wege. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f dz = 0$ für jeden in U nullhomotopen geschlossenen Weg γ.

BEWEIS. Da γ_0 und γ_1 homotope geschlossene Wege sind, existiert eine Homotopie geschlossener Wege in U mit $H_0 = \gamma_0$, $H_1 = \gamma_1$ und $H^a = H^b$. Aus Proposition 3.6.7 folgt daher

$$\int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_0} f dz = \int_{H_1} f dz - \int_{H_0} f dz = \int_{H^b} f dz - \int_{H^a} f dz = 0. \qquad \square$$

3.6.10. BEISPIEL. Es sei $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_0 \notin \partial B_r(c)$, $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Betrachte den geschlossenen Weg $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \partial B_r(c)$, $\gamma_k(t) := c + re^{\mathbf{i}kt}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_k} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1 \text{ oder } z_0 \notin B_r(c) \\ 2\pi\mathbf{i}k & \text{falls } n = -1 \text{ und } z_0 \in B_r(c). \end{cases} \tag{100}$$

Um dies einzusehen bemerke, dass für $n \neq -1$ die Funktion $z \mapsto \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $(z - z_0)^n$ ist, das Integral also nach Proposition 3.4.1 verschwinden muss. Ist $z_0 \notin B_r(c)$, dann ist $z \mapsto (z - z_0)^n$ auf einer Umgebung der konvexen Menge $\bar{B}_r(c)$ holomorph. Der Weg γ_k ist nullhomotop in dieser Umgebung, siehe Beispiel 3.6.5, also muss das Integral nach Korollar 3.6.9 verschwinden. Verbleibt der Fall $z_0 \in B_r(c)$ und $n = -1$. Betrachte den geschlossenen Weg $\sigma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\sigma_k(t) := z_0 + re^{\mathbf{i}kt}$. Da $z_0 \in B_r(c)$, sind γ_k und σ_k homotop als geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, eine Homotopie ist durch $H(t, s) := (1 - s)\gamma_k(t) + s\sigma_k(t)$ gegeben. Mit Hilfe von Korollar 3.6.9 erhalten wir daher

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\sigma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}kre^{\mathbf{i}kt} dt}{z_0 + re^{\mathbf{i}kt} - z_0} = \int_0^{2\pi} \mathbf{i}k dt = 2\pi\mathbf{i}k.$$

Versuchten wir das Integral $\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-z_0}$ dirket zu berechnen, würden wir auf das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}ke^{\mathbf{i}kt} dt}{c+re^{\mathbf{i}kt}-z_0}$ geführt, welches nicht so einfach zu bestimmen ist. Ein Homotopieargument kann also einigermaßen hilfreich bei der Bestimmung von Kurvenintegralen sein. Dieses Beispiel zeigt auch, dass die geschlossenen Wege γ_k und γ_l, $k \neq l$, in $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ nicht homotop sein können, denn sonst müsste ja nach Korollar 3.6.9 $\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-c}$ mit $\int_{\gamma_l} \frac{dz}{z-c}$ übereinstimmen, was nicht der Fall ist, siehe (100).

3.6.11. Schreibweise. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Betrachte den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := c + re^{\mathbf{i}t}$. Dieser Weg durchläuft den Rand der Kreisscheibe $B_r(c)$ einmal im mathematisch positiven Sinn. Ist $f : \partial B_r(c) \to \mathbb{C}$ stetig, dann schreiben wir

$$\int_{\partial B_r(c)} f dz := \int_\gamma f dz = \mathbf{i}r \int_0^{2\pi} f(c + re^{\mathbf{i}t})e^{\mathbf{i}t} dt$$

3.6.12. Beispiel. Sei $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_0 \notin \partial B_r(c)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_r(c)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1 \text{ oder } z_0 \notin B_c(r) \\ 2\pi\mathbf{i} & \text{falls } n = -1 \text{ und } z_0 \in B_r(c). \end{cases}$$

Dies ist ein Spezialfall ($k = 1$) von Beispiel 3.6.10.

3.6.13. Korollar (Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und B eine offene Kreisscheibe mit $\bar{B} \subseteq U$. Dann gilt*

$$\int_{\partial B} f dz = 0.$$

Beweis. Da $\bar{B}$ konvex ist, ist der Integrationsweg nullhomotop in U, siehe Beispiel 3.6.5. Nach Korollar 3.6.9 muss daher das Integral verschwinden. □

3.6.14. Korollar. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiters seien B und B' zwei offene Kreisscheiben mit $B' \subseteq B$ und $\bar{B} \setminus B' \subseteq U$. Dann gilt*

$$\int_{\partial B} f dz = \int_{\partial B'} f dz.$$

Beweis. Nach Beispiel 3.6.6 sind die beiden Integrationswege homotop in U. Nach Korollar 3.6.9 müssen daher die Integrale gleich sein. □

3.7. Einfach zusammenhängende Gebiete. Auf manchen Gebieten ist jede holomorphe Funktion integrabel.

3.7.1. Definition (Einfach zusammenhägende Gebiete). Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.

3.7.2. Proposition. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f integrabel.*

Beweis. Fixiere einen Punkt $c \in G$. Da G zusammenhängend ist, gibt es zu jedem Punkt $z \in G$ einen Weg $\gamma_z : [0, 1] \to G$ mit $\gamma_z(0) = c$ und $\gamma_z(1) = z$, vgl. Übungsaufgabe 13. Definiere

$$F : G \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \int_{\gamma_z} f dz. \tag{101}$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Weges γ_z. Ist nämlich $\tilde{\gamma}_z : [0, 1] \to G$ ein weiterer Weg mit $\tilde{\gamma}_z(0) = c$ und $\tilde{\gamma}_z(1) = z$, dann ist $\gamma_z\tilde{\gamma}_z^*$ ein geschlossener Weg, und da G einfach zusammenhägend ist, daher nullhomotop in G. Aus Korollar 3.6.9 und Proposition 3.3.4(iii) folgt dann

$$0 = \int_{\gamma_z\tilde{\gamma}_z^*} f dz = \int_{\gamma_z} f dz + \int_{\tilde{\gamma}_z^*} f dz = \int_{\gamma_z} f dz - \int_{\tilde{\gamma}_z} f dz.$$

Also ist (101) tatsächlich unabhängig von der Wahl von γ_z.

Wir behaupten nun, dass F eine Stammfunktion von f ist. Sei dazu $w \in G$ fix. Es ist zu zeigen, dass F bei w komplex differenzierbar ist und Ableitung $f(w)$ hat. Da f lokal integrabel ist, siehe Korollar 3.5.2, existiert eine offene Kreisscheibe B mit $w \in B \subseteq G$ und eine Stammfunktion $\tilde{F} : B \to \mathbb{C}$ von $f|_B$, $\tilde{F}' = f|_B$. Durch Addition einer Konstanten, können wir auch $\tilde{F}(w) = F(w)$ erreichen. Es genügt ist zeigen, dass $\tilde{F} = F|_B$, denn dann ist F bei w komplex differenzierbar mit Ableitung $f(w)$, da dies ja für $\tilde{F}$ gilt. Sei dazu $z \in B$. Bezeichne mit $\sigma : [0,1] \to B$ den Weg $\sigma(t) := (1-t)w + tz$. Dann ist $\gamma_w\sigma$ ein Weg von c nach z. Mit Hilfe von Proposition 3.3.4(iii) und Proposition 3.4.1 erhalten wir

$$F(z) = \int_{\gamma_w\sigma} f dz = \int_{\gamma_w} f dz + \int_\sigma f dz = F(w) + \tilde{F}(z) - \tilde{F}(w) = \tilde{F}(z).$$

Also gilt tatsächlich $F|_B = \tilde{F}$. □

Sterngebiete sind simple Beispiele einfach zusammenhängender Gebiete.

3.7.3. Definition (Sterngebiete). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternartig* falls $c \in X$ existiert, sodass für jedes $x \in X$ die Strecke von c nach x ganz in X liegt, d.h. $[c, x] \subseteq X$. In diesem Fall heißt c ein *Zentrum* von X. Unter einem *Sterngebiet* verstehen wir eine offene nicht leere sternartige Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$. Beachte, dass jedes Sterngebiet zusammenhängend, also ein Gebiet im Sinn von Definition 1.8.9, ist. Es ist leicht zu sehen, dass jedes Sterngebiet einfach zusammenhängend ist, siehe Übungsaufgabe 45.

3.7.4. Beispiel. Jede offene Kreisscheibe B ist ein Sterngebiet. Jeder Punkt in B ist Zentrum von B. Allgemeiner ist jede nicht leere offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ein Sterngebiet. Die *geschlitzte Ebene* $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist ein nicht konvexes Sterngebiet. Jede reelle Zahl $x > 0$ ist Zentrum von $\mathbb{C}^-$. Da jedes Sterngebiet einfach zusammenhängend ist, sind auch alle diese Teilmengen einfach zusammenhängend.

3.7.5. Beispiel (Logarithmusfunktionen). Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $0 \notin G$. Betrachte die holomorphe Funtion $G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. Nach Proposition 3.7.2 existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{L} : G \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{L}'(z) = \frac{1}{z}$. Fixiere $c \in G$. Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ surjektiv ist, existiert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\exp(\lambda) = \frac{c}{\exp(\tilde{L}(c))}$, siehe Proposition 2.4.2. Betrachte nun die holomorphe Funktion

$$L : G \to \mathbb{C}, \quad L(z) := \tilde{L}(z) + \lambda.$$

Dann gilt wieder $L'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in G$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{\exp(L(z))}{z}$ verschwindende Ableitung hat. Daher muss sie konstant sein, siehe Korollar 2.2.6. Nach Wahl von λ nimmt sie bei c den Wert 1 an. Wir erhalten $\frac{\exp(L(z))}{z} = 1$, also

$$\exp(L(z)) = z \quad \text{für alle } z \in G.$$

Eine holomorphe Fuktion mit dieser Eigenschaft wird *Logarithmusfunktion* genannt. Wir sehen also, dass auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $0 \notin G$ stets eine Logarithmusfunktion existiert. Diese Logarithmusfunktion ist eindeutig, bis auf eine additive Konstante in $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$. Wenden wir dies auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^-$ an, erhalten wir den Hauptzweig des Logarithmus, bis auf eine Konstante in $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$.

4. Grundlegende Sätze der Funktionentheorie

Wir kommen nun zu einigen fundamentalen Sätzen der Funktionentheorie. Im Wesentlichen basieren sie alle auf dem Integrallemma von Goursat, siehe Satz 3.5.1. Fast keines dieser Resultate hat ein Analogon in der reellen Analysis. Sie alle demonstrieren wie verschieden komplexe und reelle Analysis sind. Eine Ausnahme bildet die Äquivalenz (i)⇔(iii) in Satz 4.7.7 unten, die einen Spezialfall des Inversen Funktionensatzes im $\mathbb{R}^2$ darstellt. Wir werden ihn hier mit Mitteln der Funktionentheorie herleiten, und nicht auf den Inversen Funktionensatz der reellen Analysis zurückgreifen.

4.1. Die Causchysche Integralformel.

4.1.1. Satz (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und B eine offene Kreisscheibe mit $\bar{B} \subseteq U$. Dann gilt*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-w} dz \quad \textit{für alle } w \in B.$$

Die Funktion $f|_B$ kann also aus ihrer Einschränkung $f|_{\partial B}$ rekonstruiert werden.

Beweis. Sei $w \in B$ fix. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(w) \subseteq B$. Die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$ ist auf $U \setminus \{w\}$ holomorph. Nach Korollar 3.6.14 gilt daher

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Da dies unabhängig von ε ist gilt insbesondere

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-w} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \tag{102}$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wie oben erhalten wir aus Beispiel 3.6.12

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz + \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(w)}{z-w} dz \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz + 2\pi\mathbf{i} f(w). \end{aligned} \tag{103}$$

Da f bei w komplex differenzierbar ist, existiert $M > 0$ mit

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\Big| \leq M \quad \text{für alle } z \in \bar{B} \setminus \{w\}.$$

Da die Länge des Kreises $\partial B_\varepsilon(w)$ durch $2\pi\varepsilon$ gegeben ist, erhalten wir aus Proposition 3.3.4(iv) die Abschätzung

$$\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz\Big| \leq 2\pi\varepsilon M.$$

Wir schließen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz = 0,$$

und wegen (103)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi\mathbf{i} f(w).$$

Zusammen mit (102) folgt der Satz. □

4.1.2. Korollar (Mittelwertsatz). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\bar{B}_r(c) \subseteq U$. Dann ist $f(c)$ der Mittelwert der Funktionswerte von f am Rand $\partial B_r(c)$,*

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{\mathbf{i}t})dt.$$

Beweis. Aus der Cauchyschen Integralformel, siehe Satz 4.1.1, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{z-c}dz \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{\mathbf{i}t})}{c+re^{\mathbf{i}t}-c}\mathbf{i}re^{\mathbf{i}t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{\mathbf{i}t})dt. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

4.1.3. Korollar (Mittelwertungleichung). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und B eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und $\bar{B} \subseteq U$. Dann gilt*

$$|f(c)| \leq \|f\|_{\partial B}.$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar 4.1.2 und Proposition 3.1.1(v). □

4.2. Entwicklung in Potenzreihen.

4.2.1. Proposition (Entwicklungslemma). *Es sei $B_r(c)$ eine Kreisscheibe, $f : \partial B_r(c) \to \mathbb{C}$ stetig und*

$$a_n := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ Konvergenzradius mindestens r, und es gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n \quad \textit{für alle } z \in B_r(c).$$

Beweis. Sei $z \in B_r(c)$ fix. Für $w \in \partial B_r(c)$ gilt

$$\Big|\frac{f(w)}{w-c}\cdot\Big(\frac{z-c}{w-c}\Big)^n\Big| \leq \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r}\cdot\Big(\frac{|z-c|}{r}\Big)^n.$$

Da $\frac{|z-c|}{r} < 1$, gilt $\sum_{n=0}^\infty\big(\frac{|z-c|}{r}\big)^n < \infty$ also, siehe Proposition 1.11.4, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f(w)}{w-c}\Big(\frac{z-c}{w-c}\Big)^n = \frac{f(w)}{w-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}} = \frac{f(w)}{w-z} \quad \text{gleichmäßig für } w \in \partial B_r(c).$$

Aus Korollar 3.3.7 erhalten wir daher

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\sum_{n=0}^\infty\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{w-c}\Big(\frac{z-c}{w-c}\Big)^n dw = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n.$$

Da dies für alle $z \in B_r(c)$ gilt muss der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ mindestens r sein, siehe Satz 2.3.3. □

4.2.2. Korollar. *Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und B eine Kreisscheibe mit $\bar{B} \subseteq U$. Es genügt zu zeigen, dass $f|_B$ beliebig oft komplex differenzierbar ist. Nach der Cauchyschen Integralformel, siehe Satz 4.1.1, und dem Entwicklungslemma, siehe Proposition 4.2.1, ist $f|_B$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist $f|_B$ beliebig oft komplex differenzierbar, siehe Korollar 2.3.5. □

4.2.3. Definition (Taylorreihe). Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $c \in U$. Unter der *Taylorreihe von f um c* verstehen wir die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

4.2.4. Satz (Entwicklungssatz von Cauchy–Taylor). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_\rho(c) \subseteq U$. Dann hat die Taylorreihe von f um c Konvergenzradius mindestens ρ und es gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \quad \text{für alle } z \in B_\rho(c).$$

Für die Koeffizienten gilt weiters

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw$$

für alle $0 < r < \rho$.

Beweis. Sei $0 < r < \rho$. Nach der Cauchyschen Integralformel, siehe Satz 4.1.1, und dem Entwicklungslemma, siehe Proposition 4.2.1, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(c),$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw.$$

Nach Korollar 2.3.5 gilt $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n$. Damit hat die Taylorreihe von f um c Konvergenzradius mindestens r und konvergiert auf $B_r(c)$ gegen f. Da $0 < r < \rho$ beliebig war folgt die Behauptung. □

4.2.5. Korollar (Causchysche Integralformel für die Ableitungen). *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und B eine offene Kreisscheibe mit $\bar{B} \subseteq U$. Dann gilt*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{für alle } z \in B \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $z \in B$ und $n \in \mathbb{N}$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq B$. Nach dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, gilt

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \tag{104}$$

Die Funktion $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$ ist auf $U \setminus \{z\}$ holomorph. Aus Korollar 3.6.14 folgt daher

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Zusammen mit (104) folgt die Behauptung. □

Satz 4.2.4 kann verwendet werden um den Konvergenzradius gewisser Potenzreihen zu bestimmen.

4.2.6. Korollar. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $B_r(c) \subseteq U$ und $z_0 \in \partial B_r(c)$, sodass $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nicht existiert. Dann ist der Konvergenzradius der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-c)^n$ gleich r.*

Beweis. Es bezeichne ρ den Konvergenzradius der Taylorreihe von f um c. Nach dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, gilt $\rho \geq r$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-c)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(c). \tag{105}$$

Indirekt angenommen es gelte $\rho > r$. Nach Satz 2.3.3 stellt dann die rechte Seite von (105) eine auf $B_\rho(c)$ holomorphe Funktion dar. Da $z_0 \in B_\rho(c)$ würde dann $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existieren, ein Widerspruch. Also muss $\rho = r$ gelten. □

4.2.7. Beispiel. Betrachte die holomorphe Funktion $\tan : \mathbb{C} \setminus \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, siehe Proposition 2.4.6. Dann ist $B_{\pi/2}(0)$ im Definitionsbereich enthalten und für $\pi/2 \in \partial B_{\pi/2}(0)$ existiert $\lim_{z\to\pi/2} \tan(z)$ nicht, da ja $\lim_{z\to\pi/2} \sin(z) = 1$ und $\lim_{z\to\pi/2} \cos(z) = 0$. Aus Korollar 4.2.6 folgt also, dass die Taylorreihe der Tangensfunktion um 0 Konvergenzradius $\pi/2$ hat.

