Beispiel (die generalisierte harmonische Reihe)

Sei $a_n = \frac{1}{n^p}$, $p \geq 0$.

- Fall $p=1$: die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

- Fall $0 \leq p < 1$. Hier $n^p \leq n$. Deshalb
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

- Fall $p = 2$. Wir haben $n^2 > n(n-1)$. Dann
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} =$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} + 1 = 1$$

- Fall $p > 2$. Natürlich $n^p \geq n^2$. Dann
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

- Fall $1 < p < 2$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergiert
(wir werden es nächster Semester beweisen)

Wiederholung
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} = +\infty & \text{falls } p \leq 1 \\ < +\infty & \text{fall } p > 2 \end{cases}$$

<u>Satz</u> (Quotienten Kriterium) Sei $a_n > 0$ f.i. und existiert $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: l$.

1) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Konvergent.

2) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

<u>Beweis</u> Ad 1) Sei $\delta = (1-l)/2 > 0$. Dann $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1-\delta$ f.i. Da $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\delta)^n$ konvergent, haben wir vom Vergleich Kriterium, dass $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ auch Konvergent.

Ad 2) Sei $\delta = (l-1)/2 > 0$. Dann $\frac{a_{n+1}}{a_n} > (1+\delta)$ f.i. Da $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+\delta)^n = +\infty$, haben wir vom Vergleich Kriterium, dass $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n = +\infty$. $\square$

<u>Beispiel</u> Sei $a_n = \frac{5^n}{n^5}$. Berechnen wir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{(n+1)}}{(n+1)^5} \frac{n^5}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} 5 \frac{n^5}{(n+1)^5} = 5$$

Dann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^5} = +\infty$.

<u>Bemerkung</u> Falls $l = 1$ im Quotientensatz, kann man nicht über die Reihe sagen. Beispiel $a_n = \frac{1}{n^p}$.

<u>Satz</u> (Wurzelkriterium) Sei $a_n \ge 0$ f.i. und existiert $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =: l$. Dann

1) $l<1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergiert

2) $l>1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

<u>Beweis</u> Ad 1) Sei $\delta = (1-l)/2 > 0$. Dann

$\sqrt[n]{a_n} \overset{fi}{<} 1-\delta \iff a_n \overset{fi}{<} (1-\delta)^n$.

Ad 2) Sei $\delta = (l-1)/2 > 0$ Dann $\sqrt[n]{a_n} \overset{fi}{>} 1+\delta$

$\iff a_n \overset{fi}{>} (1+\delta)^n$

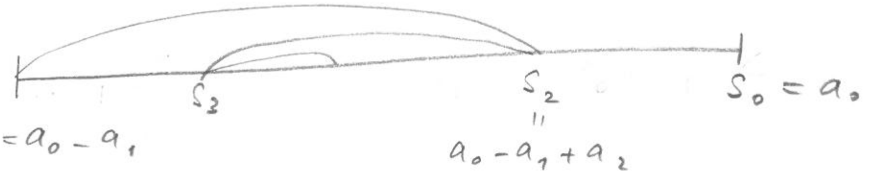
<u>Beispiel</u> Sei $a_n = \dfrac{5^{5n}}{(2\ln n)^n}$. Berechnen wir den Limes $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{5^5}{2\ln n} = 0$. So

$\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{5^{5n}}{(2\ln n)^n}$ konvergiert.

<u>Satz</u> (Leibnitzkriterium) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \downarrow 0$. Dann $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert und

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n - s_m \right| \le a_{m+1}$$

<u>Beweis</u> Die Folgen s_{2n} und s_{2n+1} sind beschränkt und monoton, weil



$s_{2n+1} \nearrow$, $s_{2n} \searrow$, $s_1 \le s_{2n+1} \le s_{2k} \le s_0$

Deshalb $s_{2n+1} \to \underline{s}$, $s_{2n} \to \overline{s}$ aber

$$0 \le \overline{s} - \underline{s} = \lim_{n \to +\infty} \left(s_{2n+1} - s_{2n} \right) = \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 0$$

und $\overline{s} = \underline{s}$, so dass $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

Wir haben auch, dass

$$| s_n - s_{n+m} | \le a_{n+1} .$$

Dann können wir $m \to +\infty$ nehmen. $\square$

<u>Beispiel</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent.

