Kurze Wiederholung

▷ Mengentheorie:

$x \in A \subset B$; $\cap$, $\cup$, $\times$, $B \setminus A$, ${}^{c}A$, $\emptyset$,

Beziehung $R \subset B \times C$, Abbildung $f: B \to C$

▷ Logik:

die Verknüpfungen, $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$

$\forall$ für alle

$\exists$ es existiert mindestens ein

$\Longleftrightarrow$ genau dann, wenn

$:$ so dass gilt

Bemerkungen

① $A(n,m) = {}'n \leq m'$

$\forall n \, \exists m: \; A(n,m)$ stimmt

$\exists m \, \forall n: \; A(n,m)$ falsch

② Alle Raben sind schwarz

$$\neg\left(\forall n : S(n)\right) = \exists n : \neg S(n)$$

Es gibt ein nichtschwarzer Rabe

$$\neg\left(\exists n : \neg S(n)\right) = \forall n : S(n)$$

▷ Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1$

Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Newtonsche Formel: $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$

Induktionsprinzip

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, 1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

Bemerkung: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar (d.h. es existiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$).

Definition (Reelle Zahlen) $\mathbb{R}$ ist ein totalgeordneter vollständiger Körper

Bemerkung Diese Eigenschaften definieren $\mathbb{R}$ eindeutig (modulo Isomorphismen).

Wiederholung:

$\mathbb{R}$ ist ein Körper:

$\exists\, s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Summe: $s(x,y) = x+y$):

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x + y = y + x$
2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 = x$
4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, -x \in \mathbb{R} : \quad x + (-x) = 0$

$\exists\, p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Produkt: $p(x,y) = xy$):

5) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad xy = yx$
6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (xy)z = x(yz)$
7) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad x1 = x$
8) $\forall x \neq 0\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : \quad x x^{-1} = 1$
9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (x+y)z = xz + yz$

$\mathbb{R}$ ist totalgeordnete:

$\exists\, T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Totalordnung: $(x,y) \in A \rightsquigarrow x \leq y$):

10) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \ \vee\ y \leq x$
11) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \leq x$
12) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
13) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
14) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

vollständig:

15) $\forall A, B \subset \mathbb{R},\ A, B \neq \emptyset :$

$\{\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\exists z \in \mathbb{R}\ \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq z \leq b\}$

Intervalle

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

d.h. $a \leq x \wedge a \neq x$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

....

Definition Sei $E \subset \mathbb{R}$. Dann:

- $e \in E$ heißt Maximum von E (bzw. Minimum von E), falls $x \leq e \ \forall x \in E$ (bzw. $x \geq e \ \forall x \in E$)
- $M \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke für E (bzw. Untere), falls $x \leq M \ \forall x \in E$ (bzw $x \geq M \ \forall x \in E$)
- E heißt nach oben beschränkt (nach unten) falls es eine obere Schranke für E (untere) existiert.
- E heißt beschränkt, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele:

1) $E = (0,1]$ beschränkt, $\max E = 1$, $\min E$ existr. nicht.
2) $E = \mathbb{N}$ nach unten besch., nach oben nicht
3) $E = \mathbb{Z}$ entweder nach unten noch nach oben beschränkt

<u>Satz</u> Sei $E \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Dann existiert das Minimum der oberen Schranken von E

<u>Beweis</u> Sei $A = \{M \subset \mathbb{R} : M \text{ obere Schranke von } E\}$. A ist nicht leer, da E nach oben beschränkt ist (somit mindestens eine obere Schranke existiert). Für alle $x \in E$ und $M \in A$ hat man $x \leq M$. Das Vollständigkeitsaxiom gibt dann $z \in \mathbb{R}$, sodass $x \leq z \leq M \; \forall x \in E, \forall M \in A$. Der Wert z ist deshalb das Minimum der oberen Schranken. $\square$

<u>Definition</u> Sei $E \subset \mathbb{R}$ nicht leer
Falls E nach oben beschränkt ist, nennen wir der Minimum der oberen Schranken $\sup E \in \mathbb{R}$ (Supremum von E). Falls E nach oben nicht beschränkt ist, sagen wir $\sup E = +\infty$
Gleichweise, fall E nach unten beschränkt ist, nennen wir das Maximum der unteren Schranken $\inf E \in \mathbb{R}$ (Infimum von E) und sei $\inf E = -\infty$ falls E nach unten nicht beschränkt ist.

<u>Beispiele</u>:
1) $E = \mathbb{N}$, $\sup E = +\infty$, $\inf E = \min E = 1$
2) $E = (0, 1]$, $\sup E = \max E = 1$, $\inf E = 0$
3) $E = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\sup E = 1$, $\inf E = 0$.