4.2.8. Beispiel. Die holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ hat Nullstellenmenge $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, siehe Proposition 2.4.2. Daher ist

$$f : \mathbb{C} \setminus (2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{z}{e^z - 1}$$

holomorph, die Kreisscheibe $B_{2\pi}(0)$ liegt ganz im Definitionsbereich von f, und $\lim_{z\to 2\pi\mathbf{i}} f(z)$ existiert nicht. Nach Korollar 4.2.6 hat die Taylorreihe von $\frac{z}{e^z-1}$ daher Konvergenzradius 2π.

4.3. Der Weierstraßsche Konvergenzsatz. Wir beginnen mit folgender Charakterisierung holomorpher Funktionen.

4.3.1. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist holomorph.*
(ii) *Realteil $u : U \to \mathbb{R}$, $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+\mathbf{i}y)$ und Imaginärteil $v : U \to \mathbb{R}$, $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+\mathbf{i}y)$ sind reell differenzierbar und es gelten die Cauchy–Riemann Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.*
(iii) *Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subseteq U$ gilt $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$.*
(iv) *f ist lokal integrabel.*
(v) *Für jede Kreisscheibe B mit $\bar{B} \subseteq U$ gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z} dw$, $\forall z \in B$.*
(vi) *f ist lokal durch eine konvergente Potenzreihen gegeben.*

Beweis. (i)⇔(ii) haben wir schon in Satz 2.2.1 bewiesen. (i)⇒(iii) ist die Aussage des Integrallemmas von Goursat, siehe Satz 3.5.1. (iii)⇒(iv) folgt aus Proposition 3.4.6. Nun zu (iv)⇒(i): Es sei $z \in U$. Da f lokal integrabel ist existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von z und eine Stammfunktion $F : V \to \mathbb{C}$, $F' = f|_V$. Nach Korollar 4.2.2 ist F beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $f|_V = F'$ holomorph. Da z beliebig war ist f holomorph. (i)⇒(v) folgt aus der Cauchyschen Integralformel, siehe Satz 4.1.1. (v)⇒(vi) folgt aus dem Entwicklungslemma, siehe Proposition 4.2.1. Schließlich folgt (vi)⇒(i) aus Satz 2.3.3. □

4.3.2. Satz (Weierstraßscher Konvergenzsatz). *Es sei $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergieren die k-ten Ableitungen $f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f holomorph ist. Nach Proposition 1.10.2 ist f stetig. Sei $\Delta \subseteq U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Nach Satz 4.3.1 gilt $\int_{\partial\Delta} f_n dz = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mittels Proposition 3.3.4(iv) folgt

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f dz\Big| = \Big|\int_{\partial\Delta} (f - f_n) dz\Big| \leq \|f - f_n\|_{\partial\Delta} \cdot L(\partial\Delta) \tag{106}$$

wobei $L(\partial\Delta)$ den Umfang des Dreiecks bezeichnet. Da $\partial\Delta$ kompakt ist, konvergiert $f_n|_{\partial\Delta}$ gleichmäßig gegen $f|_{\partial\Delta}$, siehe Proposition 1.10.3, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\partial\Delta} = 0.$$

Mittels (106) folgt $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$. Aus Satz 4.3.1 folgt nun, dass f holomorph ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass $f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert. Sei dazu $c \in U$. Wähle $r > 0$ mit $\bar{B}_{2r}(c) \subseteq U$ und so, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\partial B_{2r}(c)} = 0. \tag{107}$$

Nach Korollar 4.2.5 gilt

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{2r}(c)} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \text{für alle } z \in B_{2r}(c).$$

Für $z \in B_r(c)$ und $w \in \partial B_{2r}(c)$ gilt $|w - z| \geq r$ also wegen Proposition 3.3.4(iv)

$$\begin{aligned} \big|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\big| &\leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi 2r \frac{1}{r^{k+1}} \|f_n - f\|_{\partial B_{2r}(c)} \\ &= \frac{2k!}{r^k} \|f_n - f\|_{\partial B_{2r}(c)} \quad \text{für alle } z \in B_r(c). \end{aligned} \tag{108}$$

Es folgt $\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B_r(c)} \leq \frac{2k!}{r^k} \|f_n - f\|_{\partial B_{2r}(c)}$. Zusammen mit (107) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B_r(c)} = 0$. Daher konvergiert $f_n^{(k)}$ auf $B_r(c)$ gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. Also konvergiert $f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. □

4.3.3. Korollar (Weierstraßscher Konvergenzsatz für Reihen). *Sei $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, sodass die Reihe $\sum_n f_n$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_n f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. Konvergiert $\sum_n f_n$ normal, dann gilt dies auch für $\sum_n f_n^{(k)}$.*

Beweis. Wende wir den Weierstraßschen Konvergenzsatz, siehe Satz 4.3.2, auf die Folge der Partialsummen an erhalten wir die erste Behauptung. Es bleibt noch zu zeigen, dass normale Konvergenz von $\sum_n f_n$ normale Konvergenz von $\sum_n f_n^{(k)}$ impliziert. Sei dazu $c \in U$. Wähle $r > 0$ mit $\bar{B}_{2r}(c) \subseteq U$ und so, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\bar{B}_{2r}(c)} < \infty. \tag{109}$$

Nach der Causchyschen Integralformel für die Ableitungen, siehe Korollar 4.2.5, gilt

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{B_{2r}(c)} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \text{für alle } z \in B_{2r}(c).$$

Für $w \in \partial B_{2r}(c)$ und $z \in B_r(c)$ gilt $|w - z| \geq r$ und mittels Proposition 3.3.4(iv) erhalten wir

$$\left|f_n^{(k)}(z)\right| = \frac{k!}{2\pi} 2\pi 2r \frac{1}{r^{k+1}} \|f_n\|_{\partial B_{2r}(c)} = \frac{2k!}{r^k} \|f_n\|_{\partial B_{2r}(c)} \quad \text{für alle } z \in B_r(c).$$

Es folgt $\|f_n^{(k)}\|_{B_r(c)} \leq \frac{2k!}{r^k} \|f_n\|_{\bar{\partial} B_{2r}(c)}$. Aus (109) schließen wir $\sum_{n=0}^\infty \|f_n^{(k)}\|_{B_r(c)} < \infty$. Also konvergiert $f_n^{(k)}$ normal. □

4.4. Der Satz von Liouville.

4.4.1. Proposition (Cauchysche Abschätzung für die Taylorkoeffizienten). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\bar{B}_r(c) \subseteq U$, und sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um c. Dann gilt*

$$|a_n| \leq \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r^n} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz.$$

Für $z \in \partial B_r(c)$ gilt $\left|\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\right| \leq \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r^{n+1}}$. Aus Proposition 3.3.4(iv) folgt nun

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r^n}. \qquad \square$$

4.4.2. Definition (Ganze Funktionen). Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion wird *ganze Funktion* genannt.

4.4.3. Satz (Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte ganze Funktion. Nach dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, konvergiert die Taylorreihe von f um 0 überall, und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{110}$$

Da f beschränkt ist, gilt $\|f\|_{\mathbb{C}} < \infty$. Nach der Cauchyschen Abschätzung für die Taylorkoeffizienten, siehe Proposition 4.4.1, gilt

$$|a_n| \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}}{r^n} \quad \text{für alle } n \in N \text{ und alle } r > 0.$$

Mit $r \to \infty$ folgt $a_n = 0$ für alle $n > 0$. Also ist f konstant, siehe (110). □

Aus dem Satz von Liouville erhalten wir einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dazu etablieren wir zunächst folgende elementare Abschätzung für Polynome.

4.4.4. Lemma. *Es sei*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

ein Polynom, und $a_n \neq 0$. Dann existiert $R \geq 0$, sodass

$$\frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |z| \geq R.$$

Beweis. Sei $M := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ und $R := \max\{1, 2M/|a_n|\}$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$

$$\begin{aligned}|a_n||z|^n = \Big|p(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\Big| &\leq |p(z)| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \\ &\leq |p(z)| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{n-1} = |p(z)| + M|z|^{n-1} \leq |p(z)| + \frac{|a_n|}{2}|z|^n\end{aligned}$$

und daher $|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n$. Ebenso gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$

$$\begin{aligned}|p(z)| \leq |a_n||z|^n + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k &\leq |a_n||z|^n + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{n-1} \\ &\leq |a_n||z|^n + M|z|^{n-1} \leq |a_n||z|^n + \frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq 2|a_n||z|^n,\end{aligned}$$

womit auch die zweite Ungleichung gezeigt wäre. □

4.4.5. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis. O.B.d.A. sei $a_n \neq 0$. Betrachte die Funktion

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Nehmen wir nun an unser Polynom p hat keine Nullstelle. Es ist zu zeigen, dass dann p konstant ist. Da p keine Nullstelle hat, ist

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := 1/p(z)$$

eine ganze Funktion. Nach Lemma 4.4.4 ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville, siehe Satz 4.4.3, muss f konstant sein. Damit ist auch p konstant. □

4.5. Der Identitätssatz.

4.5.1. Proposition. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass $f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = (z - c)^m g(z) \quad \textit{für alle } z \in U.$$

Es gilt dann $g(c) = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}$.

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, ist f lokal um c durch eine konvergente Potenzreihe gegeben, d.h. es existiert $r > 0$ mit $B_r(c) \subseteq U$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(c). \tag{111}$$

Da $f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$, gilt $a_n = 0$ für alle $n < m$, also

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^n = (z-c)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-c)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(c). \tag{112}$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-c)^n$ hat denselben Konvergenzradius wie (111). Nach Satz 2.3.3 ist daher

$$h : B_r(c) \to \mathbb{C}, \quad h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-c)^n$$

holomorph, und $h(c) = a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}$. Wegen (112) gilt $f(z) = (z-c)^m h(z)$ für alle $z \in B_r(c)$. Also ist

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} h(z) & \text{für } z \in B_r(c) \\ \frac{f(z)}{(z-c)^m} & \text{für } z \in U \setminus \{c\} \end{cases}$$

wohldefiniert und hat alle gewünschten Eigenschaften. □

4.5.2. Definition (Nullstellenordnung). Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $c \in U$. Existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$ und $f^{(m)}(c) \neq 0$, dann heißt m die *Ordnung der Nullstelle* c von f. Im Fall $f(c) \neq 0$ ist gemeint, dass f bei c eine 'Nullstelle' der Ordnung 0 hat. Gilt $f^{(m)}(c) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so heißt c eine Nullstelle unendlicher Ordnung von f.

4.5.3. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die holomorphe Funktion $z \mapsto z^n$ hat bei $0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Ordnung n.

4.5.4. Satz (Identitätssatz). *Sei G ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:*

(i) $f = g$
(ii) $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ *hat einen Häufungspunkt in G.*
(iii) *Es existiert $c \in G$ mit $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Implikation (i)⇒(ii) ist offensichtlich. Ad (ii)⇒(iii): Sei $c \in G$ ein Häufungspunkt von $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$. Betrachte die holomorphe Funktion $h := g - f : G \to \mathbb{C}$. Es genügt zu zeigen $h^{(n)}(c) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Indirekt angenommen es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $h(c) = h'(c) = h''(c) = \cdots = h^{(m-1)}(c) = 0$ und $h^{(m)}(c) \neq 0$. Nach Proposition 4.5.1 existiert eine holomorphe Funktion $p : U \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = (z-c)^m p(z)$ für alle $z \in G$, und es gilt $p(c) = \frac{f^{(m)}(c)}{m!} \neq 0$. Da p stetig ist, existiert eine Umgebung U von c auf der p nicht verschwindet. Für $z \in U \setminus \{c\}$ folgt dann $h(z) \neq 0$ also $f(z) \neq g(z)$. Daher kann c kein Häufungspunkt von $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ sein, ein Widerspruch. Also gilt $h^{(n)}(c) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ad (iii)⇒(i): Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen in G ist

$$S := \big\{z \in G \bigm| \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)\big\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \big\{z \in G \bigm| f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)\big\}$$

abgeschlossen in G. Die Teilmenge $S \subseteq G$ ist aber auch offen. Denn ist $z \in S$, dann folgt aus dem Entwicklungssatz, siehe Satz 4.2.4, dass f und g in einer Umgebung von z übereinstimmen. Nach Voraussetzung ist $S \neq \emptyset$. Da G zusammenhängend ist, folgt $S = G$, also $f = g$. □

4.5.5. Definition (Stetige Fortsetzung). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine stetige Funktion $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_{U\setminus\{c\}} = f$, dann heißt f *stetig nach c fortsetzbar,* und $\hat{f}$ wird die *stetige Fortsetzung von f* genannt. f ist genau dann stetig nach c fortsetzbar wenn $\lim_{z\to c} f(z)$ existiert und in diesem Fall muss $\hat{f}(c) = \lim_{z\to c} f(z)$ gelten. Die stetige Fortsetzung ist also eindeutig bestimmt, sofern sie existiert.

4.5.6. Definition (Holomorphe Fortsetzung). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Existiert eine holomorphe Funktion $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_{U\setminus\{c\}} = f$, dann heißt f *holomorph nach c fortsetzbar,* und $\hat{f}$ wird die *holomorphe Fortsetzung von f* genannt. Insbesondere ist $\hat{f}$ auch eine stetige Fortsetzung von f und damit eindeutig bestimmt.

4.5.7. Satz (Riemannscher Fortsetzungssatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) *f lässt sich holomorph nach c fortsetzen.*
(ii) *f läßt sich stetig nach c fortsetzen.*
(iii) *Es existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von c, sodass $f|_{V\setminus\{c\}}$ beschränkt ist.*
(iv) $\lim_{z\to c}(z - c)f(z) = 0$.

Beweis. Die Implikationen (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv) sind trivial. Zeigen wir also (iv)⇒(i). Betrachte die Funktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} (z-c)^2 f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{c\} \\ 0 & \text{falls } z = c. \end{cases}$$

Dann ist g auf $U \setminus \{c\}$ holomorph. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{z\to c} \frac{g(z) - g(c)}{z - c} = \lim_{z\to c}(z - c)f(z) = 0,$$

also ist g auch bei c komplex differenzierbar mit Ableitung $g'(c) = 0$. Damit ist g auf ganz U holomorph und es gilt $g(0) = g'(0) = 0$. Nach Proposition 4.5.1 existiert eine holomorphe Funktion $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z - c)^2\hat{f}(z)$ für alle $z \in U$. Nach Konstruktion gilt $(z - c)^2\hat{f}(z) = g(z) = (z - c)^2 f(z)$, und damit auch $\hat{f}(z) = f(z)$, für alle $z \in U \setminus \{c\}$. Also ist $\hat{f}$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f. □

4.6. Gebietstreue und Maximumsprinzip.

4.6.1. Lemma. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $B \subseteq U$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt c, sodass $\bar{B} \subseteq U$. Gilt dann*

$$|f(c)| < \min_{z\in\partial B}\big\{|f(z)|\big\}$$

so hat f eine Nullstelle in B.

Beweis. Indirekt angenommen f hat keine Nullstelle in B. Da nach Voraussetzung f auch auf ∂B keine Nullstelle haben kann, existiert eine offene Menge V mit $\bar{B} \subseteq V \subseteq U$, sodass f auch auf V nullstellenfrei ist. Daher ist

$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(z) := 1/f(z)$$

holomorph. Aus der Mittelwertungleichung, siehe Korollar 4.1.3, folgt nun

$$\frac{1}{|f(c)|} = |g(c)| \leq \max_{z\in\partial B}\big\{|g(z)|\big\} = \frac{1}{\min_{z\in\partial B}\{|f(z)|\}}$$

und daher $|f(c)| \geq \min_{z\in\partial B}\{|f(z)|\}$, ein Widerspruch. Also muss f eine Nullstelle in B besitzen. □

4.6.2. Definition (Offene Abbildungen). Eine Abbildung $U \to \mathbb{C}$ heißt offen falls das Bild jeder offenen Teilmenge von U offen in $\mathbb{C}$ ist.

