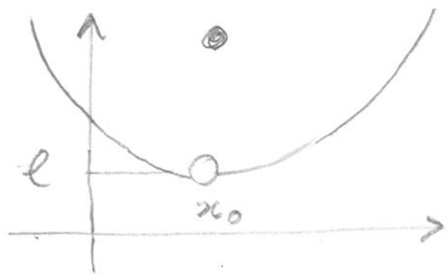
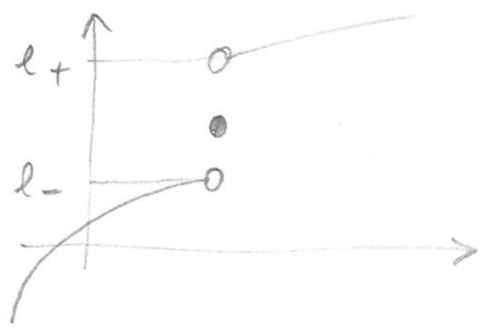
# Limes von Funktionen

Einleitung: drei Beispiele von Funktionen, die nicht stetig in $x_0$ sind



$x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$

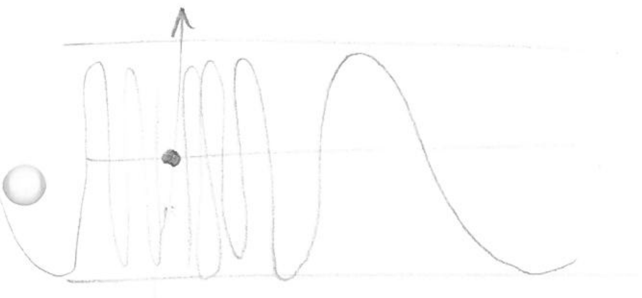
eine stetige Funktion $g$, so dass $f = g$ für $x \neq x_0$, existiert. ("hebbar")



$x_0 > x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l_-$

$x_0 < x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l_+$

(„Sprung")



$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(„zweiter Typ")

<u>Definition</u> Sei $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Falls $\forall (x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l \in \mathbb{K}$ sagen wir, dass <u>$f$ gegen $l$ konvergiert</u> für $x \to x_0$ und schreiben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ oder $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$.

„Ähnlich für $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, fall $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ ist.

<u>Beispiel</u> $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Wir haben, dass $|f(x_n)| = \left|x_n \sin \frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n|$.

Falls $x_n \to 0$, haben wir $|f(x_n)| \to 0$.

Deshalb $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Wir sagen, dass $f$ eine Nullfunktion für $x \to 0$ ist.

<u>Achtung</u> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist vom Wert $f(x_0)$ unabhängig. $x_0$ kann sogar nicht im Definitionsbereich von $f$ sein.
Viele Bücher haben eine andere Definition, die nicht äquivalent ist.

<u>Bemerkung</u> (Stetige Fortsetzung)

$f$ kann fortgesetzt werden: sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so definiert $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Dann ist $g$ stetig.

<u>Satz</u> ($\varepsilon\delta$-Definition) Sei $f: D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{K} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D\setminus\{x_0\}: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

<u>Bemerkung</u> Seien $f: D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann

$$f \text{ stetig in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \left( = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)\right)$$

<u>Bemerkung</u> Limes von Funktionen sind Limes von Folgen! Alles, was wir über die Folgengrenzwerte kennen, gilt noch für Funktionen. Zum Beispiel

- Eindeutigkeit
- Signumsatz: $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} F$, $f > 0 \Rightarrow F \geq 0$
- Rechnenregeln

$f(x) \to F$, $g(x) \to G$ für $x \to x_0$. Dann

$$\lim_{x \to x_0} \big( f(x) + g(x) \big) = F + G$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = FG$$

$$G \neq 0 \quad \lim_{x \to x_0} f(x) / g(x) = F/G$$

(inklusiv $\pm \infty$)

<u>Beispiel</u> $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Man berechnet $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ (man sagt, dass $f$ eine vertikale Asymptote in $x_0 = 0$ hat).

<u>Achtung</u> $f$ hat keine stetige Fortsetzung.

<u>Definition</u> (Limes für $x \to \pm\infty$)

Sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D$ nicht nach oben (unten) beschränkt. Falls $\forall (x_n) \subset D$

$x_n \to +\infty \atop (-\infty)$ $\Rightarrow f(x_n) \to l \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

sagen wir, dass <u>$f$ gegen $l$ konvergiert</u> (<u>uneigentlich konvergent</u> falls $l = \pm\infty$) als $x \to +\infty$ $(-\infty)$ und schreiben wir

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} l$$

<u>Beispiele</u> • $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$

Dann $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 3$

(<u>horizontale Asymptote</u>)

• $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^3 - x$, Dann

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

• $f, g$ Polynome $(g \neq 0)$. Dann $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert immer (entweder endlich oder unendlich)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - x}{2x^3 + x^2} = \frac{3}{2}.$$

**Definition** (Rechtsseitiger Limes)

Seien $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ und $x_0$ eine Häufungspunkt von $D \cap (x_0, +\infty)$.

Falls $\forall (x_n) \in D \cap (x_0, +\infty)$ $x_n \to x_0$ : $f(x_n) \to l$, schreiben wir „$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$" oder „$f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+} l$".

