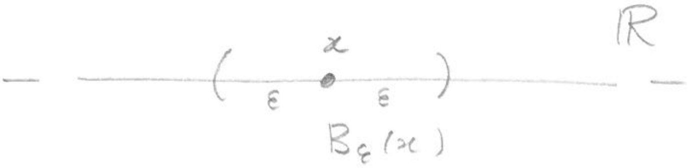
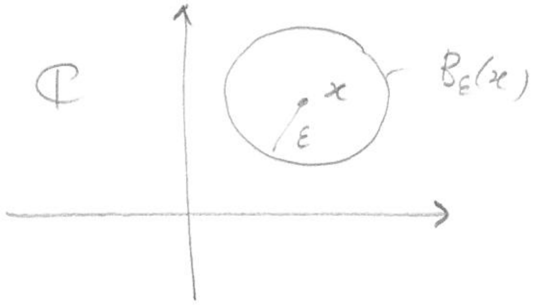
Topologie des $\mathbb{R}$ (und $\mathbb{C}$), Teil 1

<u>Definition</u> Seien $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) und $\varepsilon > 0$.
Die Menge $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) $: |x-y| < \varepsilon\}$
heißt *ε-Umgebung von x*.





<u>Definition</u> Sei $E \subset \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$).
E heißt *offen*, falls $\forall x \in E \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E$
E heißt *abgeschlossen*, falls ${}^cE$ offen ist.

<u>Beispiele</u> in $\mathbb{R}$
1) $E = (a, b)$ ist offen
2) $E = [a, b]$ ist abgeschlossen
3) $E = (a, b]$ ist nicht offen und nicht abg.
4) $E = \mathbb{R}$ ist offen und abgeschlossen
5) $E = \emptyset$ ist offen und abgeschlossen

einzige zwei!

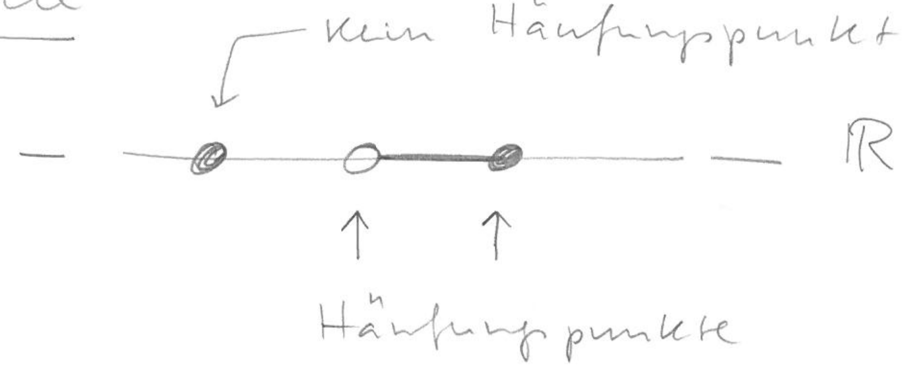
<u>Beispiele</u> in $\mathbb{C}$ $\qquad z = x + iy$, $\mathrm{Im}(z) = y$, $\mathrm{Re}(z) = x$
1) $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ist offen
2) $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ ist abgeschlossen
3) $E = \mathbb{C}$ und $E = \emptyset$ sind offen und abgeschlossen (und sie sind die einzige zwei!)
4) $E = \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$ ist abgeschlossen und nicht offen.

<u>Definition</u> Seien $E \subset \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$) und $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gegeben. x heißt **Häufungspunkt für E**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

<u>Beispiele</u>

1)



2) $E = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$

Häufungspunkte $= \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$

<u>Bemerkung</u> E ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

<u>Bemerkung</u> Die Häufungspunkte von E sind die Punkte die beliebig gut durch Punkte von E approximiert werden können.

Folgen

Definition $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) ist eine Folge von reellen (bzw. komplexen) Zahlen. Man schreibt
a_n für $f(n)$ und (a_n) für f.

Beispiele

$a_n = n$, Folge der natürlichen Zahlen

$b_n = 2n$, Folge der geraden Zahlen

$c_n = c \in \mathbb{R}$, Konstante Folge

$$d_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$e_1 = 1, \quad e_{n+1} = 2e_n$

Bemerkung Man braucht die Ausdruck von f nicht, um eine Folge zu definieren. (Wir können trotzdem nehmen $f(n) = 2^{n-1}$)

$f_1 = 1, \quad f_2 = 1$

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

(diese ist die sogenannte Fibonacci Folge)

Bemerkung Eine endliche Liste ist nicht genug, um eine Folge zu definieren. Nehmen wir

$a_1 = 1, \ a_2 = 3, \ a_3 = 5, \ a_4 = 7, \ a_5 = 9, \ a_6 = 11, \ a_7 = ?$

Sei α beliebig und $h_n = \begin{cases} 0 & n \leq 6 \\ 1 & n > 7 \end{cases}$

Dann $a_n = 2n - 1 + h_n(\alpha - 13)$ hat $a_7 = \alpha$

Konvention Sei $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine n-abhängige Aussage. Wir sagen, dass A fast immer (f.i) gilt, wenn $A(n)$ ab einem gewissen Index stimmt. D.h. falls

$$\exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N: \quad A(n)$$

Beispiele

$A(n) = {}'n \geq 10'$ gilt f.i. (Wir schreiben $n \overset{f.i.}{\geq} 10$)

$B(n) = {}'(-1)^n \geq 0'$ gilt nicht f.i.

Konvergenzverhalten der Folgen

Beispiele

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\qquad a_n \to 1$

$b_n = n^2$ $\qquad b_n \to +\infty$

Definition Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt konvergent, falls $\exists a \in \mathbb{C}$, so dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon: \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Die Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n) und wir schreiben $a_n \to a$ oder $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$.