4.6.3. Satz (Offenheitssatz). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nirgendwo lokal konstant. Dann ist f eine offene Abbildung.*

Beweis. Sei $V \subseteq U$ offen und $c \in V$. Es genügt zu zeigen, dass $f(c)$ im Inneren von $f(V)$ liegt. Da f bei c nicht lokal konstant ist, folgt aus dem Identitätssatz, siehe Satz 4.5.4, die Existenz einer Kreisscheibe $B \subseteq V$ mit Mittelpunkt c, sodass $\bar{B} \subseteq U$ und sodass $f(c) \notin f(\partial B)$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}\min_{z\in\partial B}|f(z) - f(c)| > 0$. Es genügt zu zeigen $B_\varepsilon(f(c)) \subseteq f(V)$. Sei dazu $w \in B_\varepsilon(f(c))$ beliebig. Dann gilt $|f(c)-w| < \varepsilon$ und

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(c)| - |f(c) - w| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \partial B.$$

Es folgt

$$|f(c) - w| < \varepsilon < \min_{z\in\partial B}\big\{|f(z) - w|\big\}.$$

Nach Lemma 4.6.1 besitzt die Funktion $U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) - w$ eine Nullstelle in B, d.h. es existiert $\zeta \in B$ mit $f(\zeta) = w$. Also ist $w \in f(B) \subseteq f(V)$. Da $w \in B_\varepsilon(f(c))$ beliebig war folgt $B_\varepsilon(f(c)) \subseteq f(V)$. Also ist $f(V)$ offen in $\mathbb{C}$, und der Satz bewiesen. □

4.6.4. Korollar (Satz von der Gebietstreue). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Als stetiges Bild einer nicht leeren zusammenhängenden Menge ist $f(G)$ nicht leer und zusammenhängend, siehe Proposition 1.8.3. Nach dem Identitätssatz, siehe Satz 4.5.4, ist f nirgendwo lokal konstant. Nach dem Offenheitssatz, siehe Satz 4.6.3, ist daher $f(G)$ offen in $\mathbb{C}$. Also ist $f(G)$ ein Gebiet. □

4.6.5. Satz (Maximumsprinzip). *Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Dann hat f kein Betragsmaximum in G, d.h. es existiert kein $w \in G$ mit $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in G$.*

Beweis. Indirekt angenommen es existiert $w \in G$, sodass $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in G$. Dann ist $f(G)$ keine Umgebung von $f(w)$, da ja jede Umgebung von $f(w)$ Punkte mit Absolutbetrag größer als $|f(w)|$ enthält. Daher ist $f(G)$ nicht offen. Nach dem Satz von der Gebietstreue, siehe Korollar 4.6.4, muss daher f konstant sein, ein Widerspruch. Also kann kein solches w existieren und der Satz ist bewiesen. □

4.6.6. Korollar (Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete). *Sei G ein beschränktes Gebiet, $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt f sein Betragsmaximum am Rand von G an, d.h. es existiert $w \in \partial G$ mit $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in \bar{G}$.*

Beweis. O.B.d.A. sei f nicht konstant, andernfalls ist die Aussage trivial. Da $\bar{G}$ kompakt und $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig ist, existiert $w \in \bar{G}$ mit $|f(z)| \leq |f(w)|$ für alle $z \in \bar{G}$, siehe Proposition 1.9.8. Nach Satz 4.6.5 kann w nicht in G liegen. Also gilt $w \in \bar{G} \setminus G = \partial G$, siehe Übungsaufgabe 17, und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

4.7. Biholomorphie.

4.7.1. Definition (Biholomorphie). Eine holomorphe Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ heißt *biholomorph,* falls eine holomorphe Umkehrabbildung $g : V \to U$ existiert, $f \circ g = \mathrm{id}_V$ und $g \circ f = \mathrm{id}_U$. Zwei offene Teilmengen U und V von $\mathbb{C}$ heißen biholomorph, falls eine biholomorphe Abbildung $f : U \to V$ existiert. Offensichtlich definiert dies eine Äquivalenzrelation auf den offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$.

4.7.2. Beispiel. Jede offene Kreisscheibe $B_r(c)$ ist biholomorph zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := B_1(0)$, denn $f : \mathbb{E} \to B_r(c)$, $f(z) := c + rz$ ist holomorph mit holomorpher Umkehrfuktion $g : B_r(c) \to \mathbb{E}$, $g(z) := (z - c)/r$.

4.7.3. Beispiel (Cayleyabbildung). Die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ und die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ sind biholomorph, denn

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \quad f(z) := \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}} \tag{113}$$

ist holomorph mit holomorpher Umkehrabbildung

$$g : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, \quad g(z) := \mathbf{i}\frac{1 + z}{1 - z}. \tag{114}$$

Diese beiden Abbildungen werden *Cayleyabbildungen* genannt. Wegen

$$\left|\frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}\right|^2 = \frac{(z - \mathbf{i})(\bar{z} + \mathbf{i})}{(z + \mathbf{i})(\bar{z} - \mathbf{i})} = \frac{|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,z + 1}{|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,z + 1} = 1 - \frac{4\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,z + 1}$$

nimmt (113) tatsächlich Werte im Einheitskreis an. Da

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{i}\frac{1 + z}{1 - z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1 + z}{1 - z} + \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + z)(1 - \bar{z}) + (1 + \bar{z})(1 - z)}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$$

nimmt auch (114) Werte in $\mathbb{H}$ an. Eine elementare Rechnung zeigt, dass f und g invers zueinander sind, siehe Übungsaufgabe 18.

4.7.4. Beispiel. Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ ist nicht biholomorph zu $\mathbb{C}$, denn nach dem Satz von Liouville, siehe Satz 4.4.3, ist jede holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{E}$ konstant. Nach Beispiel 4.7.3 ist daher auch $\mathbb{H}$ nicht biholomorph zu $\mathbb{C}$.

4.7.5. Satz (Injektive holomorphe Abbildungen sind biholomorph). *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f(U)$ offen und $f : U \to f(U)$ biholomorph. Weiters gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ ist gegeben durch*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \quad w \in f(U). \tag{115}$$

Beweis. Da f injektiv ist, ist es nirgendwo lokal konstant. Nach dem Offenheitssatz, siehe Satz 4.6.3, ist f eine offene Abbildung. Also ist $f(U)$ offen, und $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig. Sei $N := \{z \in U \mid f'(z) = 0\}$. Da f nirgendwo lokal konstant ist, kann f' nirgendwo lokal verschwinden. Wenden wir den Identitätssatz, siehe Satz 4.5.4, auf f' an, sehen wir, dass N keinen Häufungspunkt in U hat. Dann hat auch $f(N)$ keinen Häufungspunkt in $f(U)$. Insbesondere sind $U \setminus N$ und $f(U) \setminus f(N)$ offen. Wir behaupten zunächst, dass

$$f^{-1}|_{f(U)\setminus f(N)} : f(U) \setminus f(N) \to U \setminus N \tag{116}$$

holomorph ist. Sei dazu $z_0 \in U \setminus N$ und $w_0 = f(z_0) \in f(U) \setminus f(N)$. Da f bei z_0 komplex differenzierbar ist gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Da $f'(z_0) \neq 0$ folgt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Da f^{-1} bei w_0 stetig ist, schließen wir daraus

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - z_0}{f(f^{-1}(w)) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

und folglich

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

Also ist f^{-1} bei w_0 komplex differenzierbar. Damit ist (116) holomorph und es gilt (115) auf $f(U) \setminus f(N)$. Da $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig und auf $f(U) \setminus f(N)$ holomorph ist, und weil $f(N)$ keinen Häufungspunkt in $f(U)$ hat, folgt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, siehe Satz 4.5.7, das $f^{-1} : f(U) \to U$ auf ganz $f(U)$ holomorph ist. Aus Stetigkeitsgründen gilt $(f^{-1})'(w) \cdot f'(f^{-1}(w)) = 1$ für alle $w \in f(U)$. Insbesondere ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, und es gilt (115) für alle $w \in f(U)$. □

4.7.6. Definition (Lokale Biholomorphie). Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z \in U$. Dann heißt f bei z *lokal biholomorph* falls eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von z existiert sodass $f|_V : V \to f(V)$ biholomorph ist.

Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt lokal um $z \in U$ injektiv, falls eine Umgebung V von z in U existiert, sodass $f|_V : V \to \mathbb{C}$ injektiv ist.

4.7.7. Satz. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $c \in U$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist lokal um c biholomorph.*
(ii) *f ist lokal um c injektiv.*
(iii) *$f'(c) \neq 0$.*

Beweis. Ad (i)⇒(iii): Sei $V \subseteq U$ eine offene Umgebung von c, sodass $f|_V : V \to f(V)$ biholomorph ist. Dann ist $f^{-1} : f(V) \to V$ holomorph und es gilt $f^{-1}(f(z)) = z$ für alle $z \in V$. Nach der Kettenregel folgt $(f^{-1})'(f(z)) \cdot f'(z) = 1$ für alle $z \in V$. Insbesondere ist $f'(c) \neq 0$. Nun zu (iii)⇒(ii). Da $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig ist, siehe Korollar 4.2.2, finden wir eine Kreisscheibe $B \subseteq U$ mit $\|f' - f'(c)\|_B < |f'(c)|$. Für $z_1, z_2 \in B$ gilt

$$\int_{[z_1,z_2]} f'(w) - f'(c) dw = f(z_2) - f(z_1) - f'(c)(z_2 - z_1)$$

und wegen Proposition 3.3.4(iv) daher auch

$$\big|f(z_2) - f(z_1) - f'(c)(z_2 - z_1)\big| = \Big|\int_{[z_1,z_2]} f'(w) - f'(c)dw\Big| \\ \leq \|f' - f'(c)\|_B \cdot |z_2 - z_1|.$$

Wir schließen

$$\Big|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - f'(c)\Big| \leq \|f' - f'(c)\|_B < |f'(c)| \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in B,\ z_1 \neq z_2.$$

Es folgt, dass f auf B injektiv ist, denn wäre $f(z_1) = f(z_2)$ für $z_1, z_2 \in B$ mit $z_1 \neq z_2$, erhielten wir aus dieser Abschätzung einen Widerspruch. Also ist f lokal injektiv. Die Implikation (ii)⇒(i) folgt aus Satz 4.7.5. □

4.7.8. Korollar (Normalform). *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, sodass $f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$ und $f^{(m)}(c) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung V von c in U und eine biholomorphe Abbildung $h : V \to \mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = f(c) + (h(z))^m \quad \textit{für alle } z \in V.$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen an f und Proposition 4.5.1 existiert eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, sodass $g(c) \neq 0$ und

$$f(z) - f(c) = (z - c)^m g(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Wähle eine offene Umgebung V von c in U, sodass $\frac{g(z)}{g(c)} \in \mathbb{C}^-$ für alle $z \in V$. Wähle $\xi \in \mathbb{C}^\times$ mit $\xi^m = g(c)$. Sei $\mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sqrt[m]{z}$, der Hauptzweig der Wurzelfunktion, siehe (72). Definiere nun

$$h : V \to \mathbb{C}, \quad h(z) := (z - c)\xi \sqrt[m]{g(z)/g(c)}.$$

Dann ist h holomorph, und es gilt offensichtlich $f(z) = f(c) + (h(z))^m$ für alle $z \in V$. Beachte, dass $h'(c) = \xi \neq 0$. Durch Verkleinern von V können wir also erreichen, dass h auch biholomorph ist, siehe Satz 4.7.7. □

4.8. Automorphismengruppen. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(U)$ die Menge aller biholomorphen Abbildungen $U \to U$. Dies ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen. In diesem Abschnitt verwenden wir die Notation $\mathbb{E} := B_1(0)$ für die offene Einheitskreisscheibe und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ für die obere Halbebene. Wir werden nun die Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ bestimmen. Das wesentliche Hilfsmittel ist folgender

4.8.1. Satz (Schwarzsches Lemma). *Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Existiert $w \in \mathbb{E}$, $w \neq 0$, mit $|f(w)| = |w|$, oder gilt $|f'(0)| = 1$, dann ist f eine Drehung, d.h. es existiert $\theta \in S^1$ mit $f(z) = \theta z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis. Da $f(0) = 0$ existiert eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = zg(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$, siehe Proposition 4.5.1. Sei $0 < r < 1$ und $|z| = r$. Dann gilt $1 > |f(z)| = |z||g(z)| = r|g(z)|$, also $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Aus dem Maximumsprinzip, siehe Korollar 4.6.6, folgt $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle $z \in \bar{B}_r(0)$. Mit $r \to 1$ erhalten wir $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Daher gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Durch differenzieren der Gleichung $f(z) = zg(z)$ erhalten wir $f'(0) = g(0)$. Also gilt auch $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Nun zur zweiten Behauptung. Ist $|f(w)| = |w|$ für ein $w \in \mathbb{E}$, $w \neq 0$, dann folgt $|g(w)| = 1$. Ist $|f'(0)| = 1$, dann gilt $|g(0)| = 1$, da ja $f'(0) = g(0)$. In beiden Fällen existiert also ein $w \in \mathbb{E}$ mit $|g(w)| = 1$. Da $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ folgt aus dem Maximumsprinzip, siehe Satz 4.6.5, dass g konstant ist. Also existiert $\theta \in \mathbb{C}$ mit $g(z) = \theta$, d.h. $f(z) = \theta z$, für alle $z \in \mathbb{E}$. Da $1 = |g(w)| = |\theta|$ folgt $\theta \in S^1$. □

Wir erinnern uns an die allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c, d, \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

der invertierbaren komplexen 2×2–Matrizen. Für eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definiere eine holomorphe Abbildung, vgl. Übungsaufgabe 18,

$$f_A : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}, \qquad f_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Abbildungen dieser Form werden *Möbiustransformationen* genannt. Beachte, dass

$$f_{\lambda A} = f_A, \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}^\times \text{ und } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$f_A \circ f_B = f_{AB}, \qquad \text{für } A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \tag{117}$$

wobei AB das Matrizenprodukt bezeichnet. Insbesondere ist f_A invertierbar und die Umkehrabbildung ist gegeben durch $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ wo A^{-1} die zu A inverse Matrix bezeichnet.

4.8.2. Lemma. *Die Menge*

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \tag{118}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. *Weiters definiert die Abbildung*

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{E}), \qquad A \mapsto f_A|_{\mathbb{E}}$$

einen Gruppenhomomorphismus. Schließlich gibt es zu jedem $w \in \mathbb{E}$ komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$, sodass $f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)}(0) = w$.

Beweis. Eine einfache Rechnung zeigt, dass (118) tatsächlich eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Wegen $1 = |a|^2 - |b|^2 = (|a| + |b|)(|a| - |b|)$, gilt für $z \in \mathbb{E}$ stets $|\bar{b}z + \bar{a}| \geq |\bar{a}| - |\bar{b}||z| \geq |a| - |b| > 0$, also ist zumindest $f_A|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph. Als nächstes zeigen wir, dass $f_A|_{\mathbb{E}}$ tatsächlich nur Werte in $\mathbb{E}$ annimmt, dh. eine holomorphe Abbildung $f_A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ definiert. Dazu müssen wir $|f_A(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ zeigen. Äquivalent dazu ist

$$|az + b|^2 < |\bar{b}z + \bar{a}|^2 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies wiederum äquivalent zu

$$(|a|^2 - |b|^2)|z|^2 < |a|^2 - |b|^2 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

ist. Da diese Bedingung offensichtlich erfüllt ist, sehen wir also, dass $f_A|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Dasselbe gilt für die Umkehrabbildung $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$, und damit muss $f_A|_{\mathbb{E}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ gelten. Wegen (117) ist $A \mapsto f_A|_{\mathbb{E}}$ ein Gruppenhomomorphismus. Für die letzte Behauptung setze $a = \frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}}$ und $b = \frac{w}{\sqrt{1-|w|^2}}$. □

4.8.3. Satz (Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$). *Jede biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist von der Form $g(z) = f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right)}(z) = \frac{az+b}{\bar bz+\bar a}$ für gewisse $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$. In anderen Worten*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \Big\{ z \mapsto \frac{az+b}{\bar bz+\bar a} \;\Big|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \Big\}.$$

Beweis. Sei $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ beliebig. Nach Lemma 4.8.2 existieren $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, mit $f_A(0) = g(0)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right)$. Nach Lemma 4.8.2 ist $f_A|_{\mathbb{E}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, also auch $h := (f_A|_{\mathbb{E}})^{-1} \circ g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Nach Konstruktion gilt $h(0) = 0$. Nach dem Lemma von Schwarz, siehe Satz 4.8.1, gilt $|h(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Es ist aber auch die Umkehrfunktion $h^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph, das Lemma von Schwarz impliziert also auch $|z| = |h^{-1}(h(z))| \leq |h(z)|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Damit gilt $|h(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Nach dem zweiten Teil des Schwarzschen Lemmas existiert also $\theta \in S^1$ mit $h(z) = \theta z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Bezeichnet $\varphi \in S^1$ eine der beiden Wurzeln von θ, $\varphi^2 = \theta$, dann gilt also $h = f_B|_{\mathbb{E}}$ mit $B = \left(\begin{smallmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt $g = f_A|_{\mathbb{E}} \circ h = f_A|_{\mathbb{E}} \circ f_B|_{\mathbb{E}} = f_{AB}|_{\mathbb{E}} = f_C|_{\mathbb{E}}$ mit $C := AB = \left(\begin{smallmatrix} a\varphi & b\bar\varphi \\ \bar b\varphi & \bar a\bar\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Daher ist g von der gewünschten Form. □

Nach Beispiel 4.7.3 sind $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$ biholomorph. Wir können daher nun leicht die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ bestimmen. Wir erinnern uns an die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \Big\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \;\Big|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \Big\}.$$

Dies ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

4.8.4. Korollar (Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$). *Jede biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist von der Form $g(z) = f_A(z)$ für ein $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. In anderen Worten*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \Big\{ z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \;\Big|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \Big\}$$

Beweis. Wir erinnern uns, siehe Beispiel 4.7.3, an die Caleyabbildung und ihre Umkehrabbildung

$$h : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \quad h(z) = \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}, \qquad h^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, \quad h^{-1}(z) = \mathbf{i}\frac{1+z}{1-z}.$$

Beachte, dass auch die Caleyabbildung eine Möbiustransformation ist,

$$h = f_C, \quad h^{-1} = f_{C^{-1}} \quad \text{wobei} \quad C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ 1 & \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right).$$

Sei nun $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ beliebig. Da $h : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ biholomorph ist, ist $hgh^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, und nach Satz 4.8.3 daher $hgh^{-1} = f_B$ für ein $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Also gilt

$$g = h^{-1} f_B h = f_{C^{-1}} \circ f_B \circ f_C = f_{C^{-1}BC}$$

Das Korollar folgt nun aus

$$\Big\{ C^{-1} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right) C \;\Big|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \Big\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Die letzte Behauptung lässt sich leicht durch eine direkte Rechnung verifizieren. □

4.8.5. Bemerkung. Die einzigen Matrizen $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ für die $f_A = \mathrm{id}$ gilt sind $A = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Daraus sehen wir nun, dass die Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ beide isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ sind.

