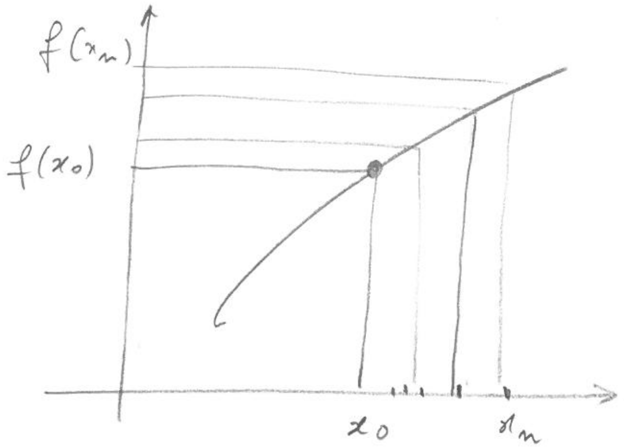
Stetigkeit



$$\boxed{\text{Idee: } x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)}$$

Notation: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition Sei $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass „f in x_0 stetig ist", falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ferner heißt f „stetig", falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Bemerkung In der Sprache der Umgebungen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad f\big(B_\delta(x_0) \cap D\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x_0)\big).$$

Beispiele

1) $f = c \in \mathbb{K}$. Wählen wir jedes $\delta > 0$

2) $f =$ Identität. Wählen wir $\delta := \varepsilon$.

3) f Lipschitz mit Konstante $L > 0$

Wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

Zum Beispiel: $|\cdot|$ ist stetig in $\mathbb{R}$

4) f α-Hölder mit Konstante $L > 0$.

Wählen wir $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{1/\alpha}$. Dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|^\alpha < L\delta^\alpha = \varepsilon.$$

Zum Beispiel: $\sqrt{\cdot}$ ist stetig in $[0, +\infty)$

5) $f(\cdot) = \lfloor \cdot \rfloor$ ist <u>nicht</u> stetig in $z \in \mathbb{Z}$.

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

$$\shortparallel$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D : |x_\delta - x_0| < \delta \ \wedge \ |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall \delta > 0$, und $x_\delta := z - \delta/2$

$$|x_\delta - x_0| = |z - \delta/2 - z| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{und}$$

$$f(x_\delta) = f(z - \delta) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq z - \delta\} = z - 1$$

So $|f(x_\delta) - f(x_0)| = |z - 1 - z| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$

<u>Achtung</u> f ist stetig in $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x = x_0 + h$, mit $|h| < 1$.

Dann, $|f(x) - f(x_0)| = |(x_0 + h)^2 - x_0^2| =$

$= |2x_0 h + h^2| \leq 2|x_0|\,|h| + h^2 \leq (2|x_0| + 1)|h|$

Für jedes $\varepsilon > 0$, nehmen wir $\delta = \varepsilon / (2|x_0| + 1)$.

7) Alle elementäre Funktionen, d.h.

x^α, $\sqrt[\alpha]{x}$, sin, cos, tan,

arcsin, arccos, arctan, Sh, Ch

Tanh, e^x, a^x, $\log_a x$, ln

sind stetig

<u>Satz</u> (Folgenkriterium für Stetigkeit).

Sei $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) f ist stetig in x_0

2) $\forall (x_n) \subset D : x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$

<u>Beweis</u> $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ von der Definition der Stetigkeit von f in x_0. Als $|x_n - x_0| < \delta$ fast immer, haben wir, dass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ fast immer. Nämlich $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Durch Widerspruch: sei f nicht stetig in x_0. Dann

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in D$ mit $|x_\delta - x_0| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Nehmen wir $\delta = 1/n$. Dann $x_{\delta_n} \in D$ und

$|x_{\delta_n} - x_0| < \frac{1}{n}$ und daher $x_{\delta_n} \longrightarrow x_0$. Andererseits

$|f(x_{\delta_n}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ so $f(x_{\delta_n}) \not\longrightarrow f(x_0)$

was ein Widerspruch ist. $\square$

Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Seien $f, g : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann

1) $f + g$ ist stetig in x_0

2) fg ist stetig in x_0

3) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Beweis Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \longrightarrow x_0$. Dann $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \longrightarrow x_0$. Dann

1) $f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(x_0) + g(x_0)$

2) $f(x_n)\, g(x_n) \longrightarrow f(x_0)\, g(x_0)$

3) Fall $g(x_0) \neq 0$, dann $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. $\square$

Anwendung

1) Polynome sind stetig in $\mathbb{R}$

$f(x) = x$ ist stetig in $\mathbb{R}$

$f(x) f(x) = x^n$ ist stetig in $\mathbb{R}$

$g(x) = c$ ist stetig in $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ ist stetig in $\mathbb{R}$

2) Rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind, sind stetig in x_0, falls $q(x_0) \neq 0$ ist.

