Definitionen mit 'fast immer'

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. Dann

$$a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0 : |a_n - a| \overset{f.i.}{<} \varepsilon$$

$$a_n \to \pm\infty \iff \forall M > 0 : \pm a_n \overset{f.i.}{>} M$$

Satz (Signumsatz) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

$$a_n > 0, \ a_n \to a \implies a \geq 0$$

Beweis durch Widerspruch. Sei $a < 0$. Dann

$|a_n - a| \overset{fi}{<} -\frac{a}{2}$ (wir benutzen $\varepsilon = -\frac{a}{2}$ in der Limesdefinition). Das bedeutet, dass

$$a + \frac{a}{2} \overset{fi}{\leq} a_n \overset{fi}{\leq} a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkungen

1) a kann 0 sein: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

2) Die Umkehrung $a_n \to a \geq 0 \implies a_n > 0$ ist falsch. Man nimmt $a_n = -1/n$

3) Der stärkere Satz. $a_n \to a > 0 \implies a_n \overset{fi}{>} 0$ stimmt.

<u>Satz</u> Sei $a_n \to 0$ (<u>Nullfolge</u>) und sei (b_n) beschränkt. Dann $a_n b_n \to 0$.

<u>Beweis</u> Sei $M > 0$, so dass $|b_n| \le M$. Nehmen wir $\varepsilon > 0$.

Dann $|a_n| \overset{fi}{\le} \varepsilon$. Deshalb haben wir

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \overset{fi}{\le} \varepsilon M. \quad \square$$

<u>Satz</u> (Rechnen mit Limes) Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann

i) $a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b$

ii) $a_n b_n \longrightarrow a b$

iii) Falls $b \neq 0$, dann $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$. Dann $|a_n - a| \overset{fi}{<} \varepsilon$, $|b_n - b| \overset{fi}{<} \varepsilon$ und $\exists M > 0$, so dass $|a_n|, |b_n| \le M$.

Ad i)
$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)|$$
$$\le |a_n - a| + |b_n - b| \overset{fi}{\le} 2\varepsilon.$$

Ad ii)
$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$
$$= |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \le$$
$$= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \le$$
$$\le M \quad \varepsilon \quad + \quad \varepsilon \quad M = 2M\varepsilon.$$

Ad iii) Da $|b_n| \overset{fi}{\ge} |b|/2$, haben wir
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b}\right| =$$

./.

Beispiele

1) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0 + 0$$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha n + 1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right) = \alpha + 0 = \alpha$$

Satz (Rechnen mit $\pm\infty$) Die Rechenregeln gilten auch für $\pm\infty$ in diesen Fällen:

$a \pm \infty = \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$a \cdot \pm\infty = \pm\infty \quad \forall a > 0$

$(-1) \cdot +\infty = -\infty$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$

$\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

Alles andere ist nicht erlaubt! Zum Beispiel

$0 \cdot (\pm\infty) = ?$

$+\infty - (+\infty) = ?$

$1^{\infty} = ?$

$\frac{0}{0} = ?$

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

$0^0 = ?$

$\pm\infty^0 = ?$

Beispiele

1) $$\lim_{\substack{\alpha,\beta>0 \\ n\to+\infty}} \frac{3n^{\alpha}+1}{2n^{\beta}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}n^{\alpha-\beta} + \frac{3}{2n^{\beta}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n^{\alpha-\beta} + 0 = \begin{cases} +\infty & \alpha>\beta \\ \frac{3}{2} & \alpha=\beta \\ 0 & \alpha<\beta \end{cases}$$

2) $\alpha > 0$, $$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} - n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2\alpha}-n^2}{n^{\alpha}+n} = \begin{cases} +\infty & \alpha>1 \\ 0 & \alpha=1 \\ -\infty & \alpha<1 \end{cases}$$

3) $a>0$, $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Fall $a=1$: trivial.

Fall $a>1$. Sei $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Dann

$$a = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \dots + x_n^n$$

$$> 1 + nx_n$$

und $x_n < \frac{a-1}{n}$. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $N_\varepsilon > \frac{a-1}{\varepsilon}$ dann folgt $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = x_n < \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

Fall $a<1$. Sei $\tilde{a} = \frac{1}{a} > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\tilde{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Sei $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$. Dann

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + n x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \dots + x_n^n$$

So haben wir

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} x_n^2$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

sowie $\qquad x_n^2 \leq \frac{2}{n} \implies x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| = x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{N_\varepsilon}} < \varepsilon$$

Monotone Folgen (in $\mathbb{R}$!)

Beispiele

$a_n = n$ ist monoton wachsend

$b_n = 1/n^2$ ist monoton fallend

Satz Eine monotone Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert immer (entweder eigentlich oder uneigentlich).

Ferner: (a_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) beschränkt

(a_n) uneigentlich konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) nicht beschränkt.

Noch ferner:

(a_n) monoton wachsend $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow \sup a_n$

(a_n) monoton fallend $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow \inf a_n$

Beweis Sei (a_n) monoton wachsend (der Fall 'monoton fallend' ist gleich).

$\boxed{\text{Falls } (a_n) \text{ beschränkt}}$ ist, dann $a := \sup a_n < +\infty$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_{N_\varepsilon} \geq a - \varepsilon$. (Sup-Definition).

Dann $\forall n \geq N_\varepsilon$ haben wir

$$a - \varepsilon \leq a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq a$$

Deshalb $a_n \longrightarrow a$.