4.8.6. Satz. *Für die Automorphismengruppe von* $\mathbb{C}$ *gilt*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \big\{z \mapsto az + b \,\big|\, a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C}\big\}.$$

Beweis. Klarerweise ist jede der Abbildungen $z \mapsto az + b$, $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ ein Biholomorphismus von $\mathbb{C}$. Die Umkehrabbildung ist durch $z \mapsto \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ gegeben. Sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorph. Dann ist die Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto f(z) - f(0)$, biholomorph. Daher ist auch

$$h : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \quad h(z) := \frac{1}{f(\frac{1}{z}) - f(0)}$$

biholomorph. Wir behaupten zunächst $\lim_{z\to 0} h(z) = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da f^{-1} stetig ist, ist $f^{-1}(\bar{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(f(0)))$ kompakt und daher beschränkt. Also existiert $R > 0$ mit $f^{-1}(\bar{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(f(0))) \subseteq B_R(0)$. Für $z \in B_{\frac{1}{R}}(0)$, $z \neq 0$, gilt dann $\frac{1}{z} \notin B_R(0)$, also $f(\frac{1}{z}) \notin \bar{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(f(0))$ und daher $|f(\frac{1}{z}) - f(0)| > \frac{1}{\varepsilon}$. Wir folgern

$$|h(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in B_{\frac{1}{R}}(0),\ z \neq 0.$$

Also gilt tatsächlich $\lim_{z\to 0} h(z) = 0$. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz, siehe Satz 4.5.7, läßt such h zu einer holomorphen Abbildung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortsetzen, $h(0) = 0$. Für die Ableitung muss $h'(0) \neq 0$ gelten, denn andernfalls wäre h nicht lokal um 0 injektiv, siehe Korollar 4.7.8. Daher existiert $\delta > 0$ sodass

$$\left|\frac{\frac{1}{z}}{f(\frac{1}{z}) - f(0)}\right| = \left|\frac{h(z)}{z}\right| = \left|\frac{h(z) - h(0)}{z - 0}\right| \geq \frac{|h'(0)|}{2} > 0 \quad \text{für alle } z \in B_\delta(0),\ z \neq 0.$$

Es folgt

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{z}\right| \leq \frac{2}{|h'(0)|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > \tfrac{1}{\delta}.$$

Damit ist die ganze Funktion $z \mapsto \frac{f(z)-f(0)}{z}$ beschränkt, und nach dem Satz von Liouville, siehe Satz 4.4.3, daher konstant. D.h. es existiert $a \in \mathbb{C}$, sodass $\frac{f(z)-f(0)}{z} = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Folglich gilt $f(z) = az + f(0)$ und f hat die gewünschte Form. □

4.9. Die Eulerschen Formeln. Die ganze Funktion

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \tag{119}$$

hat Nullstellenmenge $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Daher ist

$$\mathbb{C} \setminus \big(2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$$

holomorph. Beachte, dass $B_{2\pi}(0)$ ganz im Definitionsgebiet dieser Funktion liegt, und $\lim_{z\to 2\pi\mathbf{i}} \frac{z}{e^z-1}$ nicht existiert. Nach Korollar 4.2.6 konvergiert daher ihre Taylorreihe um 0

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \quad \text{für } z \in B_{2\pi}(0). \tag{120}$$

Die Zahlen B_k werden *Bernoullische Zahlen* genannt.

4.9.1. Proposition. *Für die Bernoullischen Zahlen* B_k *gilt:*

(i) $B_{2k+1} = 0$ *für alle* $k \geq 1$.
(ii) $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0$ *für alle* $m \geq 1$.
(iii) *Alle Bernoullischen Zahlen sind rational.*

(iv) $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$.

(v) *Es gilt* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|B_k|}{k!}} = \frac{1}{2\pi}$. *Insbesondere ist die Folge der Bernoullischen Zahlen unbeschränkt.*

Beweis. Die Funktion

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z+1)}{2(e^z-1)} = \frac{z\big(e^{z/2}+e^{-z/2}\big)}{2\big(e^{z/2}-e^{-z/2}\big)}$$

ist gerade, also müssen alle ungeraden Taylorkoeffizienten von $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ verschwinden, woraus sofort (i) folgt. Für $z \in B_{2\pi}(0)$ konvergieren (119) und (120) absolut, also gilt

$$\begin{aligned} 1 = \frac{e^z-1}{z} \cdot \frac{z}{e^z-1} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} z^n \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{n+k+1}{k} B_k \frac{z^{n+k}}{(n+k+1)!} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \frac{z^m}{(m+1)!} \end{aligned}$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich erhalten

$$B_0 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0 \quad \text{für alle } m \geq 1$$

Dies zeigt (ii). Durch diese Formel können die Bernoullischen Zahlen rekursiv berechnet werden, woraus sofort (iii) und (iv) folgen. Da der Konvergenzradius von (120) gleich 2π ist, folgt aus der Formel von Cauchy–Hadamard, siehe Proposition 2.3.9,

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|B_k|}{k!}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Aus $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$ folgt die zweite Behauptung in (v). □

Wir erinnern uns an den Cotangens

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

Wir sind an den Bernoullischen Zahlen interessiert weil sie in der Taylorentwicklung von $\cot(z) - \frac{1}{z}$ um 0 in Erscheinung treten. Genauer haben wir

4.9.2. Proposition. *Für $z \in B_1(0)$, $z \neq 0$, gilt*

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \tag{121}$$

Beweis. Aus (65) erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\mathbf{i}\frac{e^{\mathbf{i}\pi z}+e^{-\mathbf{i}\pi z}}{e^{\mathbf{i}\pi z}-e^{-\mathbf{i}\pi z}} = \pi\mathbf{i}\frac{e^{2\mathbf{i}\pi z}+1}{e^{2\mathbf{i}\pi z}-1} = \pi\mathbf{i} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2\pi\mathbf{i}z}{e^{2\pi\mathbf{i}z}-1}.$$

Nach Proposition 4.9.1(i) und (iv) gilt für alle $z \in B_1(0)$

$$\frac{2\pi\mathbf{i}z}{e^{2\pi\mathbf{i}z}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(2\pi\mathbf{i}z)^k = 1 - \pi\mathbf{i}z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi\mathbf{i}z)^{2k}$$

$$= 1 - \pi\mathbf{i}z + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Die Proposition folgt sofort aus diesen beiden Identitäten. □

4.9.3. Proposition. *Die Reihe holomorpher Funktionen auf* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\varepsilon_1(z) := \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2} \tag{122}$$

konvergiert normal auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. *Es gilt:*

(i) $\varepsilon_1(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}$.
(ii) $\varepsilon_1(z+1) = \varepsilon_1(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
(iii) $\varepsilon_1(2z) = \frac{1}{2}\big(\varepsilon_1(z) + \varepsilon_1(z+\frac{1}{2})\big)$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.
(iv) *Mit* $\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ *gilt*

$$\varepsilon_1(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} 2\zeta(2k) z^{2k-1} \qquad \textit{für alle } z \in B_1(0),\ z \neq 0. \tag{123}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die normale Konvergenz der Reihe. Sei dazu $R > 0$, $|z| \le R$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \ge 2R$. Dann gilt

$$|z-k| \ge |k| - |z| = \tfrac{|k|}{2} + \tfrac{|k|}{2} - |z| \ge \tfrac{|k|}{2} + \tfrac{|k|}{2} - R \ge \tfrac{|k|}{2} + R - R = \tfrac{|k|}{2}.$$

Wir schließen daraus

$$|z^2-k^2| = |z-k||z-(-k)| \ge \tfrac{|k|}{2}\tfrac{|-k|}{2} = \tfrac{k^2}{4} \quad \text{für alle } z \in \bar{B}_R(0) \text{ und } k \in \mathbb{N},\ k \ge 2R.$$

Es folgt

$$\left|\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \le \frac{8R}{k^2} \qquad \text{für alle } z \in \bar{B}_R(0) \text{ und } k \in \mathbb{N},\ k \ge 2R,$$

und also

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\ge 2R} \left|\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \le 8R \sum_{k\in\mathbb{N},\ k\ge 2R} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Daher konvergiert die Reihe (122) auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ normal.

Klarerweise gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\Big) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

woraus sofort (i) folgt. Nun zu (ii). Offensichtlich gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(z+1)-k} = \sum_{k=-n-1}^{n-1} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}.$$

Zusammen mit (i) erhalten wir daher

$$\varepsilon_1(z+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(z+1)-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \varepsilon_1(z).$$

Um (iii) einzusehen, bemerken wir zuerst, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ gilt:

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(z+\frac{1}{2})-k}$$
$$= \sum_{k=-n}^{n} \frac{2}{2z-2k} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{2}{2z-(2k-1)} = \frac{2}{2z+2n+1} + \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{2}{2z-k}$$

Mit Hilfe von (i) erhalten wir also

$$\varepsilon_1(z) + \varepsilon_1(z+\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(z+\frac{1}{2})-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2z+2n+1} + \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{2}{2z-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{2}{2z-k} = 2\varepsilon_1(2z)$$

und dies ist gerade die Behauptung (iii). Nun zu (iv). Sei $|z| < 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2} \frac{1}{1-(z/k)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z}{k}\Big)^{2n}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} 2z^{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2z^{2n+1}\zeta(2n+2) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2z^{2n-1}\zeta(2n)$$

Beachte dabei, dass wegen $|z| < 1 \leq |k|$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{z}{k}\big)^2 = \frac{1}{1-(z/k)^2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, konvergiert. Das Vertauschen der Summation ist durch die absolute Konvergenz dieser Reihen gerechtfertigt. Behauptung (iv) folgt sofort. □

4.9.4. Satz (Partialbruchzerlegung des Cotangens). *Es gilt*

$$\pi\cot(\pi z) = \varepsilon_1(z) \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Beweis. Betrachte die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \pi\cot(\pi z) - \varepsilon_1(z).$$

Aus (121) und (123) folgt $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz, siehe Satz 4.5.7, läßt sich f also holomorph nach 0 fortsetzen, und es gilt $f(0) = 0$. Da sowohl cot als auch ε_1 periodisch sind, siehe Proposition 4.9.3(ii), ist auch f periodisch,

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Daher läßt sich f zu einer holomorphen Funtion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortsetzen.

Wegen $\cot(2z) = \frac{1}{2}\big(\cot(z) + \cot(z+\frac{\pi}{2})\big)$ und Proposition 4.9.3(iii) gilt

$$f(2z) = \frac{1}{2}\Big(f(z) + f\big(z+\tfrac{1}{2}\big)\Big) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Sei $r > \frac{1}{2}$, $R := r + \frac{1}{2} < 2r$ und $|z| \leq r$. Dann gilt $z, z+\frac{1}{2} \in \bar{B}_R(0)$. Wir erhalten

$$|f(2z)| = \tfrac{1}{2}\big|f(z) + f\big(z+\tfrac{1}{2}\big)\big| \leq \tfrac{1}{2}\big|f(z)\big| + \tfrac{1}{2}\big|f\big(z+\tfrac{1}{2}\big)\big| \leq \|f\|_{\bar{B}_R(0)}$$

Daher nimmt die Funktion $f : B_{2r}(0) \to \mathbb{C}$ ihr Maximum in $\bar{B}_R(0)$, also im Inneren von $B_{2r}(0)$ an. Nach dem Maximumsprinzip, siehe Satz 4.6.5, muss $f|_{B_{2r}(0)}$ daher konstant sein. Durch Betrachten beliebig großer r folgt, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant ist. Da $f(0) = 0$ folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

4.9.5. Korollar (Euler). *Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gilt*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}.$$

Speziell haben wir

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9450}$$

Beweis. Aus Satz 4.9.4 und den Reihendarstellungen (121) und (123) folgt

$$-\sum_{k=1}^{\infty}2\zeta(2k)z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1} \quad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

Mittels Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung. Für die expliziten Formeln siehe Proposition 4.9.1(iv). $\square$

Offensichtlich gilt $\zeta(2k) > 0$ also erhalten wir aus Korollar 4.9.5 sofort

4.9.6. Korollar. *Die Bernoullischen Zahlen haben alternierendes Vorzeichen, genauer $(-1)^{k-1}B_{2k} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.*

Wegen $1 < \zeta(2k) \leq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ folgt aus Korollar 4.9.5 auch

4.9.7. Korollar. *Für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, gilt*

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} < |B_{2k}| < \frac{4(2k)!}{(2\pi)^{2k}}.$$

5. Der Residuenkalkül

Der Residuensatz erlaubt es viele Kurvenintegrale längs geschlossener Wege effizient zu berechnen. Dies liefert auch elegante Methoden zur Berechnung bestimmter und uneigentlicher Integrale.

5.1. Laurentreihen.

5.1.1. Definition (Laurentreihe). Unter einer *Laurentreihe* verstehen wir einen formalen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n \tag{124}$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ wird der *Nebenteil*, und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$ wird der *Hauptteil* der Laurentreihe genannt. Die Laurentreihe (124) heißt bei $z \in \mathbb{C}$ konvergent, falls Haupt- und Nebenteil beide bei z konvergieren. In diesem Fall heißt

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$$

der Wert der Laurentreihe bei z. Divergiert Haupt– oder Nebenteil bei z, dann heißt die Laurentreihe bei z divergent.

Für $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq R \leq \infty$ und $c \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit

$$A_{r,R}(c) := \big\{ z \in \mathbb{C} \bigm| r < |z-c| < R \big\}$$

den *Kreisring mit Zentrum c und Radien r, R.* Beachte, dass $A_{r,R} = \emptyset$ falls $r \geq R$. Wie auch bei Potenzreihen sind hier die Fälle $r = 0$ und/oder $R = \infty$ explizit zugelassen. Etwa gilt $A_{0,1}(c) = B_1(c) \setminus \{0\}$, $A_{1,\infty}(c) = \mathbb{C} \setminus \bar{B}_1(c)$ und $A_{0,\infty}(c) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$. Laurentreihen konvergieren auf Kreisringen. Genauer gilt

5.1.2. Proposition. *Es sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ eine Laurentreihe. Weiters sei R der Konvergenzradius ihres Hauptteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, und $1/r$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$. Dann konvergiert die Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ normal auf dem Kreisring $A_{r,R}(c)$; für $|z-c| > R$ oder $|z-c| < r$ divergiert sie. Die Funktion*

$$f : A_{r,R}(c) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n \tag{125}$$

ist holomorph. Ihre Ableitung ist durch die ebenfalls auf $A_{r,R}(c)$ konvergente Laurentreihe

$$f' : A_{r,R}(c) \to \mathbb{C}, \quad f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1} \tag{126}$$

gegeben. Die Laurentreihe

$$F : A_{r,R}(c) \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq -1}}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} \tag{127}$$

konvergiert ebenfalls normal auf $A_{r,R}(c)$. Ist $a_{-1} = 0$ dann ist F eine Stammfunktion von f.