Noch Beispiele

8) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(a+ib) = a = \mathrm{Re}(a+ib)$

ist stetig. $|f(z) - f(z_0)| = |a - a_0| \le |z - z_0|$

so ist Re 1-Lipschitz.

9) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(a+ib) = \begin{cases} \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} & a+ib \neq 0 \\ 0 & a+ib = 0 \end{cases}$

ist stetig. In $z_0 \neq 0$ benutzen wir die Regeln, da $|z_0|^2 = a^2 + b^2 \neq 0$. In $z_0 = 0$ schätzen wir

$$0 \le |f(a+ib)| = \frac{|a|\, b^2}{a^2+b^2} \le \frac{|a|\,(a^2+b^2)}{a^2+b^2} \le |a|.$$

Deshalb $\lim\limits_{z_n \to 0} |f(z_n)| \le \lim\limits_{z_n \to 0} |\mathrm{Re}(z_n)| = 0$

10) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(a+ib) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a^2+b^2} & a+ib \neq 0 \\ 0 & a+ib = 0 \end{cases}$

ist stetig in $z_0 \neq 0$ aber nicht stetig in $z_0 = 0$. Nehmen wir $z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n} \to 0$

$$f(z_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \not\to f(0).$$

<u>Satz</u> (Verkettung von stetigen Funktionen)

Sei $f : D_f \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D_f$ und $g : D_g \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetig in $f(x_0) \in D_g$. Dann ist $g \circ f : \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} =: D_{g \circ f} \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann $\exists \eta > 0$, so dass

$$g\left(B_\eta(f(x_0)) \cap D_g\right) \subset B_\varepsilon\left((g \circ f)(x_0)\right)$$

Ferner finden wir $\delta > 0$, so dass

$$f\left(B_\delta(x_0) \cap D_f\right) \subset B_\eta\left(f(x_0)\right)$$

Dann haben wir dass

$$(g \circ f)\left(B_\delta(x_0) \cap D_{g \circ f}\right) \subset g\left(B_\eta(f(x_0)) \cap D_g\right)$$
$$\subset B_\varepsilon\left((g \circ f)(x_0)\right). \qquad \square$$

<u>Anwendung</u>

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan\left(\left|\sin\left(\cos^2(x^2 + 5)\right)\right|\right)$$

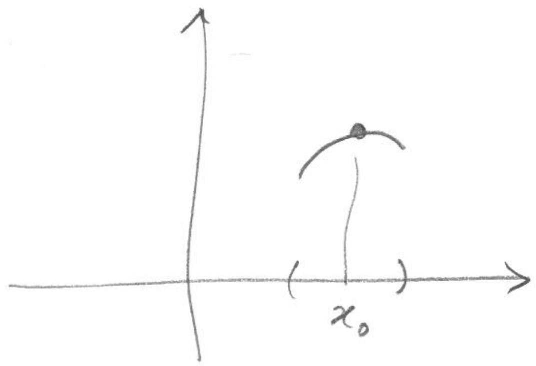
ist stetig

<u>Alternativer Beweis</u> Sei $(x_n) \subset D_f$, so dass $x_n \to x_0$. Dann $f(x_n) \to f(x_0)$ (weil f stetig in x_0 ist) und $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ (weil g stetig in $f(x_0)$ ist). $\square$

<u>Satz</u> (Positivstellensatz)

Sei $f: D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) > 0$. Dann $\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$

$f(x) > 0.$



<u>Beweis</u> Durch Widerspruch: $\forall \delta > 0$ $\exists x_\varepsilon \in B_\delta(x_0) \cap D$ mit $f(x_\varepsilon) \leq 0$. Nehmen wir $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und nennen wir $x_n := x_{\frac{1}{n}}$.

Dann $x_n \longrightarrow x_0$ und daher $f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq 0$ was ein Widerspruch ist. $\square$

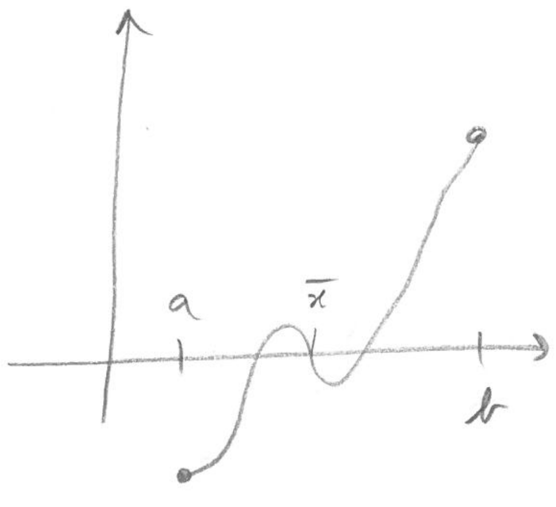
<u>Definition</u> Sei

$$C^0(D) := \{ f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig} \}.$$

Die Menge $C^0(D)$ ist der lineare Raum der stetigen Funktionen (in D). Er hat unendliche viele Dimensionen.