<u>Definition</u> Wir sagen, dass $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ist absolut konvergent falls $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ convergiert.

Gegenbeispiel

<u>Satz</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ absolut konvergent $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergent.

<u>Beweis</u>. Sei $\overline{s}_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Dann ist die Folge $(\overline{s}_n)$ eine Cauchyfolge: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \ge m \ge N_\varepsilon$

$$\varepsilon > | \overline{s}_n - \overline{s}_m | = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$
$$\ge \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_n \right| = |s_n - s_m| ,$$

wobei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$. Deshalb ist (s_n) auch eine Cauchyfolge. $\square$

Umordnung Sei (a_n) gegeben und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijectiv. Die zwei Reihen $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ können verschiedene Summen haben oder sogar nicht konvergieren.

Beispiel $a_n = (-1)^n/n$. Wir haben, dass $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\ln 2$ (wir werden es beweisen)

Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig, existiert es τ, so dass
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)} = s.$$

Satz Sei (a_n) gegeben. Dann

$$\left.\begin{array}{l} \forall \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijektiv} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)} \in \mathbb{R} \\ \text{(beide konvergent!)} \end{array}\right\} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ absolut konvergiert.}$$

Beweis $(\Leftarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N_\varepsilon$ $\sum_{k=N_\varepsilon}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nehmen wir $n \to +\infty$, so dass $\sum_{k=N_\varepsilon}^{+\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Deshalb, $\forall m \geq N_\varepsilon$ $\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon - 1} a_k \right| \leq \sum_{k=N_\varepsilon}^{m} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und durch den Limes $m \to +\infty$:

$\left| s - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon - 1} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nehmen wir jetzt $M \geq N_\varepsilon$, so dass $\{1, 2, 3, \dots, N_\varepsilon - 1\} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(M)\}$. Dann, $\forall m \geq M$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - s \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon - 1} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_\varepsilon - 1} a_k - s \right| \leq \sum_{k=N_\varepsilon}^{+\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

R 11

($\Longrightarrow$) Die Reihe konvergiert, weil $\tau = id$ eine Umordnung ist. Wir schreiben

$a_n = a_n^+ - a_n^-$, wobei $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$ und $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$. Dann müssen die zwei Reihen entweder beide konvergent oder uneigentlich konvergent sein, sonst wird $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nicht konvergieren.

- Falls sie beide konvergent sind, konvergiert auch die Reihe über $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, weil sie die Summe ist

- Falls die beide uneigentlich konvergent sind, können wi eine Umordnung τ finden, so dass $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\tau(n)} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ist. (wie wir für $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ schon gemacht haben). Das ist ein Widerspruch. $\square$

Funktionen

Definition (naive) Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Wir sagen, dass f reellwertig (bzw. komplexwertig) falls $B \subset \mathbb{R}$ (bzw. $B \subset \mathbb{C}$).

Wir sagen, dass f hat eine einzige reelle Variable (bzw. komplexe Variable), falls $A \subset \mathbb{R}$ (bzw. $A \subset \mathbb{C}$).

Beispiel Sei $A = [-1, 2]$, $f: A \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x^2$

Kompakt: $f: x \in [-1, 2] \longmapsto 2x^2$

Definitionen Sei $f: A \to B$ eine Funktion. Dann heißt A Definitionbereich. Sei $\tilde{A} \subset A$. Dann heißt $f(\tilde{A}) = \{ f(a) : a \in \tilde{A} \}$ das Bild von $\tilde{A}$ unter f. $f(A)$ heißt Wertbereich.