Beweis. Nach Satz 2.3.3 konvergiert der Nebenteil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ normal auf der Kreisscheibe $B_R(c)$. Aus demselben Grund konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ normal auf der Kreisscheibe $B_{1/r}(0)$. Da die Abbildung

$$\big\{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| \big\} \to B_{1/r}(0), \quad z \mapsto w = (z-c)^{-1} \tag{128}$$

stetig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$ normal auf $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c|\}$. Also konvergiert die Laurentreihe auf dem Kreisring $A_{r,R}(c)$ normal. Ist $|z-c| > R$ dann divergiert der Hauptteil, ist $|z-c| < r$ dann divergiert der Nebenteil, siehe Satz 2.3.3. Die Holomorphie von (125) und die Formel für die Ableitung folgen aus Korollar 4.3.3. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ Konvergenzradius R hat, gilt dies auch für den Nebenteil $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}$ von (127), siehe Korollar 2.3.8. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ Konvergenzradius $1/r$ hat, gilt dies auch für $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{-n}}{-n+1}w^{n-1}$. Mittels (128) sehen wir, dass der Nebenteil $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{-n}}{-n+1}(z-c)^{-n+1}$ von (127) auf $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c|\}$ normal konvergiert. Also konvergiert die Laurentreihe (127) normal auf $A_{r,R}(c)$. Ist $a_{-1} = 0$ und wenden wir (126) auf F an, dann folgt $F' = f$. □

5.1.3. Schreibweise. Ist $A = A_{r,R}(c)$ ein Kreisring, $c \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < \infty$, und $f : \partial A \to \mathbb{C}$ stetig, dann schreiben wir

$$\int_{\partial A} f dz := \int_{\partial B_R(c)} f dz - \int_{\partial B_r(c)} f dz.$$

5.1.4. Satz (Cauchysche Integralformel für Kreisringe). *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $A = A_{r,R}(c)$, $c \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < \infty$, ein offener Kreisring mit $\bar{A} \subseteq U$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial A} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \textit{für alle } z \in A.$$

Beweis. Sei $z \in A$ fix. Die Funktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(z) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

ist holomorph, siehe Satz 4.5.7. Nach Korollar 3.6.14 gilt daher

$$\int_{\partial B_r(c)} g(w) dw = \int_{\partial B_R(c)} g(w) dw. \tag{129}$$

Da $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$ und $z \in B_R(c)$ folgt aus Beispiel 3.6.12

$$\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{w-z} dw = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_R(c)} \frac{f(z)}{w-z} dw = 2\pi\mathbf{i} f(z).$$

Wir erhalten

$$\int_{\partial B_r(c)} g(w) dw = \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

und

$$\int_{\partial B_R(c)} g(w) dw = \int_{\partial B_R(c)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\partial B_R(c)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi\mathbf{i} f(z)$$

Zusammen mit (129) folgt die Behauptung. □

5.1.5. Satz (Laurentreihenentwicklungssatz). *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und $A_{r,R}(c) \subseteq U$. Sei ρ, sodass $r < \rho < R$. Dann sind alle*

$$a_n := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_\rho(c)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

unabhängig von ρ, die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ konvergiert normal auf $A_{r,R}(c)$, und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad \textit{für alle } z \in A_{r,R}(c).$$

Beweis. Nach Korollar 3.6.14 sind die a_n tatsächlich unabhängig von ρ. Sei $z \in A_{r,R}(c)$, und wähle r_1, R_1 mit $r < r_1 < |z - c| < R_1 < R$. Nach Satz 5.1.4 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{R_1}(c)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{r_1}(c)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{130}$$

Nach dem Entwicklungslemma, siehe Proposition 4.2.1, konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ auf $B_{R_1}(c)$, und es gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{R_1}(c)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n. \tag{131}$$

Betrachte die stetige Funktion

$$g : \partial B_{1/r_1}(0) \to \mathbb{C}, \quad g(\tilde{w}) := f(c + \tilde{w}^{-1})$$

und setze

$$b_n := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{1/r_1}(0)} \frac{g(\tilde{w})}{\tilde{w}^{n+1}} d\tilde{w}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{132}$$

Nach Proposition 4.2.1 konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ auf $B_{1/r_1}(0)$, und es gilt $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{1/r_1}(0)} \frac{g(\tilde{w})}{\tilde{w}-\zeta} d\tilde{w} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ für alle $\zeta \in B_{1/r_1}(0)$. Da $(z - c)^{-1} \in B_{1/r_1}(0)$ gilt insbesondere

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{1/r_1}(0)} \frac{g(\tilde{w})}{\tilde{w} - (z - c)^{-1}} d\tilde{w} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - c)^{-n}.$$

Substituieren wir in (132), siehe Proposition 3.3.5, $\tilde{w} = (w - c)^{-1}$, sehen wir

$$b_n = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{r_1}(c)} \frac{f(w)}{(w - c)^{-(n-1)}} dw = -a_{-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir sehen also, dass der Nebenteil $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - c)^{-n}$ unserer Laurentreihe bei z konvergiert, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - c)^{-n} &= -\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - c)^{-n} - b_0\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{1/r_1}(0)} g(\tilde{w}) \left(\frac{1}{\tilde{w} - (z - c)^{-1}} - \frac{1}{\tilde{w}}\right) d\tilde{w} \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{1/r_1}(0)} \frac{g(\tilde{w})}{z - c - \tilde{w}^{-1}} \cdot \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w}^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_{r_1}(c)} \frac{f(w)}{w - z} dw
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt wieder die Substitution $\tilde{w} = (w-c)^{-1}$ verwendet. Zusammen mit (130) und (131) folgt nun, dass unsere Laurentreihe bei z konvergiert und dort den Wert $f(z)$ hat. Da $z \in A_{r,R}$ beliebig war, sehen wir, dass diese Laurentreihe auf ganz $A_{r,R}$ konvergiert. Nach Proposition 5.1.2 muss sie dort auch normal konvergieren. □

5.1.6. Korollar. *Konvergieren zwei Laurentreihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - c)^n$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-c)^n$ auf einem Kreisring $A_{r,R}(c)$, $r < R$, und stellen sie dort dieselbe Funktion dar, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Dies folgt aus der Formel für die Koeffizienten in Satz 5.1.5. □

5.1.7. Definition (Laurententwicklung). Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und $A_{r,R}(c) \subseteq U$, dann heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_\rho(c)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw$$

die *Laurenentwicklung von f im Kreisring $A_{r,R}(c)$*. Dabei ist ρ mit $r < \rho < R$ beliebig. Nach Satz 5.1.5 hängen die Koeffizienten a_n nicht von ρ ab, und es gilt $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ für alle $z \in A_{r,R}(c)$.

5.1.8. Beispiel. Betrachte die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0,1,3\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-3}.$$

Die Laurenentwicklung von f im Kreisring $A_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1 - 3^{-n-1}) z^n.$$

Die Laurententwicklung von f im Kreisring $A_{1,3}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ ist

$$f(z) = \frac{2}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-3^{-n-1}) z^n.$$

Die Laurentreihe von f im Kreisring $A_{3,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z|\}$ ist

$$f(z) = \frac{3}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+3^{n-1}}{z^n}.$$

Dies folgt alles leicht mit Hilfe der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$; und $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-1/z}$ für $|z| > 1$.

5.1.9. Beispiel. Aus der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ erhalten wir die Laurententwicklung der Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$, im Kreisring $A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C}^\times$,

$$\exp\left(\tfrac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

5.2. Singularitäten.

5.2.1. Definition (Singularitäten). Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann heißt c eine *isolierte Singularität* von f. Wir unterscheiden drei Typen von isolierten Singularitäten: Lässt sich f zu einer holomorphen Funktion $U \to \mathbb{C}$ fortsetzen, dann nennen wir c eine *hebbare Singularität* von f. Ist c nicht hebbar und existiert $m \geq 1$, sodass c eine hebbare Singularität der Funktion $z \mapsto (z-c)^m f(z)$ ist, dann nennen wir c einen *Pol* von f. Das kleinst mögliche m mit dieser Eigenschaft heißt die *Ordnung des Pols*. Ist c weder hebbare Singularität noch Pol von f, dann nennen wir c eine *wesentliche Singularität* von f.

5.2.2. Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $R > 0$, sodass $A_{0,R}(c) \subseteq U$. Die Laurententwicklung von f im Kreisring $A_{0,R}(c)$ wird auch die *Laurententwicklung von f bei der isolierten Singularität c* genannt. Ihre Koeffizienten hängen nicht von der Wahl von R ab.

5.2.3. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiters sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die Laurenentwicklung von f bei der isolierten Singularität c. Dann gilt:*

(i) *c ist hebbare Singularität von f genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.*
(ii) *c ist Pol von f der Ordnung $m \geq 1$ genau dann, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$.*
(iii) *c ist wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.*

Beweis. Ad (i): Ist c eine hebbare Singularität von f, dann lässt sich f holomorph nach c fortsetzen und ist daher lokal um c durch eine Potenzreihe gegeben, siehe Satz 4.2.4. Nach Korollar 5.1.6 muss daher $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gelten. Ist umgekehrt $a_n = 0$ für alle $n < 0$, dann ist die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ eine Potenzreihe und diese definiert eine holomorphe Fortsetzung von f nach c, siehe Satz 4.2.4. Behauptung (ii) folgt leicht aus (i) und der Tatsache, dass die Laurentreihe der Funktion $z \mapsto (z-c)^m f(z)$ offensichtlich durch

$$(z-c)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^{n+m}$$

gegeben ist. Behauptung (iii) folgt sofort aus (i) und (ii). □

Mit hebbaren Singularitäten haben wir uns schon in Satz 4.5.7 beschäftigt. Dieser Satz erlaubt es uns nun auch eine analoge Charakterisierung der Pole zu formulieren.

5.2.4. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f hat einen Pol der Ordnung m bei c.*
(ii) *Es existiert eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(c) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$ für alle $z \in U$, $z \neq c$.*
(iii) *Es existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von c und eine holomorphe Funktion $h : V \to \mathbb{C}$, die bei c eine Nullstelle der Ordnung m hat, siehe Definition 4.5.2, sonst aber nullstellenfrei auf V ist, und für die gilt $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ für alle $z \in V$, $z \neq c$.*
(iv) *Es existiert eine Umgebung W von c und Konstanten $M, \tilde{M} > 0$ mit $\tilde{M}|z-c|^{-m} \leq |f(z)| \leq M|z-c|^{-m}$ für alle $z \in W$, $z \neq c$.*

Beweis. Ad (i)⇒(ii): Hat f bei c eine Pol der Ordnung m, dann hat die holomorphe Abbildung $g(z) := (z-c)^m f(z)$ bei c eine hebbare Singularität und definiert daher eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, siehe Satz 4.5.7. Offensichtlich gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$ für alle $z \in U \setminus \{c\}$. Es bleibt noch zu zeigen $g(c) \neq 0$. Indirekt angenommen $g(c) = 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z-c)\tilde{g}(z)$, siehe Proposition 4.5.1. Es folgt $\tilde{g}(z) = (z-c)^{m-1} f(z)$, also hat $z \mapsto (z-c)^{m-1} f(z)$ bei c eine hebbare Singularität. Dies Widerspricht der Minimalität von m. Also muss $g(c) \neq 0$ gelten. Ad (ii)⇒(iii): Sei g wie in (ii). Da $g(c) \neq 0$, existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von c auf der g keine Nullstelle besitzt. Dann ist $h : V \to \mathbb{C}$, $h(z) := \frac{(z-c)^m}{g(z)}$ holomorph, hat eine Nullstelle der Ordnung m, und offensichtlich gilt $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ für alle $z \in V$, $z \neq c$. Ad (iii)⇒(iv): Sei h wie in (iii). Da h bei c eine Nullstelle der Ordnung m hat, existiert eine holomorphe

Funktion $\tilde{h} : V \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = (z-c)^m\tilde{h}(z)$ und $\tilde{h}(c) \neq 0$. Da h außer in c nirgendwo verschwindet, folgt $\tilde{h}(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Wähle eine Umgebung $W \subseteq V$ von c mit $\bar{W} \subseteq V$. Sei $M := \max_{z\in\bar{W}}\bigl\{\bigl|\frac{1}{\tilde{h}(z)}\bigr|\bigr\} > 0$ und $\tilde{M} := \min_{z\in\bar{W}}\bigl\{\bigl|\frac{1}{\tilde{h}(z)}\bigr|\bigr\} > 0$. Dann gilt $\tilde{M} \leq |\frac{1}{\tilde{h}(z)}| \leq M$ für alle $z \in W$. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $|z-c|^{-m}$ folgt $\tilde{M}|z-c|^{-m} \leq |\frac{1}{h(z)}| \leq M|z-c|^{-m}$ für alle $z \in W$, $z \neq c$. Da $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ folgt (iv). Ad (iv)⇒(i): Aus (iv) folgt sofort $|(z-c)^m f(z)| \leq M$ für alle $z \in W$. Aus Satz 4.5.7 folgt daher, dass $(z-c)^m f(z)$ holomorph nach c fortgesetzt werden kann. Damit ist c ein Pol von f der Ordnung höchstens m. Es bleibt zu zeigen, dass die Ordnung genau m ist. Indirekt angenommen die Ordnung wäre kleiner als m. Dann wäre auch $z \mapsto (z-c)^{m-1}f(z)$ holomorph nach c fortsetzbar. Dann existiert eine Konstante $K > 0$ mit $|(z-c)^{m-1}f(z)| \leq K$ für alle $z \in W$. Mit (iv) erhalten wir $\tilde{M}|z-c|^{-m} \leq |f(z)| \leq K|z-c|^{-m+1}$, also $\tilde{M} \leq K|z-c|$ für alle $z \in W$, was $\tilde{M} > 0$ widerspricht. Also muss die Ordnung des Pols genau m sein. □

5.2.5. Beispiel. Die holomorphe Funktion $\cot : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ hat bei jedem Punkt in $\pi\mathbb{Z}$ einen Pol erster Ordnung. Dies folgt Proposition 5.2.4(iii) und der Tatsache, dass die Tangensfunktion bei jedem Punkt in $\pi\mathbb{Z}$ eine Nullstelle erster Ordnung hat. Ebenso hat die Tangensfunktion bei jedem Punkt in $\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$ einen Pol erster Ordnung.

Der nächste Satz gibt uns eine Vorstellung wie wild sich holomorphe Funktionen in der Nähe einer wesentlichen Singularität verhalten.

5.2.6. Satz (Casorati–Weierstraß). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $c \in U$, $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomoprh und c eine wesentliche Singularität von f. Sei $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(c) \subseteq U$. Dann ist $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr)$ dicht*[19] *in $\mathbb{C}$, wobei $A_{0,\varepsilon}(c) = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 < |z-c| < \varepsilon\bigr\}$.*

Beweis. Indirket angenommen $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr)$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine Kreisscheibe $B_r(w)$ mit $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr) \cap B_r(w) = \emptyset$. Daher ist

$$g : A_{0,\varepsilon}(c) \to B_{1/r}(0) \subseteq \mathbb{C}, \quad g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$$

holomorph. Nach Satz 4.5.7 ist c eine hebbare Singularität von g. Beachte, dass $g(z) \neq 0$ und $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ für alle $z \in A_{0,\varepsilon}(c)$. Es sei $0 \leq m < \infty$ die Ordnung der Nullstelle c von g. Ist $m = 0$, dann wäre c hebbare Singularität von f, ein Widerspruch. Ist $m \geq 1$, dann folgt aus Proposition 5.2.4(iii), dass c ein Pol von f der Ordnung m ist, ein Widerspruch. Wir erhalten in jedem Fall einen Widerspruch, also muss $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr)$ dicht sein. □

Ohne Beweis sei hier noch auf folgende stärkere Version hingewiesen.

5.2.7. Satz (Satz vo Picard). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $c \in U$, $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomoprh und c eine wesentliche Singularität von f. Sei $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(c) \subseteq U$. Dann gilt entweder $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr) = \mathbb{C}$ oder es existiert $w \in \mathbb{C}$, sodass $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$.*

5.2.8. Beispiel. Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $f(z) := \exp(\frac{1}{z})$ hat bei $0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $f\bigl(A_{0,\varepsilon}(c)\bigr) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[19] Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt dicht, falls $\bar{X} = \mathbb{C}$.

5.2.9. Beispiel. Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin(\frac{1}{z})$ hat bei $0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $f\big(A_{0,\varepsilon}(c)\big) = \mathbb{C}$.

5.3. Das Residuum.

5.3.1. Definition (Residuum). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die Laurententwicklung von f bei der isolierten Singularität c, siehe Definition 5.2.2. Dann heißt $a_{-1} \in \mathbb{C}$ das *Residuum von f bei c*, und wird mit $\operatorname{res}_c(f)$ bezeichnet. Nach Satz 5.1.5 gilt

$$\operatorname{res}_c(f) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial B_r(c)} f dz = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{\mathbf{i}t})e^{\mathbf{i}t} dt$$

für jede Kreisscheibe $B_r(c)$ mit $\bar{B}_r(c) \subseteq U$.

Zur Bestimmung von Residuen ist folgende Beobachtungen oft hilfreich.

5.3.2. Proposition. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $f, g : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_c(\lambda f) = \lambda \operatorname{res}_c(f) \quad \textit{sowie} \quad \operatorname{res}_c(f + g) = \operatorname{res}_c(f) + \operatorname{res}_c(g).$$

Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die Laurenreihe von f um c, und $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-c)^n$ die Laurentreihe von g um c. Dann ist

$$(\lambda f + g)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda a_n + b_n)(z-c)^n$$

die Laurentreihe von $\lambda f + g$ um c, woraus sofort die Behauptung folgt. □

5.3.3. Proposition. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) *Ist c eine hebbare Singularität von f dann gilt $\operatorname{res}_c(f) = 0$.*
(ii) *Hat f bei c einen Pol der Ordnung höchstens $m \geq 1$, und ist $g : U \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z-c)^m f(z)$, dann gilt*
$$\operatorname{res}_c(f) = \frac{g^{(m-1)}(c)}{(m-1)!}.$$
(iii) *Hat f bei c einen Pol erster Ordnung, dann gilt*
$$\operatorname{res}_c(f) = \lim_{z \to c} (z-c)f(z).$$

Beweis. Behauptung (i) folgt aus Proposition 5.2.3(i). Nun zu (ii): Nach Proposition 5.2.3(ii) hat die Laurentreihe von f um c die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

Die Taylorreihe von g um c hat daher die Gestalt $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-c)^n$. Also ist $\frac{g^{(m-1)}(c)}{(m-1)!} = a_{(m-1)-m} = a_{-1} = \operatorname{res}_c(f)$. Behauptung (iii) ist der Spezialfall $m = 1$ von (ii). □

5.3.4. Proposition. *Es seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$, $g(c) = 0$ und $g'(c) \neq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_c \frac{f}{g} = \frac{f(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Nach Proposition 4.5.1 existiert eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z-c)h(z)$ für alle $z \in U$, und $h(c) = g'(c) \neq 0$. Daher hat die Funktion $z \mapsto (z-c)\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{h(z)}$ bei c eine hebbare Singularität. Ist $f(c) \neq 0$, dann ist also c Pol erster Ordnung von $\frac{f}{g}$, und mit Proposition 5.3.3(iii) folgt $\operatorname{res}_c \frac{f}{g} = \frac{f(c)}{g'(c)}$. Nun zum Fall $f(c) = 0$. Wieder nach Proposition 4.5.1 existiert eine holomorphe Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z-c)\varphi(z)$ für alle $z \in U$. Es folgt $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{h(z)}$ und dies hat eine hebbare Singularität bei c. Daher ist $\operatorname{res}_c \frac{f}{g} = 0$, siehe Proposition 5.3.3(i). $\square$

5.3.5. Proposition. *Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt* $\operatorname{res}_c(f') = 0$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 5.1.2, siehe (126). $\square$

5.3.6. Beispiel. Wir erinnern uns die holomorphen Funktionen

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \pi(\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}) \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\operatorname{res}_{\pi(\frac{1}{2}+n)}(\tan) = -1 \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_{\pi n}(\cot) = 1.$$

Dies folgt aus den Darstellungen $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ und $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ sowie Proposition 5.3.4.