<u>Bemerkung</u> Der Name „C^0" kommt aus „continuity" (Englisch für „Stetigkeit")

<u>Satz</u> (Nullstellensatz). Sei $f \in C^0([a,b])$ und $f(a)f(b) < 0$. Dann $\exists\, \bar{x} \in (a,b)$, $f(\bar{x}) = 0$



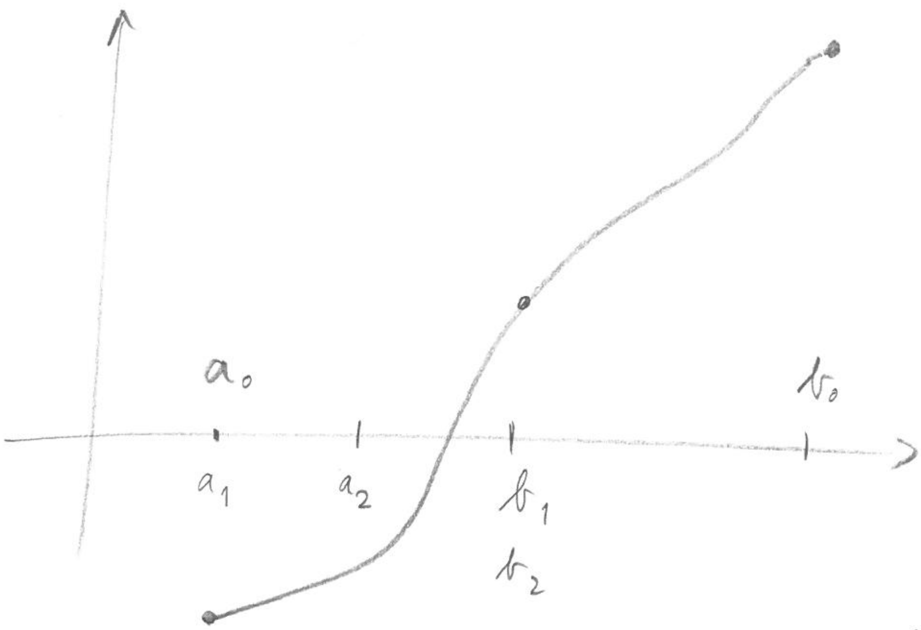
<u>Beweis</u> Sei $f(a) < 0$ (der Fall $f(a) > 0$ ist ähnlich) und $A = \{ x \in [a,b] : f(x) < 0 \}$. Dann $A \neq \emptyset$. Wählen wir $\bar{x} := \sup A \leq b$.

Da $f(\bar{x} + \frac{1}{n}) \geq 0$ und $\bar{x} + \frac{1}{n} \to \bar{x}$, haben wir $f(\bar{x}) \geq 0$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in (\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x})$, $f(x_n) < 0$ ist.

Da $\bar{x} - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \bar{x}$, haben wir, dass $x_n \to \bar{x}$ und $f(\bar{x}) \leq 0$. $\square$

Alternativer Beweis (Konstruktiv)



Wir finden zwei Folgen (a_n) und (b_n) in $[a,b]$, so dass

$$a_n \nearrow \quad b_n \searrow, \quad \forall n,m \quad a_n \le b_m$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Durch den Monotoniesatz haben wir, dass $a_n \longrightarrow \bar{x}$, $b_n \longrightarrow \bar{x}$. Dann

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0. \quad \square$$

<u>Definitionen</u> Sei $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben.
Wir sagen, dass

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ f \text{ wachsend, falls } x,y \in D_f,\ x<y:\ f(x) \le f(y)\\
\bullet\ f \text{ fallend, falls } x,y \in D_f,\ x<y:\ f(x) \ge f(y)\\
\bullet\ f \text{ strikt wachsend, falls } x,y \in D_f,\ x<y:\ f(x) < f(y)\\
\bullet\ f \text{ strikt fallend, falls } x,y \in D_f,\ x<y:\ f(x) > f(y)
\end{array}\right\} f \text{ monoton}$$

Ferner sagen wir, dass M das Maximum von f auf $A \subset D_f$ (bzw. Supremum, Minimum, Infimum) ist, falls

$$M = \max_{x \in A} f(x) \qquad \left(\text{bzw. } M = \sup_{x\in A} f(x),\ \min_{x \in A} f(x),\ \inf_{x\in A} f(x)\right),$$