Sei $\tilde{B} \subset B$. Dann heißt die Menge

$f^{-1}(\tilde{B}) = \{a \in A : f(a) \in \tilde{B}\}$ das Urbild von $\tilde{B}$.

Beispiel $\tilde{A} = [0, 1]$, $\tilde{B} = [0, 2]$

$f(\tilde{A}) = [0, 2]$ $\qquad f^{-1}(f(\tilde{A})) = [-1, 1] \supsetneq \tilde{A}$

$f^{-1}(\tilde{B}) = [-1, 1]$ $\qquad f(f^{-1}(\tilde{B})) = [0, 2] = \tilde{B}$

Bemerkung

$$f^{-1}(f(\tilde{A})) = \{a \in A : f(a) \in f(\tilde{A})\} \supset \tilde{A}$$

$$f(f^{-1}(\tilde{B})) = \{f(a) : a \in f^{-1}(\tilde{B})\}$$

$$= \{f(a) : f(a) \in \tilde{B}\} = \tilde{B}$$

Definition Der Graph einer Funktion $f : A \to B$ ist die Menge $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$.

Bemerkung Wir können f und $G(f)$ identifizieren.

Definition (exakt) Seien A und B zwei Mengen. Dann heißt Funktion eine Teilmenge $F \subset A \times B$ so dass

$$\big((x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F,\ x_1 = x_2\big) \Rightarrow y_1 = y_2$$

In diesem Fall hat F die Struktur

$$F = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

<u>Definition</u> (Operationen mit Funktionen)

Sei $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$). Dann

$$f+g : x \in A \longmapsto f(x)+g(x)$$

$$fg : x \in A \longmapsto f(x)\,g(x)$$

$$\frac{f}{g} : x \in A \text{ mit } g(x) \neq 0 \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

<u>Definition</u> (Komposition oder Verkettung)

Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$. Dann

$$(g \circ f): x \in A \longmapsto g(f(a))$$

(Umkehrfunktion) Seien $f: A \to B$, $g: B \longrightarrow A$

Wir sagen, dass g ist die Umkehrfunktion von f, falls

$$(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A \quad \text{und}$$

$$(f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$$

Können wir auch sagen $g \circ f = id_A$ (Identität in A)

und $f \circ g = id_B$

<u>Bemerkung</u> Nicht alle Funktione haben eine Umkehrfunktion.

<u>Definition</u> Sei $f: A \to B$. Dann heißt f injektiv, falls $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$, surjektiv, fall $f(A) = B$ und bijektiv, fall injektiv und surjektiv.

<u>Bemerkung</u> Alle bijektive Funktione haben eine eindeutige Umkehrfunktione

Bemerkung Sei $f: A \to B$ injektiv. Dann ist

$f: A \to f(A)$ bijektiv.

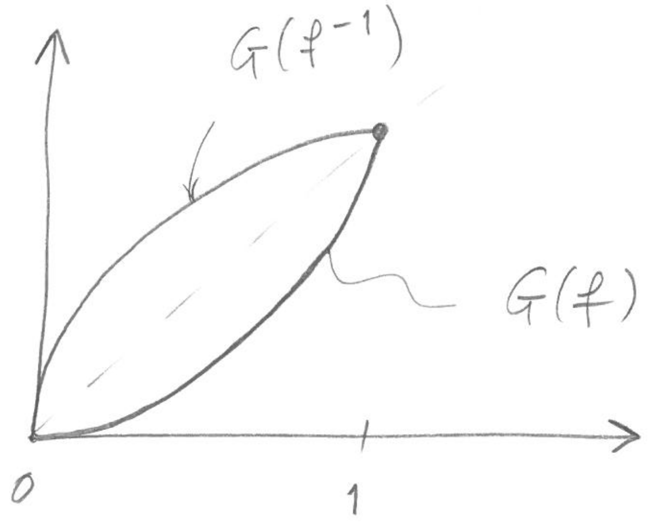
Sei f nicht injektiv. Dann hat sie keine Umkehrfunktion. Dass heißt