Satz Sei E nicht leer.
Falls E nach oben (unten) beschränkt ist, ist $l = \sup E$ ($l = \inf E$) genau dann, wenn

1) $\forall x \in E : \ x \leq l \qquad (x \geq l)$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : \ l - \varepsilon < x . \qquad (l + \varepsilon > x)$

Beweis Sei $l = \sup E$. Dann 1) folgt. Da $l - \varepsilon < l$ ist, ist $l - \varepsilon$ keine obere Schranke. Deshalb existiert $x \in E$ mit $l - \varepsilon < x$.

Nehmen wir jetzt 1) und 2) an. Dann ist l eine obere Schranke. Daher $\sup E \leq l$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und x der entsprechende Wert von 2). Dann $l - \varepsilon < x \leq \sup E$. Das heißt

$$l - \varepsilon \leq \sup E \leq l$$

Da ε ist hier beliebig, muss $\sup E = l$ sein. $\square$

Satz (Cantorprinzip) Sei $\mathcal{I}$ eine nicht leere Menge von Intervallen der Form $[a, b]$, sodass
$I_1, I_2 \in \mathcal{I} : \quad I_1 \subset I_2$ oder $I_2 \subset I_1$.
Dann $\exists z \in \mathbb{R} : \ z \in I \ \ \forall I \in \mathcal{I}$.

Beweis Seien $E = \{ c \in \mathbb{R} : [c, d] \in \mathcal{I}$ für ein $d \in \mathbb{R} \}$ und $F = \{ f \in \mathbb{R} : [e, f] \in \mathcal{I}$ für ein $e \in \mathbb{R} \}$. Dann $\forall c \in E \ \forall f \in F$ hat man $c \leq f$. Daher $\exists z \in \mathbb{R} : \ c \leq z \leq f \ \forall c \in E \ \forall f \in F$ (VollständigkeitsAxiom) und $z \in I \ \forall I \in \mathcal{I}$. $\square$

<u>Satz</u> $[0,1]$ ist nicht abzählbar.

<u>Beweis</u> Durch Widerspruch: sei $[0,1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Trennen wir $[0,1] = [0,a] \cup [a,b] \cup [b,1]$ und nennen wir I_0 ein Intervall davon, das x_0 nicht enthält. Dann trennen wir I_0 wieder und nennen wir I_1 das Subintervall von I_0, das x_1 nicht enthält, u.s.w. Die Familie $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, I_2, \dots\}$ entspricht der Voraussetzung des Cantorprinzips. Deshalb existiert $x \in [0,1]$, sodass $x \in I_i$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$. Daher ist $x \neq x_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. $\square$

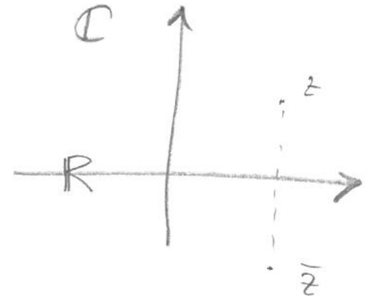
<u>Satz</u> (Existenz von $\sqrt{a}$). Sei $a \geq 0$. Dann $\exists! \, x \geq 0$ sodass $x^2 = a$.

<u>Beweis</u> Für $a = 0$ ist $x = 0$ die einzige Möglichkeit. Sei dann $a > 0$. Da $0 < x < y \Rightarrow 0 < x^2 < y^2$ hat die Gleichung $x^2 = a$ maximal eine Lösung. Sei $E = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y, \ y^2 \leq a\}$. E ist von oben beschränkt durch $n > a$: falls $y \in E$ mit $y > n$ gibt, ist $y^2 > n^2 \geq n > a$. Definieren wir $x = \sup E$ und checken wir, dass $x^2 = a$ durch Widerspruch:

- sei $x^2 < a$, dann auch $(x+\varepsilon)^2 < a$ für $\varepsilon > 0$ klein. Deshalb $x + \varepsilon \in E$ und $x \neq \sup E$. Widerspruch;
- sei $x^2 > a$, dann auch $(x-\varepsilon)^2 > a$ für $\varepsilon > 0$ klein. Da $x = \sup E$ existiert $y \in E$ mit $y > x - \varepsilon$. Dann $y^2 > (x-\varepsilon)^2 > a$ und $y \notin E$. Widerspruch. $\square$

Die Komplexen Zahlen

- Das geometrische Modell



Komplexe Ebene

- Die Konjugation

$$z\bar{z} = z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

- verschiedene Forme von einer Komplexen Zahl

$$z = (x, y), \quad z = x + iy, \quad \underbrace{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{die trigonometrische Form}}$$