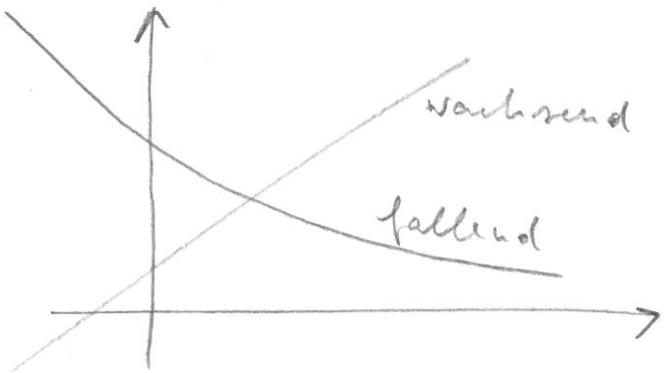
und wir sagen, dass y eine Maximumstelle von f auf A (Minimumstelle) ist, falls

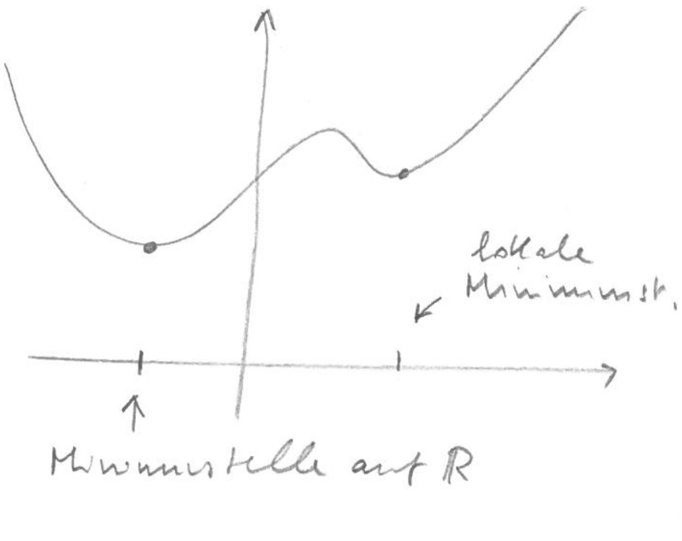
$$f(y) = \max_{x\in A} f(x) \qquad \left(\text{bzw. } f(y) = \min_{x \in A} f(x)\right).$$

Schließlich sagen wir, dass eine Maximumstelle y (bzw. Minimumstelle) lokal ist, falls $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(y) = \max_{x \in A \cap B_\varepsilon(y)} f(x) \qquad \left(\text{bzw. } f(y) = \min_{x\in A\cap B_\varepsilon(y)} f(x)\right)$$

<u>Beispiele</u>





<u>Satz</u> (Maximumstellensatz aka Weierstraßsatz)

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$:

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f, \quad f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

Minimumstelle   Maximumstelle

<u>Beweis</u>

Suchen wir eine Maximumstelle (Analoges gilt für die Minimumstelle). Sei

$$x_n \in [a,b] : \quad f(x_n) \longrightarrow \sup_{[a,b]} f$$

Von Bolzano-Weierstraß können wir x_{n_k} nehmen, so dass $x_{n_k} \longrightarrow x_M \in [a,b]$.

Dann

$$\sup_{[a,b]} f = \lim_{n_k \to +\infty} f(x_{n_k}) \overset{f \in C^0}{=} f(x_M). \quad \square$$

<u>Bemerkungen</u> Die Voraussetzungen

1) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
2) $f \in C^0([a,b))$
3) $f \in C^0([a,+\infty))$

genügen nicht, um eine Maximumstelle zu haben.

Satz (Zwischenwertsatz)

Seien $f \in C^0([a,b])$ und $y \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$.

Dann $\exists \bar{x} \in [a,b]$ mit $f(\bar{x}) = y$.

(In Wörten: 'f nimmt alle Werte zwischen min und max')

Beweis Falls $y = \min_{[a,b]} f$ oder $y = \max_{[a,b]} f$

kommt die Behauptung vom Maximumstellesatz.

Falls $\min_{[a,b]} f = f(x_m) < y < f(x_M) = \max_{[a,b]} f$

definiert man die Funktion $g : x \in [a,b] \mapsto f(x) - y$.

Da g stetig ist und $g(x_m) = \min_{[a,b]} f - y < 0$,

$g(x_M) = \max_{[a,b]} f - y > 0$, durch den Nullstellensatz

findet man $\bar{x} \in [a,b]$, sodass

$$0 = g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - y. \qquad \square$$