Hier verwendeten wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!

$\boxed{\text{Falls } (a_n) \text{ nicht beschränkt}}$ ist dann $\forall M > 0$

$\exists N_M \in \mathbb{N}$, so dass $a_{N_M} > M$. Dann

$\forall n \geq N_M$ haben wir

$$M < a_{N_M} \leq a_n$$

Deshalb $a_n \longrightarrow +\infty$.

<u>Beispiel</u> $\quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- (a_n) ist monoton wachsend

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (*)$$

Je größer n, desto größer sind alle diese Zahlen.

- $(*)$ sagt auch dass $\quad 2 < a_n$
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{(n-1)\text{-mal}} = 2^{n-1}$

das werden wir bald checken!

So $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} < 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < 3$

- Wir haben bewiesen, dass $a_n \to a$ mit $a \in (2,3)$

Der Limes $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ heißt $e = 2,71\ldots$

Beispiel $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \end{cases}$

- Wir behaupten, dass $a_n > \sqrt{3}$.
  Beweis durch Induktion

$$a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) > 0$$

$$a_{n+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{9}{a_n^2} + 6\right) - 3$$

$$= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{9}{a_n^2} - 6\right) = \left(\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{3}{a_n}\right)\right)^2 > 0$$

- (a_n) ist monoton fallend

$$2a_{n+1} = a_n + \frac{3}{a_n} \leq a_n + \frac{a_n^2}{a_n} = 2a_n$$

- Dann $a_n \to a$ sowie $a_{n+1} \longrightarrow a$ und wir haben

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right) \Longleftrightarrow a^2 = 3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a = \sqrt{3} \underbrace{\text{oder } a = -\sqrt{3}}$$

$\uparrow$ das kann allerdings nicht sein, da $a \geq 0$ (Signumsatz)

Konvergenz Kriteria

Satz (Vergleich Kriterium) Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$, und $a_n \leq b_n$ f.i.
Dann, $a \leq b$.

Beweis Den Signumsatz mit $(b_n - a_n)$ anwenden. $\square$

Bemerkung Das Vergleich Kriterium gilt auch für $\pm\infty$:
$b_n \overset{fi}{\geq} a_n \to +\infty \implies b_n \to +\infty$.

Satz (Sandwich Kriterium) Seien
$a_n \leq b_n \leq c_n$ f.i. und
$a_n \to l$, $c_n \to l$. Dann, $b_n \to l$.

Beweis Nehme $\varepsilon > 0$. Dann

$$l - \varepsilon \overset{fi}{\leq} a_n \overset{fi}{\leq} b_n \overset{fi}{\leq} c_n \overset{fi}{\leq} l + \varepsilon$$

Nämlich, $|b_n - l| \overset{fi}{\leq} \varepsilon$. $\square$

Beispiel Beweisen Sie, dass $\dfrac{(-1)^n n + \cos(n)}{n^2} \to 0$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{n-1}{n^2}} < \frac{-n + \cos(n^3)}{n^2} \leq \frac{(-1)^n n + \cos(n^3)}{n^2} \leq \frac{n + \cos(n^3)}{n^2} < \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{n+1}{n^2}}$$

Satz (Quotientenkriterium) Sei $a_n > 0$, so dass $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: l$. Dann

1) $l < 1 \implies a_n \longrightarrow 0$,

2) $l > 1 \implies a_n \longrightarrow +\infty$.

Fall $l = 1$, kann man nichts sagen.

Beweis

Ad 1) Sei $\delta = \frac{1-l}{2} > 0$. Dann

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{f.i.}{\leq} 1 - \delta \implies \exists N_\delta \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_\delta$$

$$a_{n+1} \leq (1-\delta) a_n$$

Deshalb, $0 \leq a_{n+1} \leq (1-\delta) a_n \leq (1-\delta)^2 a_{n-1} \leq \dots$

$$\dots \leq (1-\delta)^{n-N_\delta+1} a_{N_\delta} \longrightarrow 0.$$

Ad 2) Sei $\delta = \frac{l-1}{2} > 0$. Dann

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{f.i.}{\geq} 1 + \delta \implies \exists N_\delta \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_\delta$$

$$a_{n+1} \geq (1+\delta) a_n$$

Deshalb, $a_{n+1} \geq (1+\delta)^2 a_{n-1} \geq \dots \geq (1+\delta)^{n-N_\delta+1} a_{N_\delta} \longrightarrow +\infty$

Bemerkung (Fall $l = 1$)

$$a_n = n^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0 \end{cases}$$

<u>Definition</u> Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (a_{n_k}) heißt <u>Teilfolge</u> von (a_n), falls (n_k) eine streng monoton wachsend Folge natürlichen Zahlen (Indexe) ist.

<u>Beispiel</u> $a_n = n$ $\quad a_{n_k} = 2k$

(a_n): die natürlichen Zahlen

(a_{n_k}): die geraden Zahlen.

<u>Definition</u> a heißt <u>Häufungswert</u> der Folge (a_n), falls eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert, so dass

$a_{n_k} \longrightarrow a$.

<u>Beispiel</u> Sei $a_n = (-1)^n$. Dann hat (a_n) genau zwei Häufungswerte: $1, -1$. Achtung! Diese Werte sind nicht Häufungspunkte der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

<u>Bemerkung</u> Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungswert: der Limes.