$0 \neq z = e^{r+i\theta}$, die exponentielle Form, wobei

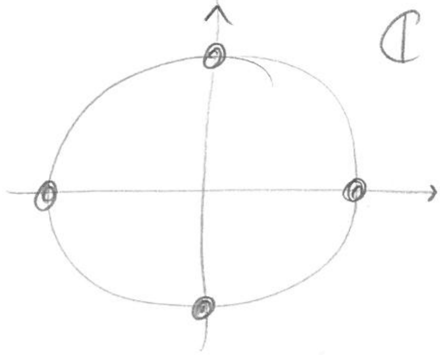
$r = \ln\rho$, $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$

Rechnung: $e^{r+i\theta} = e^r e^{i\theta} = e^{\ln\rho}(\cos\theta + i\sin\theta)$

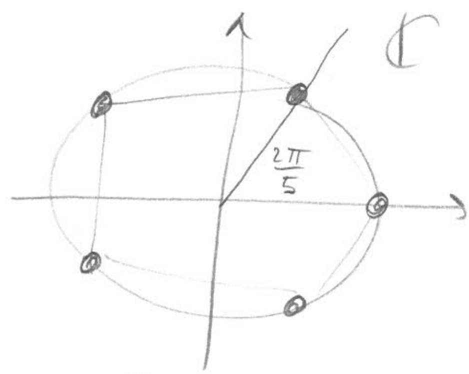
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Euler'sche Gleichung: $e^{i\pi} + 1 = 0$

- Wurzeln von 1: Lösungen der Gleichung $z^n = 1$



$z^4 = 1$



$z^5 = 1$

<u>Übung</u> Lösen wir $z^2 - \bar{z} = 1$

Sei $z = x + iy$. Dann $z^2 = (x+iy)(x+iy) =$
$= x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$
und $\bar{z} = x - iy$. Daher

$$
\begin{aligned}
z^2 - \bar{z} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x^2-y^2) + i(2xy) - (x - iy) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x^2 - y^2 - x) + i(2xy + y) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 1 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$2xy + y = 0 \iff y = 0$ oder $x = -1/2$

$y = 0 \wedge x^2 - y^2 - x = 1 \iff x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = -1/2 \wedge x^2 - y^2 - x = 1 \iff -y^2 = 1/4$ (nie)

Lösungen: $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

<u>Übung</u> Lösen wir $(\bar{z} + i)(z^4 + 16) = 0$

$\bar{z}_1 = -i \iff z_1 = i$

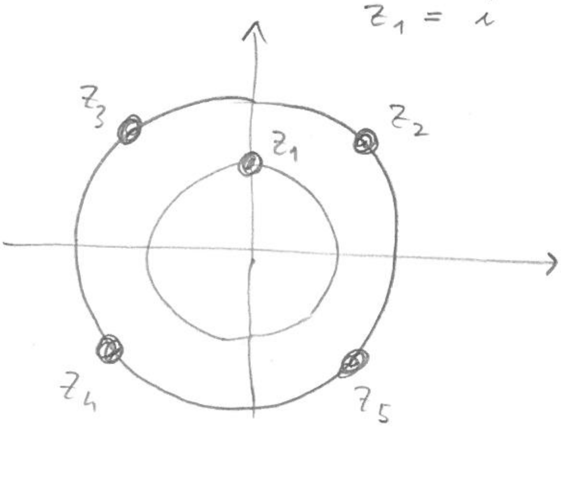
$z^4 = -16$

$z_2 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$z_5 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$



<u>Bemerkung</u> (Fundamentalsatz der Algebra)
Die algebraische Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ hat genau n Lösungen.

<u>Bemerkung</u> Falls die Koeffizienten a_i in $\mathbb{R}$ sind, sind die Lösungen paarweise konjugiert: nehmen wir an, dass $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung ist.

Dann $$0 = \bar{0} = \overline{(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)} =$$
$$= \overline{z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \bar{a}_0 =$$
$$= \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}}\, \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = \leftarrow a_i \in \mathbb{R}!$$
$$= \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_0$$
ist $\bar{z}$ auch eine Lösung.

<u>Übung</u> Zeigen wir, dass $z^{2019} + z = 2019$ mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{R}$ hat.

↳ Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra hat die Gleichung genau 2019 Lösungen in $\mathbb{C}$, die paarweise konjugiert sind. Da allerdings 2019 ungerade ist, muss mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ davon $z = \bar{z}$ erfüllen. Daher ist $z \in \mathbb{R}$.