Satz. $a_n \to a \iff$ Für alle Folgen (n_k) natürlichen Zahlen, die streng monoton wachsend sind, haben wir

$$a_{n_k} \to a$$

Beweis

[Ad $\Rightarrow$] Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon$ $|a_n - a| < \varepsilon$. Wählen wir K_ε, so dass $n_{K_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$. Dann $\forall K \geq K_\varepsilon$ haben wir $n_K \geq n_{K_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$ und $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

[Ad $\Leftarrow$] Beweis durch Widerspruch. Sei $a_n \not\to a$. Dann $\exists \bar{\varepsilon} > 0\ \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - a| \geq \bar{\varepsilon}$

Nehmen wir $N_\varepsilon = K$. Dann $\exists n_k \geq \max\{K, n_{k-1}+1\}$, so dass $|a_{n_k} - a| \geq \bar{\varepsilon}$. Das impliziert, dass $a_{n_k} \not\to a$. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

[Ad $\Leftarrow$, alternativ] Falls $a_n \not\to a$; da (a_n) eine Teilfolge von (a_n) ist, hätten wir eine Teilfolge von (a_n) gefunden, die nicht gegen a konvergiert, was ein Widerspruch ist. $\square$

<u>Satz</u> (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u> Nehmen wir zuerst an, dass (a_n) reel ist.

Sei (a_n) nicht Konstant (sonst gäbe es nichts zu beweisen), d.h. $L_0 < a_n < M_0$. Wir möchten eine Intervallschachtelung bilden. Eine von diesen drei Möglichkeiten muss sein:

1) a_n nimmt den Wert $\frac{L_0+M_0}{2}$ für unendliche Indexe. Dann ist die Konstante Teilfolge OK.

2) a_n nimmt Werte <u>oben</u> $\frac{L_0+M_0}{2}$ für unendliche Indexe.
Dann sei $n_1 > 1$ das erste Index, so dass $a_n > \frac{L_0+M_0}{2}$ und sei $L_1 = \frac{L_0+M_0}{2}$ und $M_1 = M_0$.

3) a_n nimmt Werte <u>unten</u> $\frac{L_0+M_0}{2}$ für unendliche Indexe.
Dann sei $n_1 > 0$ das erste Index, so dass $a_n < \frac{L_0+M_0}{2}$ und sei $L_1 = L_0$ und $M_1 = \frac{L_0+M_0}{2}$

Wenn wir immer Fälle 2) oder 3) haben, definiert dieser Prozess drei Folgen n_k, L_k, M_k, so dass

$$L_k \le a_{n_k} \le M_k, \quad L_k \nearrow, \quad M_k \searrow$$

$$0 \le M_k - L_k = \frac{M_0 - L_0}{2^k} \longrightarrow 0$$

Vom Monotonsatz $L_k \to L$, $M_k \longrightarrow M$ und.
Vergleichs.

$0 \le M - L = \lim_{k\to+\infty} \frac{M_0-L_0}{2^k} = 0$. Deshalb $L = M =: a$

Schließlich, vom Sandwichsatz $a_{n_k} \to a$.
Falls (a_n) komplex ist, muss man mit $(\mathrm{Re}\, a_n)$ und danach $(\mathrm{Im}\, a_n)$ argumentieren. $\square$

<u>Bemerkung</u> Eine Teilfolge einer Teilfolge ist eine Teilfolge.

<u>Beispiel</u> $a_n = n$, $a_{n_k} = 2K$, $a_{n_{K_j}} = a_{n_{3j}} = 6j$

<u>Bemerkung</u> Eine nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge hat immer Häufungswerte (durch Bolzano-Weierstraß-Satz):

<u>Definition</u> Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Falls (a_n) ist nicht von oben (bzw. unten) beschränkt, sagen wir, dass $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right)$

Fall (a_n) ist von oben (bzw. unten) beschränkt, nennen wir $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ der Supremum (Infimum) der Häufungswerte von (a_n).

<u>Bemerkungen</u>

1) $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ existieren immer und

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

2) $a_n \to a \iff \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = a = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$

<u>Bemerkung</u> Warum dieser Name?

$$\limsup_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sup \{ a_k : k \geq n \}$$

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \inf \{ a_k : k \geq n \}$$

<u>Bemerkung</u>

$l = \limsup a_n$ ist ein Häufungspunkt von (a_n)

<u>Beweis</u> $\forall k \quad \exists h_k :\ h_k$ ist Häuf. und

$l - \frac{1}{k} < h_k \leq l$, weil l der sup ist.