f injektiv $\iff$ $\exists$ eine Umkehrungfunktion

Bemerkung Sei $f: A \to f(A)$ injektiv. Dann

$$G(f^{-1}) = \{(b, f^{-1}(b)) : b \in f(A)\}$$

$$= \{(f(a), a) : a \in A\}$$



$f: x \in [0,1] \mapsto x^2$

Elementäre Funktionen in $\mathbb{R}$

- Konstante
- x, x^n, Polynome
- $x \geq 0$, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{-\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, x^q, $x^r :=$ $\sup\{x^q, q \in \mathbb{Q}, q<r\}$
- x^+, x^-, $|x|$, $\lfloor x \rfloor$
- sin, arcsin, cos, arccos, tan, arctan

- a^q, a^x, $\log_a x$ e^x, $\ln x$
- Sh, Ch, Tanh

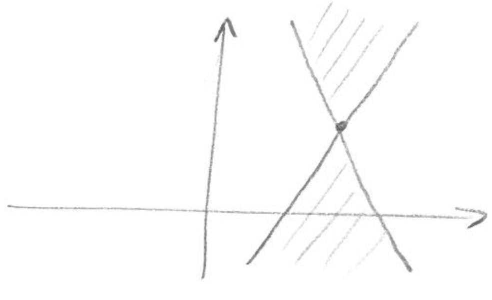
<u>Notation</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

<u>Definition</u> $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt „Lipschitz", falls

$$\exists L > 0 \ \forall x, y \in D : \quad |f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$$

<u>Beispiel</u> $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto 7x$ ist Lipschitz mit $L = 7$

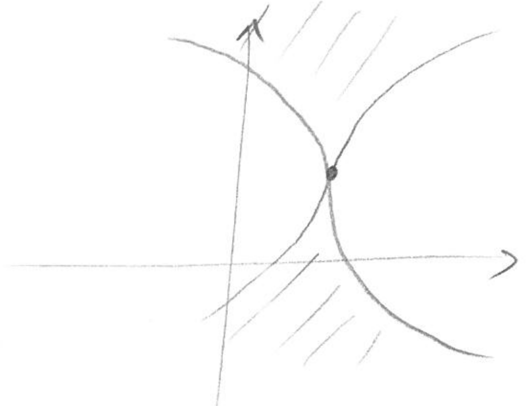
<u>Bemerkung</u> Graph einer Lipschitz Funktion mit $D \subset \mathbb{R}$ und reelle Werte



<u>Definition</u> $f: D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt „Hölder"
mit Koeffizient $\alpha \in (0,1]$, falls
$\exists L > 0 \; \forall x, y \in D: \; |f(x) - f(y)| \leq L |x-y|^\alpha$

<u>Beispiel</u> $f = \sqrt{\cdot}$, $D = \mathbb{R}_+$

<u>Bemerkungen</u> ① Graph einer Hölder Funktion in $\mathbb{R}$



② Sei D beschränkt
f α-Hölder, $0 < \beta \leq \alpha$.
Dann ist f β-Hölder

③ 1-Hölder $\Longleftrightarrow$ Lipschitz

Periodizität

<u>Definition</u> $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch, falls $\exists\, T > 0$, so dass

1) $\forall x \in D, \quad x \pm T \in D$

2) $\forall x \in D, \quad f(x+T) = f(x)$

<u>Bemerkungen</u>

1) Alle Funktionen sind 0-periodisch

2) Beispiele von periodische Funktionen:
sin, cos, Konstanten

3) f ist T-periodisch $\Longrightarrow$ f ist kT-periodisch $\forall k \in \mathbb{N}$.

4) $\inf \{ T > 0 : f \text{ ist } T\text{-periodisch} \}$
Kann 0 sein. (Beispiel: die Konstante Funktion)