<u>Beispiel</u> $a_n = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 =: a$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Man nimmt $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

Dann, für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|a_n - a| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

<u>Beispiel</u> $d_n = (-1)^n \not\longrightarrow 1$

Reductio ad absurdum. Sei $d_n \to 1$ und $\varepsilon = 1/2$.
Dann $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$1/2 > |d_n - 1| = |(-1)^n - 1| = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Das ist ein Widerspruch.

<u>Definition</u> $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt <u>uneigentlich konvergent</u> nach $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls

$$\forall M > 0 \; \exists N_M \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; a_n > M \quad (\text{bzw. } a_n < -M)$$

Das Symbol $+\infty$ (bzw. $-\infty$) heißt Limes von (a_n) und wir schreiben $a_n \longrightarrow +\infty$ ($a_n \longrightarrow -\infty$) und $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$)

<u>Beispiel</u> $a_n = n^2$. Nehme $M > 0$. Sei $N_M > \sqrt{M}$
Dann, $\forall n \geq N_M$: $a_n = n^2 \geq N_M^2 > M$.

Erste Sätze über Konvergenten Folgen

Satz Der Limes ist eindeutig.

Beweis durch Widerspruch.

Sei $a_n \to a_1$ und $a_n \to a_2$, mit $a_1 \neq a_2$ in $\mathbb{R}$.

Nehmen wir $\varepsilon < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$. Dann $\exists N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$, sodass

$\forall n \geq N_\varepsilon^1 : |a_n - a_1| < \varepsilon$ und $\forall n \geq N_\varepsilon^2 : |a_n - a_2| < \varepsilon$.

Sei $N_\varepsilon := \max\{N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\}$. Dann $\forall n \geq N_\varepsilon$ haben wir

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - a_n + a_n - a_2| \overset{\text{Dreieck Ungleichung}}{\leq} |a_1 - a_n| + |a_n - a_2|$$

$$= 2\varepsilon < 2\,\frac{|a_1 - a_2|}{2} = |a_1 - a_2|$$

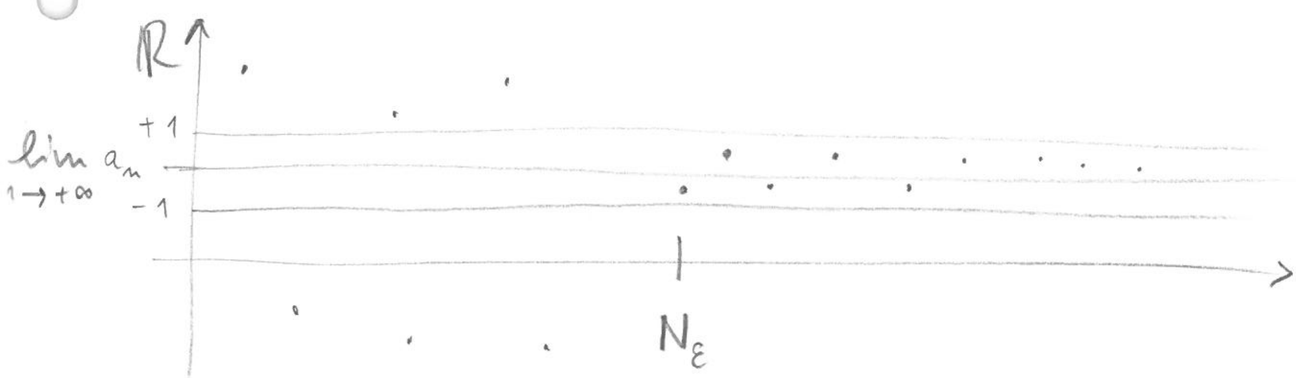
Das ist ein Widerspruch.

Mit $a_1 = \pm\infty$ und $a_2 \in \mathbb{R}$, oder $a_1 = -a_2 = +\infty$ ist es ähnlich. □

Satz (a_n) Konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

Beweis Seien $\varepsilon = 1$ und N_ε gegeben, sodass

$$|a_n - \lim_{m \to +\infty} a_m| < 1 \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$



Dann

$$\min\{|a_1|, \dots, |a_{N_\varepsilon - 1}|, |\lim a_n| - 1\} \leq |a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_\varepsilon - 1}|, |\lim a_n| + 1\}$$

Achtung! Das Bild sieht in $\mathbb{C}$ anders aus! □

<u>Bemerkung</u> (a_n) beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) konvergiert

Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$

<u>Satz</u> (a_n) uneigentlich konvergent $\Rightarrow$ (a_n) nicht beschränkt

<u>Beweis durch Widerspruch</u> Sei (a_n) beschränkt, d.h. $\exists M > 0$, so dass $|a_n| < M$ ist. Da $a_n \longrightarrow \pm\infty$, $\exists N_M \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq M$

$a_n > M$ (falls $a_n \to +\infty$) oder $a_n < -M$ (falls $a_n \to -\infty$). Auf jeden Fall $|a_n| > M$.

Das ist ein Widerspruch. $\square$

<u>Bemerkung</u> (a_n) nicht beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) uneigentlich konvergent.

Gegenbeispiel : $a_n = (-1)^n n$.

Wiederholung über die Definition konvergenter Folgen

$$a_n \longrightarrow a \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Äquivalente und nicht äquivalente Definitionen

$\forall \varepsilon > 0\ \exists T_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq T_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \delta > 0\ \exists T_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m \geq T_\varepsilon : |a_m - a| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < 2\varepsilon$

$\forall M > 0\ \exists N_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_M : |a_n - a| < \frac{1}{M}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon \geq 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$ ← Nein!

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon^2$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon + 1$ ← Nein.