5.3.7. Beispiel. Betrachte die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Dann gilt $\operatorname{res}_{\pm\mathbf{i}}(f) = \pm\frac{1}{2\mathbf{i}}$. Wieder folgt dies aus Proposition 5.3.4.

5.4. Die Umlaufzahl.

5.4.1. Definition (Umlaufzahl). Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, und $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Dann heißt

$$\operatorname{ind}_c(\gamma) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{1}{z-c} dz$$

die Umlaufzahl von γ bei c.

5.4.2. Beispiel. Sei $r > 0$. Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachte den geschlossenen Weg $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_k(t) := re^{\mathbf{i}kt}$. Dieser Weg umläuft den Rand der Kreisscheibe $B_r(0)$ anschaulich gesprochen k mal; für $k > 1$ im mathematisch positiven, für $k < 0$ im mathematisch negativen Sinn. Es gilt

$$\operatorname{ind}_c(\gamma_k) = \begin{cases} k & \text{falls } c \in B_r(0), \text{ und} \\ 0 & \text{falls } c \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(0). \end{cases}$$

Dies folgt aus Beispiel 3.6.10.

5.4.3. Satz (Umlaufzahl). *Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{ind}_c(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ *ist offen und die Funktion* $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$, $w \mapsto \operatorname{ind}_w(\gamma)$ *ist lokal konstant.*
(iii) $\int_c(\gamma^*) = -\operatorname{ind}_c(\gamma)$.

(iv) *Ist $H : [a,b]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ eine Homotopie geschlossener Wege mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$, sodass $c \notin H\big([a,b]\times[0,1]\big)$. Dann gilt* $\operatorname{ind}_c(\gamma_0) = \operatorname{ind}_c(\gamma_1)$.

Beweis. Ad (i): Betrachte die differenzierbare Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad f(\tau) := \big(\gamma(\tau) - c\big)\cdot \exp\Big(-\int_a^\tau \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}dt\Big).$$

Für ihre Ableitung finden wir

$$f'(\tau) = \Big(\gamma'(\tau) - (\gamma(\tau)-c)\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)-c}\Big)\cdot \exp\Big(-\int_a^\tau \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}dt\Big) = 0.$$

Also existiert eine Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\tau) = \alpha$, d.h.

$$\gamma(\tau) - c = \alpha \cdot \exp\Big(\int_a^\tau \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}dt\Big) \quad \text{für alle } \tau \in [a,b].$$

Setzen wir $\tau = a$ erhalten wir $\gamma(a) - c = \alpha$. Da $\gamma(a) \neq c$ folgt insbesondere $\alpha \neq 0$. Setzen wir $\tau = b$ erhalten wir

$$\alpha = \gamma(a) - c = \gamma(b) - c = \alpha \cdot \exp\Big(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}dt\Big) = \alpha \cdot \exp\big(2\pi\mathbf{i}\cdot \operatorname{ind}_c(\gamma)\big).$$

Da $\alpha \neq 0$ schließen wir $1 = \exp\big(2\pi\mathbf{i}\cdot\operatorname{ind}_c(\gamma)\big)$. Aus Proposition 2.4.2 erhalten wir $2\pi\mathbf{i}\cdot\operatorname{ind}_c(\gamma) \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$, also $\operatorname{ind}_c(\gamma) \in \mathbb{Z}$. Damit ist (i) bewiesen.

Ad (ii): Da das Intervall $[a,b]$ kompakt ist, siehe Proposition 1.9.6, und da γ stetig ist, sehen wir, dass $\gamma([a,b])$ kompakt ist, siehe Proposition 1.9.2. Nach Proposition 1.9.3 ist $\gamma([a,b])$ daher eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Daher ist ihr Komplement $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ offen. Es verbleibt zu zeigen, dass die Funktion

$$\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \operatorname{ind}_w(\gamma) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-w}dz \tag{133}$$

stetig ist, denn dann muss sie wegen (i) schon lokal konstant sein. Sei also w_n eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ die gegen $w \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ konvergiert. Wir zeigen zunächst, dass die Folge von Funktionen $z \mapsto \frac{1}{z-w_n}$ auf $\gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ konvergiert. Da $[a,b]$ kompakt ist, muss die stetige Funktion $t \mapsto |\gamma(t)-w|$ ihr Minumum annehmen, und da $w \notin \gamma([a,b])$, existiert $d > 0$ mit $|\gamma(t) - w| \geq d$ für alle $t \in [a,b]$. Wir folgern

$$|z - w| \geq d \quad \text{für alle } z \in \gamma([a,b]). \tag{134}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|w - w_n| \leq \min\big\{\tfrac{d^2\varepsilon}{2}, \tfrac{d}{2}\big\} \quad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{135}$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann auch $|z - w_n| \geq |z-w| - |w-w_n| \geq d - d/2 = d/2$ für alle $z \in \gamma([a,b])$. Zusammen mit (134) und (135) erhalten wir

$$\Big|\frac{1}{z-w_n} - \frac{1}{z-w}\Big| = \Big|\frac{-w+w_n}{(z-w_n)(z-w)}\Big| = \frac{|w-w_n|}{|z-w_n|\cdot|z-w|} \leq \frac{d^2\varepsilon/2}{d/2\cdot d} = \varepsilon$$

für alle $z \in \gamma([a,b])$ und alle $n \geq n_0$. Also konvergiert $z \mapsto \frac{1}{z-w_n}$ auf $\gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen $z \mapsto \frac{1}{z-w}$. Aus Proposition 3.3.6 folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma \frac{1}{z-w_n}dz = \int_\gamma \frac{1}{z-w}dz$$

und daher $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ind}_{w_n}(\gamma) = \operatorname{ind}_w(\gamma)$. Also ist (133) tatsächlich stetig, und wir haben (ii) bewiesen. Behauptung (iii) folgt sofort aus Proposition 3.3.4(i). Schließlich folgt Behauptung (iv) aus Korollar 3.6.9. □

5.4.4. Definition (Nullhomologe Wege). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \to U$ heißt *nullhomolog in U* falls für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus U$ gilt $\operatorname{ind}_c(\gamma) = 0$.

5.4.5. Bemerkung. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Jeder in U nullhomotope geschlossene Weg ist auch nullhomolog in U. Dies folgt aus Satz 5.4.3(iv). Die Umkehrung gilt nicht, wir können hier aber kein Gegenbeispiel angeben. Insbesondere ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet jeder geschlossene Weg nullhomolog, da er ja, nach Definition, nullhomotop ist.

Ohne Beweis sei hier fogendes Resultate erwähnt, das die Wichtigkeit dieses Begriffs unterstreichen sollen.

5.4.6. Satz (Cauchyscher Integralsatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und γ ein in U nullhomologer Weg. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$*

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

5.4.7. Bemerkung. Es gilt auch folgende Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Ist γ ein geschlossener Weg in U und gilt $\int_\gamma f dz = 0$ für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, dann muss γ nullhomolog sein. Dazu genügt es $f(z) = \frac{1}{z-c}$ für $c \in \mathbb{C} \setminus U$ zu betrachten.

5.4.8. Bemerkung. Ist U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann besagt Satz 5.4.6, dass $\int_\gamma f dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U und jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, siehe Bemerkung 5.4.5. Dies wissen wir bereits, es folgt entweder aus Korollar 3.6.9, oder mittels Proposition 3.7.2 und Proposition 3.4.1. Obwohl wir Satz 5.4.6 hier nicht voller Allgemeinheit beweisen werden, halten wir fest, dass wir ihn zumindest für einfach zusammenhängende Gebiete U sehr wohl bewiesen haben.

5.4.9. Satz (Cauchysche Integralformel). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und γ ein in U nullhomologer geschlossener Weg. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und jedes $z \in U \setminus \gamma([a, b])$*

$$\operatorname{ind}_z(\gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Beweis. Wir nehmen Satz 5.4.6 als gegeben an, siehe aber Bemerkung 5.4.8, und gehen wie im Beweis von Satz 5.1.4 vor. Betrachte die Funktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(z) & \text{falls } w = z. \end{cases}$$

Dies ist eine holomorphe Funktion, siehe Satz 4.5.7. Nach Satz 5.4.6 gilt daher

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma g(w) dw = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{f(z)}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} \\ = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \operatorname{ind}_z(\gamma), \end{aligned}$$

wie behaupted. □

5.5. Der Residuensatz.

5.5.1. Satz (Residuensatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ ein in U nullhomologer geschlossener Weg. Weiters sei $S \subseteq U$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkt in U, und sodass $\gamma([a,b]) \cap S = \emptyset$. Dann ist $U \setminus S$ offen in $\mathbb{C}$, es gibt nur endlich viele $s \in S$ mit $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$, und es gilt die Residuenformel*

$$\int_\gamma f dz = 2\pi\mathbf{i} \sum_{s\in S} \operatorname{res}_s(f) \operatorname{ind}_s(\gamma).$$

für jede holomorphe Funktion $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$.[20]

Beweis. Wir nehmen Satz 5.4.6 als gegeben an, siehe jedoch Bemerkung 5.4.8. Wir zeigen zunächst, dass $U \setminus S$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Sei dazu $z \in U \setminus S$. Da S keinen Häufungspunkt in U hat, ist auch z kein Häufungspunkt von S, es existiert daher eine Umgebung V von z mit $V \cap S = \emptyset$. Dann ist $U \cap V$ eine Umgebung von z die ganz in $U \setminus S$ liegt, also ist $U \setminus S$ offen.

Nun zur Aussage, dass nur endlich viele $s \in S$ existieren, für die $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$ gilt. Setze $\Gamma := \gamma([a,b])$. Betrachte $\operatorname{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid \operatorname{ind}_z(\gamma) \neq 0\}$. Da γ in U nullhomolog ist, gilt $\operatorname{Int}(\gamma) \subseteq U$. Als stetiges Bild des kompakten Intevalls $[a,b]$ ist Γ kompakt, also beschränkt. Daher existiert $R > 0$ mit $\Gamma \subseteq B_R(0)$. Da γ in $B_R(0)$ nullhomotop ist, gilt $\operatorname{ind}_z(\gamma) = 0$, für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$, siehe Satz 5.4.3(iv). Es folgt $\operatorname{Int}(\gamma) \subseteq B_R(0)$, also ist $\operatorname{Int}(\gamma)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Daher ist ihr Abschluss $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)}$ kompakt, siehe Proposition 1.9.6. Nach Proposition 5.4.3(ii) ist $\operatorname{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid \operatorname{ind}_z(\gamma) = 0\}$ offen in $\mathbb{C}$, also muss das Komplement $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \Gamma$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ sein. Wir erhalten $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)} \subseteq \operatorname{Int}(\gamma) \cup \Gamma \subseteq U$. Daher ist $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)}$ eine kompakte Teilmenge von U. Gäbe es unendlich viele $s \in S$ mit $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$, dann müsste, wegen der Kompaktheit von $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)}$, die Menge $S \cap \operatorname{Int}(\gamma)$ einen Häufungspunkt in $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)}$ haben, siehe Proposition 1.9.6. Wegen $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)} \subseteq U$ wäre dies ein Häufungspunkt von S in U, was wir aber ausgeschlossen haben. Also kann es nur endlich viele $s \in S$ mit $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$ geben.

Seien $s_1, \dots, s_l$ die endlich vielen $s \in S$ mit $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$. Betrachte $\tilde{S} := S \setminus \{s_1, \dots, s_l\}$. Dann hat auch $\tilde{S}$ keinen Häufungspunkt in U und daher ist $W := U \setminus \tilde{S}$ offen in $\mathbb{C}$, siehe oben. Der Weg γ ist auch in W nullhomolog, denn $\mathbb{C} \setminus W = (\mathbb{C} \setminus U) \cup \tilde{S}$ und für jedes $s \in \tilde{S}$ gilt ja $\operatorname{ind}_s(\gamma) = 0$. Sei nun $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Bezeichne mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k,n}(z - s_k)^n$ die Laurententwicklung von f bei der isolierten Singularität s_k von f, $1 \leq k \leq l$. Bezeichne ihren Hauptteil mit

$$g_k : \mathbb{C} \setminus \{s_k\} \to \mathbb{C}, \quad g_k(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{k,n}(z - s_k)^n \qquad 1 \leq k \leq l.$$

Beachte, dass dies nach Propsition 5.1.2 auf $\mathbb{C} \setminus \{s_k\}$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion darstellt. Weiters ist s_k eine hebbare Singularität von $f - g_k$, siehe Proposition 5.2.3(i). Daher lässt sich $f - \sum_{k=1}^{l} g_k$ zu einer holomorphen Funktion $h : W \to \mathbb{C}$ fortsetzen

$$h : W \to \mathbb{C}, \quad h(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{l} g_k(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{s_1, \dots, s_k\}.$$

[20]Da nur endlich viele $s \in S$ mit $\operatorname{ind}_s(\gamma) \neq 0$ existieren, ist die rechte Seite der Residuenformel als endliche Summe zu verstehen.

Wenden wir nun den Cauchyschen Integralsatz, siehe Satz 5.4.6, auf die holomorphe Funktion $h : W \to \mathbb{C}$ und den in W nullhomologen Weg γ an erhalten wir

$$0 = \int_\gamma h dz = \int_\gamma f dz - \sum_{k=1}^{l} \int_\gamma g_k dz. \tag{136}$$

Beachte, dass $\sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k,n}(z - s_k)^n$ auf $\mathbb{C} \setminus \{s_k\}$ eine Stammfunktion besitzt, siehe Proposition 5.1.2, also $\int_\gamma \sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k,n}(z - s_k)^n dz = 0$ gilt, woraus wir schließen

$$\int_\gamma g_k dz = \int_\gamma \frac{a_{k,-1}}{z - s_k} dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot a_{k,-1} \cdot \operatorname{ind}_{s_k}(\gamma) = 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{res}_{s_k}(f) \cdot \operatorname{ind}_{s_k}(\gamma).$$

Zusammen mit (136) folgt nun die Residuenformel. □

5.5.2. Bemerkung. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein in U nullhomologer geschlossener Weg. Dann können wir Satz 5.5.1 mit $S = \emptyset$ anwenden, und erhalten $\int_\gamma f dz = 0$. In diesem Sinn ist der Cauchysche Integralsatz, siehe Satz 5.4.6, ein sehr einfacher Spezialfall des Residuensatzes.

5.5.3. Bemerkung. Betrachten wir den Residuensatz in folgendem einfachen Spezialfall. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to U$ ein in U nullhomologer geschlossener Weg. Weiters sei $c \in U$, sodass $c \notin \gamma([a, b])$. Betrachte die einpunktige Menge $S = \{c\}$ und die holomorphe Funktion $g : U \setminus S \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{f(z)}{z-c}$. Es gilt $\operatorname{res}_c(g) = f(c)$, siehe Proposition 5.3.3(iii). Wenden wir Satz 5.5.1 auf g an, erhalten wir also $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-c} dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{ind}_c(\gamma) \cdot f(z)$. Damit erkennen wir die Cauchysche Integralformel, siehe Satz 5.4.9, als Spezialfall des Residuensatzes.

5.5.4. Beispiel. Wir wollen mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{z^2 + 2z + 3}{z(z^2 + 1)} dz$$

bestimmen, $r > 1$. Sei $S := \{0, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$. Dann ist

$$f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{z^2 + 2z + 3}{z(z^2 + 1)}$$

holomorph. Der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := re^{\mathbf{i}t}$ ist in $\mathbb{C}$ nullhomolog. Da $r > 1$, ist $S \subseteq B_r(0)$, und nach Beispiel 5.4.2 daher

$$\operatorname{ind}_0(\gamma) = \operatorname{ind}_{\mathbf{i}}(\gamma) = \operatorname{ind}_{-\mathbf{i}}(\gamma) = 1.$$

Mit Hilfe von Proposition 5.3.3(iii) finden wir leicht

$$\operatorname{res}_0(f) = 3, \quad \operatorname{res}_{\mathbf{i}}(f) = -1 - \mathbf{i} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_{-\mathbf{i}}(f) = -1 + \mathbf{i}.$$

Aus dem Residuensatz, siehe Satz 5.5.1, erhalten wir daher

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{z^2 + 2z + 3}{z(z^2 + 1)} dz = \int_\gamma \frac{z^2 + 2z + 3}{z(z^2 + 1)} dz = 2\pi\mathbf{i}\big(3 + (-1 - \mathbf{i}) + (-1 + \mathbf{i})\big) = 2\pi\mathbf{i}.$$

5.5.5. Beispiel. Wir wollen mit Hilfe des Residuensatzes auch noch folgendes Integral bestimmen

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(e^z)}{z^3} dz.$$

Sei $S := \{0\}$ und bemerke, dass

$$f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\cos(e^z)}{z^3}$$

holomorph ist. Der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{\mathbf{i}t}$ ist nullhomolog in $\mathbb{C}$. Es gilt $\operatorname{ind}_0(\gamma) = 1$, siehe Beispiel 5.4.2. Weiters ist $\operatorname{res}_0(f) = -\frac{1}{2}\big(\cos(1) + \sin(1)\big)$, siehe Proposition 5.3.3(ii). Aus dem Residuensatz, siehe Satz 5.5.1 erhalten wir also

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(e^z)}{z^3} dz = \int_\gamma \frac{\cos(e^z)}{z^3} dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{res}_0(f) = -\pi\mathbf{i}\big(\cos(1) + \sin(1)\big).$$

5.6. Uneigentliche Integrale. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Existieren

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)dt \quad \text{und} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 f(t)dt$$

dann wird

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt := \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)dt + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 f(t)dt$$

als *uneigentliches Integral* von f bezeichnet.