Nehmen wir n_k wachsend, so dass $|a_{n_k} - h_k| < \frac{1}{k}$

Dann

$$l - \frac{2}{k} = l - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} < h_k - \frac{1}{k} < a_{n_k} < h_k + \frac{1}{k} \leq$$
$$\leq l + \frac{1}{k}$$

So $a_{n_k} \longrightarrow l$ und l ist ein Häufungswert. $\square$

Satz (Cauchy Kriterium)

(a_n) konvergiert $\iff$ $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \ |a_n - a_m| < \varepsilon.}_{(\text{'Cauchyfolge'})}$

Beweis

$\boxed{\text{Ad} \Rightarrow}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $a_n \to a$. Dann $\exists N_{\varepsilon/2}: \forall j \geq N_\varepsilon$ $|a_j - a| < \varepsilon/2$. Nehmen wir $n, m \geq N_\varepsilon$. Dann,
So, $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq$

$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ad} \Leftarrow.}$ Wir behaupten, dass (a_n) beschränkt ist. Nehmen wir $\varepsilon = 1$ und finden wir N_1. Dann,

$$|a_m| = |a_m - a_{N_1} + a_{N_1}| \leq |a_m - a_{N_1}| + |a_{N_1}| =$$
$$= 1 + |a_{N_1}| \qquad \forall m \geq N_1$$

Vom Bolzano-Weierstraß-Satz haben wir $a_{n_k} \to a$.
Nehmen $\varepsilon > 0$ und finden wir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Sei $n_k \geq N_\varepsilon$ und so groß, dass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$.
Dann $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Reihen

Sei (a_n) eine Folge (in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$). Wir möchten die unendliche Summe (also die 'Reihe') berechnen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

Das bedeutet:

1) Die Folge der Partialsummen (s_n) definieren

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2) Den Limes $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ berechnen.

Definition Sei (a_n) eine Folge reellen Zahlen und sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die Folge ihrer Partialsummen.

Falls $s_n \to s$, sagen wir, dass die Reihe gegen s konvergiert und schreiben $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$

Falls $s_n \to \pm\infty$, sagen wir, dass die Reihe gegen $\pm\infty$ uneigentlich konvergiert und schreiben wir $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty$.

Bemerkung Viele Authoren benutzen „divergent" für „uneigentlich konvergent"!

Bemerkung Man kann die Konvergenz von Reihen komplexer Zahlen ähnlich definieren.

<u>Beispiel</u> (die geometrische Reihe) Sei $z \in \mathbb{C}$.

Betrachten wir $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Wir haben

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

- Für $z = 0$ hat man $\sum_{n=1}^{+\infty} 0^n = 0$. Für $z \neq 1$ kann man

$$(1-z) S_n = 1 - z^{n+1} \iff S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$ berechnen

- Falls $|z| < 1$, $z^{n-1} \longrightarrow 0$ und $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-z}$.
  Wir haben $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

- Falls $|z| > 1$, z^{n-1} konvergiert nicht. $\Rightarrow$ die Reihe ist nicht konvergent

- Sei $|z| = 1$. Falls $z = 1$, $S_n = n+1$. Deshalb $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = +\infty$. Falls $z \neq 1$, $S_n = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - \sin(n+1)\theta}{1-z}$
  Konvergiert nicht.

<u>Übung</u> Berechne man $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n-1}} = 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^2}{5}\right)^n = 5\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1\right) =$$

$$= 5\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}} - 1\right) = 20.$$

Beispiel (die harmonische Reihe)

Wir behaupten, dass $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Da $\frac{1}{n} > 0$, ist die Folge s_n monoton wachsend: sie entweder konvergiert oder uneigentlich konvergiert gegen $+\infty$. Beweisen wir, dass sie nicht konvergent ist. Wir berechnen

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Deshalb kann (s_n) keine Cauchyfolge sein. Da sie monoton wachsend ist, muss $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n = +\infty$.

Satz (Notwendige Bedingung)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a \implies a_n \to 0$$

Beweis (s_n) ist Cauchy. Deshalb $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N_\varepsilon : |s_n - s_m| < \varepsilon$. Nehmen wir $n = m+1$. Dann $|a_{m+1}| = |s_{m+1} - s_m| < \varepsilon$. Deshalb $a_n \to 0$. $\square$

Bemerkung Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.

$$a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$$

Beispiel: die harmonische Reihe. $a_n = 1/n$

Bemerkung. Sei $a_n \geq 0$. Dann ist die Reihe R4

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ entweder konvergent oder uneigentlich gegen $+\infty$ konvergent.

Beweis Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend. $\square$

Kriteria für allgemeine (komplexe) Reihen

Satz (Cauchy Kriterium)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = s \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| < \varepsilon.$$

Beweis $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ konvergiert $\iff$ s_n ist a Cauchy folge. $\square$

Satz (Majorant Kriterium) Sei $|z_n| \overset{f.i.}{\leq} a_n$ und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergent. Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$

Beweis Durch den Cauchy Kriterium. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Dann $$\left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| \overset{f.i.}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \overset{f.i.}{<} \varepsilon. \;\square$$

Kriteria für Folgen nichtnegativer Termen

Satz (Vergleichkriterium) Seien $0 \leq a_n \leq b_n$. Dann $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (entweder endlich oder unendlich).

Beweis durch das Vergleichkriterium für die Folgen der Partiellesummen. $\square$