5.6.1. Lemma. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, und es existiere $\alpha > 1$, $M \geq 0$ und $K \geq 0$, sodass $|f(t)| \leq M|t|^{-\alpha}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \geq K$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ und es gilt*

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(t)dt. \tag{137}$$

Beweis. Es sei R_n eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Für alle m, n mit $R_n, R_m \geq K$ gilt dann:

$$\left|\int_0^{R_n} f(t)dt - \int_0^{R_m} f(t)dt\right| = \left|\int_{R_m}^{R_n} f(t)dt\right| \leq \int_{R_m}^{R_n} |f(t)|dt$$
$$\leq \int_{R_m}^{R_n} M|t|^{-\alpha}dt = \frac{M}{1-\alpha}\Big((R_n)^{1-\alpha} - (R_m)^{1-\alpha}\Big)$$

Da $\alpha > 1$, ist $1 - \alpha < 0$, also $\lim_{n\to\infty}(R_n)^{1-\alpha} = 0$. Wir sehen also, dass $\int_0^{R_n} f(t)dt$ eine Cauchy Folge ist. Daher existiert $\lim_{n\to\infty} \int_0^{R_n} f(t)dt$. Da dies für jede Folge R_n mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ gilt, existiert daher auch $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)dt$. Analog lässt sich zeigen, dass auch $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 f(t)dt$ existiert. Damit ist die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ gezeigt. Wegen $\int_{-R}^R f(t)dt = \int_{-R}^0 f(t)dt + \int_0^R f(t)dt$ existiert daher auch $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(t)dt$ und es gilt (137). □

5.6.2. Satz. *Es sei*

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_{n+2}z^{n+2} + b_{n+1}z^{n+1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

eine rationale Funktion, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $b_{n+2} \neq 0$ und so, dass der Nenner keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. Es seien $s_1, \dots, s_l$ die Nullstellen des Nenners, die in *der oberen Halbebene liegen (ohne Vielfachheit.) Dann existiert das uneigentliche Integral* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *und es gilt gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{l}\operatorname{res}_{s_k}(f).$$

Beweis. Nach Lemma 4.4.4 existiert $A \geq 0$, $B > 0$ und $K \geq 0$ mit

$$\begin{aligned}\left|a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\right| &\leq A|z|^n && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq K, \text{ und}\\ \left|b_{n+2} z^{n+2} + \cdots + b_1 z + b_0\right| &\geq B|z|^{n+2} && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq K.\end{aligned}$$

Mit $M := \frac{A}{B} \geq 0$, daher

$$|f(z)| \leq M|z|^{-2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq K. \tag{138}$$

Nach Lemma 5.6.1 existiert daher das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)dt.$$

Für $R > 0$, betrachte den geschlossenen Weg

$$\gamma_R : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) := \begin{cases} t + R & \text{falls } t \in [-2R, 0] \\ Re^{\mathbf{i}t} & \text{falls } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Sei nun $R \geq K$, sodass alle Nullstellen des Nenners von f in $B_R(0)$ liegen. Dann gilt $\operatorname{ind}_{s_k}(\gamma_R) = 1$ für alle $1 \leq k \leq l$, und $\operatorname{ind}_s(\gamma_R) = 0$ für alle Nullstellen s des Nenners von f die in der unteren Halbebene $\{z \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ liegen. Aus dem Residuensatz, siehe Satz 5.5.1, erhalten wir daher

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{l}\operatorname{res}_{s_k}(f).$$

Offensichtlich gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_{\gamma_R|_{[0,\pi]}} f(z)dz.$$

Es genügt daher zu zeigen $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R|_{[0,\pi]}} f(z)dz = 0$. Mittels (138) folgt dies aber sofort aus

$$\left|\int_{\gamma_R|_{[0,\pi]}} f(z)dz\right| \leq \pi R \cdot \|f\|_{\gamma_R([0,\pi])} \leq \pi R\frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R},$$

wobei wir wieder die Abschätzung aus Proposition 3.3.4(iv) verwendet haben. □

5.6.3. Beispiel. Verwenden wir Satz 5.6.2 um

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t^2+2)(t^2+3)}$$

zu bestimmen. Die Nullstellen des Nenners von $f(z) := \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)}$ sind $\pm\sqrt{2}\mathbf{i}$ und $\pm\sqrt{3}\mathbf{i}$. Keine davon liegt in $\mathbb{R}$. Die Nullstellen in der oberen Halbebene sind $\sqrt{2}\mathbf{i}$

und $\sqrt{3}\mathbf{i}$. Für die Residuen finden wir leicht $\operatorname{res}_{\sqrt{2}\mathbf{i}}(f) = -\frac{\sqrt{2}\mathbf{i}}{4}$ und $\operatorname{res}_{\sqrt{3}\mathbf{i}}(f) = \frac{\sqrt{3}\mathbf{i}}{6}$. Aus Satz 5.6.2 erhalten wir daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+2)(t^2+3)} = 2\pi\mathbf{i}\Big(\operatorname{res}_{\sqrt{3}\mathbf{i}}(f) + \operatorname{res}_{\sqrt{2}\mathbf{i}}(f)\Big)$$
$$= 2\pi\mathbf{i}\Big(\frac{\sqrt{3}\mathbf{i}}{6} - \frac{\sqrt{2}\mathbf{i}}{4}\Big) = \pi\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\Big)$$

5.7. Integrale von Winkelfunktionen.

5.7.1. Satz. *Es sei $Q(x,y)$ eine rationale Funktion die bei $x^2+y^2=1$ stetig ist, $x,y\in\mathbb{R}$. Sei*

$$f(z) := \frac{Q\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big), \frac{1}{2\mathbf{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)}{\mathbf{i}z}.$$

Es seien $s_1,\dots,s_l$ die Polstellen von f, die im Inneren des Einheitskreises $B_1(0)$ liegen (ohne Vielfachheit.) Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} Q\big(\cos t, \sin t\big)dt = 2\pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{l}\operatorname{res}_{s_k}(f).$$

Beweis. Beachte, dass f keine wesentlichen Singularitäten hat. Für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$, gilt $\frac{1}{z}=\bar z$, und daher

$$f(z) = \frac{Q\big(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\big)}{\mathbf{i}z} \quad \text{für } z\in\mathbb{C} \text{ mit } |z|=1. \tag{139}$$

Ist $|z|=1$, dann $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$, und da $Q(x,y)$ bei $x^2+y^2=1$ stetig ist, sehen wir, dass kein Pol von f am Rand des Einheitskreises liegt. Aus dem Residuensatz, siehe Satz 5.5.1, folgt daher

$$\int_{\partial B_1(0)} f dz = 2\pi\mathbf{i}\sum_{k=0}^{l}\operatorname{res}_{s_k}(f).$$

Aus der Definition des Kurvenintegrals und (139) erhalten wir

$$\int_{\partial B_1(0)} f dz = \int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}t})\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}dt = \int_0^{2\pi} Q\big(\operatorname{Re} e^{\mathbf{i}t}, \operatorname{Im} e^{\mathbf{i}t}\big)dt = \int_0^{2\pi} Q\big(\cos t, \sin t\big)dt$$

womit die Proposition bewiesen wäre. □

5.7.2. Beispiel. Wir wollen mit Hilfe von Satz 5.7.1 das Integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\cos t}$$

bestimmen. Wir betrachten daher $Q(x,y) := \frac{1}{3+2x}$. Diese rationale Funktion ist bei $x^2+y^2=1$ stetig. Sei nun

$$f(z) = \frac{Q\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big), \frac{1}{2\mathbf{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)}{\mathbf{i}z} = \frac{\frac{1}{3+2\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}}{\mathbf{i}z} = \frac{1}{\mathbf{i}(z^2+3z+1)}$$

Die beiden Polstellen von f liegen bei $z = -\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, wovon aber nur $s_1 := -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ im Einheitskreis liegt. Für das Residuum erhalten wir $\operatorname{res}_{s_1}(f) = \frac{1}{\mathbf{i}\sqrt{5}}$. Nach

Satz 5.7.1 gilt daher

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = 2\pi\mathbf{i}\cdot \operatorname{res}_{s_1}(f) = 2\pi\mathbf{i}\cdot\frac{1}{\mathbf{i}\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Beachte, dass wegen $\cos(2\pi - t) = \cos(t)$ auch $\frac{1}{3+2\cos t} = \frac{1}{3+2\cos(2\pi - t)}$ gilt, und daher

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Literatur

[1] L.V. Ahlfors, *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London.
[2] J.B. Conway, *Functions of one complex variable.* Graduate Texts in Mathematics **11**. Springer-Verlag, New York-Berlin.
[3] K. Jänich, *Einführung in die Funktionentheorie.* Springer-Verlag, Berlin-New York.
[4] S. Lang, *Complex analysis.* Graduate Texts in Mathematics **103**. Springer-Verlag, New York.
[5] R. Remmert, *Funktionentheorie I.* Grundwissen Mathematik **5**. Springer-Verlag, Berlin.
[6] R. Remmert, *Funtionentheorie II.* Grundwissen Mathematik **6**. Springer-Verlag, Berlin.

Anhang A. Übungsaufgaben

1. Aufgabe. Sei $z := 3 - 4\mathbf{i}$. Berechne $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$, z^2 sowie z^{-3}.

2. Aufgabe. Seien $z_1 := 3 + 4\mathbf{i}$, $z_2 := -1 - 2\mathbf{i}$. Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ sowie $\frac{z_2}{z_1}$.

3. Aufgabe. Verifiziere den binomischen Lehrsatz für komplexe Zahlen:

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}, \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

4. Aufgabe. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ betrachte

$$\zeta := \sqrt{(|z| + \operatorname{Re} z)/2} + \mathbf{i}\tfrac{\operatorname{Im} z}{|\operatorname{Im} z|}\sqrt{(|z| - \operatorname{Re} z)/2}.$$

Zeige $\zeta^2 = z$. Bestimme damit die beiden Quadratwurzeln der folgenden komplexen Zahlen: $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$, $-5 + 12\mathbf{i}$.

5. Aufgabe. Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ betrachte die komplexe Zahl

$$z_{r,\theta} := r\big(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta\big).$$

Unter Zuhilfenahme der Analysis 1 Vorlesung, zeige:

a) $r = |z_{r,\theta}|$.
b) $\cos\theta = \frac{\langle z_{r,\theta}, 1\rangle}{|z_{r,\theta}||1|}$ und $\sin\theta = \frac{\langle z_{r,\theta}, \mathbf{i}\rangle}{|z_{r,\theta}||\mathbf{i}|}$.
c) $z_{r_1,\theta_1} = z_{r_2,\theta_2}$ genau dann, wenn $r_1 = r_2$ und $\theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.
d) Jede nicht verschwindende komplexe Zahl ist von der Form $z_{r,\theta}$.
e) $z_{r_1,\theta_1} \cdot z_{r_2,\theta_2} = z_{r_1 r_2, \theta_1+\theta_2}$.
f) Jede nicht verschwindende komplexe Zahl hat genau n n-te Wurzeln.

6. Aufgabe. Verifiziere folgende Variante der Dreiecksungleichung:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

7. Aufgabe. Eine reell lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt komplex antilinear falls gilt $\psi(\lambda z) = \bar{\lambda}\psi(z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeige $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex antilinear genau dann, wenn $z \mapsto \psi(\bar{z})$ komplex linear ist. Schließe daraus und aus der entsprechenden Charakterisierung komplex linearer Abbildungen, dass eine injektive reell lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann komplex antilinear ist, wenn sie winkeltreu und orientierungsumkehrend ist.

b) Charakterisiere die reellen 2×2-Matrizen die, bezüglich der Standardbasis $(1, \mathbf{i})$ von $\mathbb{C}$, komplex antilineare Abbildungen repräsentieren.

c) Zeige weiters, dass sich jede reell lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eindeutig als Summe einer komplex linearen und einer komplex antilinearen Abbildung schreiben lässt.

8. Aufgabe. Es sei a_n eine Folge komplexer Zahlen, und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Die Folge a_n konvergiere gegen z_1 und gegen z_2. Zeige, dass dann $z_1 = z_2$ gilt, d.h. der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

9. Aufgabe. Es sei z_n eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, dass z_n genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$ beide konvergieren. Zeige weiters, dass in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathbf{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Formuliere und begründe das analoge Resultat für (absolut) konvergente Reihen.

10. Aufgabe. Es seien z_n und w_n zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen, und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann auch die Folgen $\bar{z}_n$, $|z_n|$, λz_n, $z_n + w_n$, $z_n w_n$ konvergieren, und die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n &= \overline{\lim_{n\to\infty} z_n} \\
\lim_{n\to\infty} |z_n| &= \Big|\lim_{n\to\infty} z_n\Big| \\
\lim_{n\to\infty} \lambda z_n &= \lambda \lim_{n\to\infty} z_n \\
\lim_{n\to\infty} z_n + w_n &= \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n \\
\lim_{n\to\infty} z_n w_n &= \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n
\end{aligned}$$

Sind alle $w_n \neq 0$, und gilt $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, dann konvergiert auch $\frac{z_n}{w_n}$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$$

Formuliere und begründe analoge Eigenschaften (absolut) konvergenter Reihen.

11. Aufgabe. Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen sind, und bestimme jeweils den Abschluss:

$$\begin{aligned}
B_r(c) &:= \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z-c| < r\big\} \quad \text{wobei } c \in \mathbb{C} \text{ und } r > 0. \\
\mathbb{H} &:= \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; \operatorname{Im} z > 0\big\} \\
\mathbb{C}^- &:= \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\
\mathbb{C}^\times &:= \mathbb{C} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

12. Aufgabe. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ bestimme

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \qquad \text{und} \qquad \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0}$$

wobei im zweiten Fall $z_0 \neq 0$ vorausgesetzt sei.

13. Aufgabe. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass jede wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Zeige, dass für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ auch die Umkehrung gilt: eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

14. Aufgabe. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ zwei (lokal) gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen. Seien weiters $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ und $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ (lokal) beschränkt. Zeige, dass dann $f_n g_n : X \to \mathbb{C}$ (lokal) gleichmäßig gegen fg konvergiert. Formuliere und begründe ein analoges Kriterium für (lokal) gleichmäßige Konvergenz von $\frac{f_n}{g_n}$.

15. Aufgabe. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty z^n$ auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ normal (und daher lokal gleichmäßig) konvergiert. Zeige nun

$$\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

Zeige weiters, dass $\sum_{n=0}^\infty z^n$ auf $B_1(0)$ nicht gleichmäßig konvergiert.

16. Aufgabe. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. Zeige:
a) $\bar{X}$ ist abgeschlossen.
b) $X \subseteq \bar{X}$.
c) X ist abgeschlossen genau dann, wenn $X = \bar{X}$.
d) $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.
e) $\bar{X}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ die X umfasst.
f) Ist $z \in \bar{X}$, dann existiert eine Folge a_n in X mit $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.
g) $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$.
h) $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$.
i) Ist $X \subseteq Y$ dann auch $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$.

17. Aufgabe. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $\partial X = \bar{X} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus X}$ der Rand von X. Zeige

$$\mathbb{C} = \mathring{X} \cup \partial X \cup (\mathbb{C} \setminus \bar{X}), \quad \mathring{X} \cap \partial X = \mathring{X} \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \partial X \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \emptyset.$$

Zeige weiters, dass für offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ stets $\partial U = \bar{U} \setminus U$ gilt. Bestimme den Rand der Mengen in Aufgabe 11.

18. Aufgabe (Möbiustransformationen). Für

$$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

definiere

$$f_A : \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{-d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}, \quad f_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

a) Rechtfertige Definitionsgebiet und Wertebereich von f_A, und zeige, dass f_A stetig ist. Diskutiere auch den Fall $c = 0$.

b) Für $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ zeige $f_{\lambda A} = f_A$.

c) Für $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ zeige $f_{AB} = f_A \circ f_B$ woimmer beide Seiten definiert sind. Hier bezeichnet AB das übliche Matrizenprodukt. Schließe daraus, dass f_A bijektiv mit Umkehrfunktion $f_{A^{-1}}$ ist.

d) Zeige, dass

$$g : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \quad f(z) := \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$$

bijektiv ist, und die Umkehrabbildung durch

$$h : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, \quad h(z) := \mathbf{i}\frac{1 + z}{1 - z}$$

gegeben ist. Hier bezeichnet $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene, und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe.

19. Aufgabe. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige

$$\|f\|_X = 0 \Leftrightarrow f = 0$$
$$\|\lambda f\|_X = |\lambda| \cdot \|f\|_X$$
$$\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$$
$$\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$$

Diskutiere auch die Fälle $\|f\|_X = \infty$ und/oder $\|g\|_X = \infty$.

20. Aufgabe (Euler). Zeige, dass die Polynomfolge

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) := \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n$$

lokal gleichmäßig gegen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert. Insbesondere gilt daher

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \exp(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Anleitung: a) Zeige

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k}\cdot\frac{z^k}{k!} \quad \text{für alle } z\in\mathbb{C} \text{ und alle } n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$$

b) Für jedes $0 \leq a \leq 1$ und $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$|1-a^k| = (1-a)\big(1+a+a^2+\cdots+a^{k-1}\big) \leq (1-a)k.$$

Schließe daraus

$$\Big|1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\Big| \leq \frac{k(k-1)}{n} \quad \text{für alle } k,n\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ n\geq k.$$

c) Verwende dies um die folgende Abschätzung zu etablieren

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n\right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} \quad \text{für alle } z\in\mathbb{C} \text{ und alle } n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$$

d) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ auf $\mathbb{C}$ normal konvergiert. Argumentiere warum daher f_n lokal gleichmäßig gegen exp konvergiert.

21. Aufgabe. Warum sind folgende Funktionen holomorph? Berechne ihre Ableitung!

$$\begin{aligned}
p_1 &: \mathbb{C}\to\mathbb{C}, & p_1(z) &:= (1+2\mathbf{i}) + 3z + 4\mathbf{i}z^2 + (5+6\mathbf{i})z^{17}\\
p_2 &: \mathbb{C}\to\mathbb{C}, & p_2(z) &:= (4+\mathbf{i})\big(3\mathbf{i}z-(5-6\mathbf{i})\big)^{42}\\
p_3 &: \mathbb{C}\to\mathbb{C}, & p_3(z) &:= \Big((-3\mathbf{i}z)^7 - (5z^2-17\mathbf{i})\big((6+2\mathbf{i})z-4\mathbf{i}z^2\big)\Big)^{127}\\
R &: \mathbb{C}\setminus\{2+3\mathbf{i},5\mathbf{i}\}\to\mathbb{C}, & R(z) &:= \frac{1+2z+3\mathbf{i}z^2+4z^3}{\big(z-(2+3\mathbf{i})\big)\big(z-5\mathbf{i}\big)}
\end{aligned}$$

22. Aufgabe. Warum ist die Funktion

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad f(x+\mathbf{i}y) := \big(1+2x-3y+5x^2-5y^2\big) + \big(3x+2y+10xy\big)\mathbf{i}$$

holomorph? Berechne ihre Ableitung.

23. Aufgabe. Leite die Produktregel für holomorphe Funktionen aus den Rechenregeln für reell differenzierbare Funktionen und Satz 2.2.1 her.

24. Aufgabe. Es bezeichne $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ den Hauptzweig des Logarithmus, siehe Beispiel 2.2.7. Zeige $\lim_{z\to 0}|\log(z)| = \infty$. Seien weiters a_n und b_n zwei Folgen mit $\operatorname{Im} a_n > 0$, $\operatorname{Im} b_n < 0$, die beide gegen $z_0 \in (-\infty, 0)$ konvergieren. Zeige

$$\lim_{n\to\infty}\log(a_n) = \log|z_0| + \mathbf{i}\pi \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\log(b_n) = \log|z_0| - \mathbf{i}\pi.$$

Schließe daraus, dass $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ nicht stetig auf $\mathbb{C}^\times$ fortgesetzt werden kann.

25. Aufgabe. Zeige mit Hilfe von Proposition 2.4.2

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) \quad \text{für } z,w\in\mathbb{C}^- \text{ mit } \big|\arg(z)+\arg(w)\big| < \pi.$$

Berechne $\log(\mathbf{i})$, $\log\left(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)$, sowie $\log\left(\mathbf{i}\cdot\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)$ und beobachte

$$\log\Big(\mathbf{i}\cdot\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big) \neq \log(\mathbf{i}) + \log\Big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big).$$

Zeige weiters

$$\log(zw) - \big(\log(z)+\log(w)\big) \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \quad \text{für alle } z,w\in\mathbb{C}^- \text{ mit } zw\in\mathbb{C}^-.$$

26. Aufgabe. Sei $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in \mathbb{C}$, $a>0$, $b>0$,

$$R := \big\{x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C} \,\big|\, |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\big\}$$

und $u: R\to\mathbb{R}$ harmonisch, d.h. u ist C^2 und es gilt $u_{xx}+u_{yy}=0$. Definiere

$$v: R\to\mathbb{R}, \quad v(x,y) := \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds.$$

Zeige, dass $f := u+\mathbf{i}v : U\to\mathbb{C}$ holomorph und C^2 ist.

27. Aufgabe. Es sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und es gelte $f'=f$ sowie $f(0)=1$. Zeige $f(z)=\exp(z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

28. Aufgabe. Beweise Proposition 2.4.6.

29. Aufgabe (Hyperbolische Sinus- und Cosinusfunktion). Die hyerbolischen Winkelfunktionen werden wie folgt definiert.

$$\sinh:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$
$$\cosh:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad \cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

Zeige

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

und

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

sowie

$$\sinh(z) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z), \quad \cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z).$$

Schließe daraus, dass $\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$ die Nullstellenmenge von sinh ist, $\mathbf{i}\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$ die Nullstellenmenge von cosh ist, $\mathrm{Per}(\sinh) = \mathrm{Per}(\cosh) = 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$ gilt, und die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$$
$$\cosh(z+w) = \sinh(z)\sinh(w) + \cosh(z)\cosh(w)$$

Zeige weiters

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

und bestimme den Konvergenzradius dieser Potenzreihen.

30. Aufgabe (Arcustangens). Es bezeichne $U := \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}t \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$. Zeige, dass die Abbildungen

$$U \to \mathbb{C}^-, \quad z \mapsto \frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{C}^- \to U, \quad w \mapsto \frac{w-1}{\mathbf{i}(w+1)}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind, vgl. Aufgabe 18. Schließe daraus, dass die Abbildungen

$$\arctan : U \to \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\}, \quad \arctan(z) := \frac{1}{2\mathbf{i}} \log \frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z}$$

und

$$\tan : \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\} \to U, \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{\mathbf{i}(e^{2\mathbf{i}z}+1)}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind, siehe Proposition 2.4.2. Zeige weiters

$$\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{für alle } z \in U.$$

Zeige auch, dass arctan nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ ausgedehnt werden kann.

31. Aufgabe (Potenzreihe des Arcustangens). Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Konvergenzradius 1 hat. Berechne die Ableitung der durch diese Potenzreihe gegebenen holomorphen Funktion $B_1(0) \to \mathbb{C}$ und schließe daraus, vgl. Aufgabe 30,

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

32. Aufgabe (Komplexe Potenzen). Es sei $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Für $z \in \mathbb{C}^-$ und $s \in \mathbb{C}$ definiere

$$z^s := \exp(s \log(z)).$$

Zeige

$$z^{s_1+s_2} = z^{s_1} \cdot z^{s_2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^- \text{ und alle } s_1, s_2 \in \mathbb{C},$$

sowie

$$z^s \in \mathbb{C}^\times, \quad z^0 = 1, \quad z^1 = z, \quad z^{-s} = \frac{1}{z^s}, \quad 1^s = 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

Schließe daraus, dass für $n \in \mathbb{Z}$ diese Definition mit der üblichen übereinstimmt, d.h. $z^n = z \cdots z$, und $z^{-n} = \frac{1}{z \cdots z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beachte, dass auch $e^s = \exp(s)$. Zeige weiters, vgl. Aufgabe 25,

$$(z_1 \cdot z_2)^s = z_1^s \cdot z_2^s \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ und } z_1, z_2 \in \mathbb{C}^- \text{ mit } \big|\arg(z_1) + \arg(z_2)\big| < \pi$$

und

$$\log(z^s) = s \log(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \big|\operatorname{Im}(s \log(z))\big| < \pi.$$

sowie

$$(z^{s_1})^{s_2} = z^{s_1 \cdot s_2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s_1, s_2 \in \mathbb{C} \text{ mit } \big|\operatorname{Im}(s_1 \log(z))\big| < \pi.$$

Betrachte schließlich die holomorphen Funktionen

$$p_s : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}^\times, \quad p_s(z) := z^s \quad \text{für } s \in \mathbb{C}$$
$$q_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times, \quad q_z(s) := z^s \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^-.$$

Zeige $(p_s)'(z) = sp_{s-1}(z)$ und $(q_z)'(s) = \log(z)q_s(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$ und alle $s \in \mathbb{C}$.

33. Aufgabe. Zeige

$$z^{\mathbf{i}} = e^{-\arg(z)} \in \big(e^{-\pi}, e^{\pi}\big) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ mit } |z| = 1.$$

Berechne $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$, $\big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)^{\mathbf{i}}$, sowie $\big(\mathbf{i}\cdot\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)^{\mathbf{i}}$ und beobachte

$$\Big(\mathbf{i}\cdot\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathbf{i}} \neq \mathbf{i}^{\mathbf{i}}\cdot\Big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathbf{i}}$$
$$\log\big(e^{2\pi\mathbf{i}}\big) \neq (2\pi\mathbf{i})\cdot\log(e)$$
$$\big(e^{2\pi\mathbf{i}}\big)^{\mathbf{i}} \neq e^{2\pi\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}}$$

34. Aufgabe (Formel von Newton und Abel). Für $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere Binomialkoeffizienten

$$\binom{s}{0} := 1, \quad \binom{s}{n} := \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zeige

$$\binom{s}{n} + \binom{s}{n+1} = \binom{s+1}{n+1} \quad \text{und} \quad \binom{s+1}{n+1} = \frac{s+1}{n+1}\binom{s}{n} \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass für $s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n}(z-1)^n$ Konvergenzradius 1 hat. Was passiert für $s \in \mathbb{N}$? Schließe daraus, dass für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_s : B_1(1) \to \mathbb{C}, \quad f_s(z) := \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n}(z-1)^n$$

holomorph ist. Zeige

$$f_s(z) = zf_{s-1}(z) \quad \text{sowie} \quad (f_s)'(z) = sf_{s-1}(z) \quad \text{für } z \in B_1(1) \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

Zeige, dass die Ableitung der holomorphen Funktion $z \mapsto \frac{f_s(z)}{p_s(z)}$ verschwindet, wobei p_s die Funktion aus Aufgabe 32 bezeichnet. Schließe daraus

$$z^s = \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n}(z-1)^n \quad \text{für } z \in B_1(1) \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

35. Aufgabe. Es seien $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen. Es bezeichne r das Minumum der beiden Konvergenzradien. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-z_0)^n$ mindestens Konvergenzradius r hat, und

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(z-z_0)^n = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n(z-z_0)^n\Big) \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Hinweis: Proposition 1.11.6(ix).

36. Aufgabe (Der Arcussinus). Es sei $V := \mathbb{C} \setminus \{t \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$. Weiters bezeichne $\mathbb{C}^- \to \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $z \mapsto \sqrt{z} := \exp(\log(z)/2)$ den Hauptzweig der Quadratwurzel. Zeige, dass die Abbildungen

$$\big\{u \in \mathbb{C} \ \big|\ \operatorname{Re} u > 0\big\} \to V, \quad u \mapsto \frac{u - u^{-1}}{2\mathbf{i}}$$

und

$$V \to \big\{u \in \mathbb{C} \ \big|\ \operatorname{Re} u > 0\big\}, \quad w \mapsto \mathbf{i}w + \sqrt{(\mathbf{i}w)^2 + 1}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind. Verwende dies um zu zeigen, dass die Abbildungen

$$\sin : \big\{z \in \mathbb{C} \ \big|\ |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\} \to V, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}$$

und

$$\arcsin : V \to \big\{z \in \mathbb{C} \ \big|\ |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\}, \quad \arcsin(z) := \frac{1}{\mathbf{i}} \log\Big((\mathbf{i}z) + \sqrt{(\mathbf{i}z)^2 + 1}\Big)$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind. Zeige weiters

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \text{für alle } z \in V.$$

Zeige auch, dass arcsin nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ ausgedehnt werden kann. Bestimme auch $\lim_{z \to \pm 1} \arcsin(z)$.

37. Aufgabe (Potenzreihe des Arcussinus). Folgere aus Aufgabe 34

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} z^{2n} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Schließe daraus

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n + 1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

38. Aufgabe. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(a) = 1$, $\gamma(b) = \mathbf{i}$. Bestimme

$$\int_\gamma 4z^3 + 3\mathbf{i}z^2 - 4z + 5\mathbf{i}dz.$$

39. Aufgabe. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = -2\mathbf{i}$. Bestimme

$$\int_\gamma z e^{z^2} dz.$$

40. Aufgabe. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ein geschlossener Weg. Bestimme

$$\int_\gamma 1 + \tan^2(z + \pi/2) dz.$$

41. Aufgabe. a) Zeige, dass die beiden Wege

$$\gamma_0 : [0, \pi] \to \mathbb{C}^\times \qquad \gamma_0(t) := e^{\mathbf{i}t}$$
$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}^\times \qquad \gamma_1(t) := e^{-\mathbf{i}t}$$

in $\mathbb{C}^\times$ nicht homotop relativ Endpunkte sind. Hinweis: Betrachte die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z}$ und $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$.

b) Fassen wir nun γ_0 und γ_1 als Wege in $\mathbb{C}$ auf. Zeige, dass sie dann in $\mathbb{C}$ sehr wohl homotop relativ Endpunkte sind. Warum funktioniert jetzt das Argument mit den Kurvenintegralen, siehe a), nicht mehr?

42. Aufgabe. Wir erinnern uns an das Wegintegral der reellen Analysis. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $p, q : X \to \mathbb{R}$ stetig, und $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit Komponenten $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Dann heißt

$$\int_\gamma pdx + qdy := \int_a^b p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt$$

das Wegintegral von $pdx + qdy$ längs γ. Mittels der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z \leftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, ist $X \subseteq \mathbb{C}$, und $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ ein Weg. Sei $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, d.h. $f = u + \mathbf{i}v$. Zeige

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma udx - vdy + \mathbf{i} \int_\gamma vdx + udy.$$

Anmerkung: Mit $f = u + \mathbf{i}v$ und $dz = dx + \mathbf{i}dy$ erhalten wir durch formales Ausmultiplizieren $fdz = (u + \mathbf{i}v)(dx + \mathbf{i}dy) = udx - vdy + \mathbf{i}(vdx + udy)$. Dies kann als Merkregel dienen, und mit dem Kalkül der Differentialformen präzisiert werden.

43. Aufgabe (Satz von Green). Wir erinnern uns an einen Spezialfall des Satzes von Green aus der Analysisvorlesung. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen und $B_r(c)$ eine Kreisscheibe mit $\bar{B}_r(c) \subseteq U$. Seien $p, q : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Betrachte den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := c + re^{\mathbf{i}t}$, der einmal den Rand der Kreisscheibe $B_r(c)$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft. Der Satz von Green besagt in dieser Situation

$$\int_{\bar{B}_r(c)} (q_x - p_y) dxdy = \int_\gamma pdx + qdy,$$

wobei $q_x = \frac{\partial q}{\partial x}$, $p_y = \frac{\partial p}{\partial y}$ die partiellen Ableitungen bezeichnen, und das Wegintegral auf der rechten Seite wie in Aufgabe 42 zu interpretieren ist.

Sei nun $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig.[21] Zeige, wie der Cauchysche Integralsatz für Kreisscheiben, siehe Korollar 3.6.13,

$$\int_{\partial B_r(c)} f dz = 0$$

aus dem Satz von Green abgeleitet werden kann.

44. Aufgabe. a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0, z_1 \in U$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Betrachte die Menge aller Wege $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$. Für zwei solche Wege γ_0 und γ_1 schreibe $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls eine Homotopie H von Wegen relativ Endpunkten in U existiert, mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$, vgl. Definition 3.6.1. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Betrachte die Menge aller geschlossenen Wege $\gamma : [a, b] \to U$. Für zwei solche Wege γ_0 und γ_1 schreibe $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls eine Homotopie H geschlossener Wege in U existiert, mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

[21] Wie schon öfters erwähnt, werden wir bald sehen, dass jede holomorphe Funktion glatt ist. Also ist die Voraussetzung, dass f' stetig sei, überflüssig.

45. Aufgabe. Es sei G ein Sterngebiet. Zeige, dass G zusammenhängend, also ein Gebiet ist. Zeige weiters, dass G einfach zusammenhängend ist, vgl. Beispiel 3.6.4.

46. Aufgabe (Holomorphe Wurzelfunktionen). Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $0 \notin G$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, eine holomorphe Funktion $f_k : G \to \mathbb{C}$ existiert, sodass $(f_k(z))^k = z$ für alle $z \in G$, vgl. Beispiel 3.7.5. Zeige auch, dass f bis auf eine k-te Einheitswurzel eindeutig bestimmt ist, d.h. ist $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit der gleichen Eigenschaft, dann existiert $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^k = 1$, sodass $\tilde{f}(z) = \xi \cdot f(z)$ für alle $z \in G$ gilt. Zeige weiters, dass es keine lokal um $0 \in \mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion g geben kann, die $(g(z))^k = z$ erfüllt, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.