Ähnliche Definition für $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $l = \pm\infty$. und linksseitige Limes

**Beispiel** $\lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

**Beispiel** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so definiert

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$$

Dann $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ und $f$ hat eine vertikale Asymptote.

Andererseits $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

## Schiefe Asymptote

Wir sagen, dass $g$ affine ist, falls
$g(x) = mx + q$ für gewisse $m, q \in \mathbb{K}$
und, dass $f$ lineare ist, falls $f$
affine mit $q = 0$ ist.

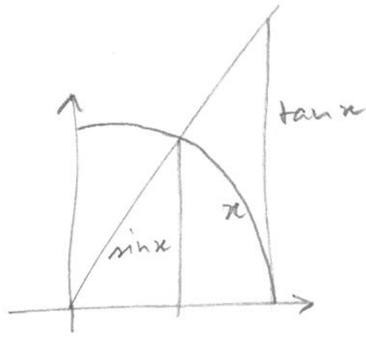
$f$ hat eine schiefe Asymptote für $x \to +\infty$
falls $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: m \in \mathbb{K}$ und
$\lim_{x \to +\infty} \left( f(x) - mx \right) =: q \in \mathbb{K}$.

Beispiele

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 + x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ \\ f(x) = \ln x \end{array}\right\} \text{Keine schiefe Asymptote}$$

## Zwei wichtige Limes




1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Sei $0 < x < \pi/2$

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dann $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \to 0} 1$

Sei $-\pi/2 < x < 0$ Dann

$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)}$, wobei $0 < -x < \pi/2$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{x = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\overset{e^x = 1 + \frac{1}{t}}{=}} \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\ln\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)} = \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)}$$

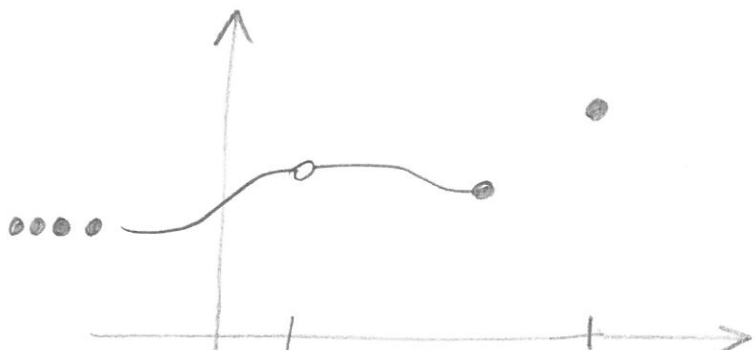
$$= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>Bemerkung</u> (Stetigkeit vs. Limes)

Seien $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$ ist Häufungspunkt von $D$. Dann

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Achtung</u>



Kein Stetig. aber Häuf.

Kein Häuf. aber Stetigkeitpunkt

<u>Satz</u> $f, g : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. $x_0$ Häufungspunkt von $D$. Sei $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$ (Nullfunktion in $x_0$) und $g$ beschränkt. Dann $f(x) g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$.

<u>Beweis</u> Durch den Sandwichsatz:

$$0 \leq |f(x) g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq$$
$$\leq |f(x)| \sup |g| \xrightarrow{x \to x_0} 0. \qquad \square$$

Diese Seite haben wir nicht gemacht



## Zwei Sätze über Limes von monotonen Funktionen

<u>Satz</u> (Existenz) Seien $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und $x_0 \in (a,b)$. Dann $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existieren in $\mathbb{R}$ und

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

<u>Beweis</u>. Seien $x_n \nearrow x_0$ und $y_n \searrow x_0$ Dann

$$f(a) \leq f(x_n) \leq f(y_n) \leq f(b)$$

und $f(x_n) \nearrow$, $f(y_n) \searrow$. Dann der Satz folgt von Monotonsatz. $\square$

<u>Satz</u> (Sprünge) $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton hat maximal eine abzählbar Zahl von Unstetigkeitspunkte, die alle Sprünge sind.

<u>Beweis</u> $f$ hat maximal endliche viele Punkte, wo der Sprung größer als $1$ ist, und endliche viele Punkte, wo der Sprung zwischen $1/2$ und $1$ ist, .... $\square$

## Beispiele

1) $$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$$

3) $$\lim_{x \to 1} \frac{\tan(\pi x/4)}{e^{(x-1)}} = 1$$

4) $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \begin{cases} a_n \cdot +\infty & n \text{ gerade} \\ a_n \cdot \pm\infty & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left( -5x^3 + 3x - 2 \right) = +\infty$$

5) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left( b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} \cdot (+\infty) & n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 5}{1 + 4x^2 - 2x^4} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{3 + 4x - x^3} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2x^5}{4x^2} = -\infty$$

6) $$\lim_{x \to 0} p(x) = a_0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x}{b_m x^m + \dots + b_1 x} = \frac{a_1}{b_1}$$

7) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_\alpha x)^\beta}{x^\gamma} = 0 \qquad \alpha > 1, \ \beta, \gamma > 0$$

8) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\alpha^x)^\beta}{x^\gamma} = +\infty \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

9) $$\lim_{x \to 0^+} x^\gamma |\log_\alpha x|^\beta = 0 \qquad \alpha > 1, \ \beta, \gamma > 0$$

10) $$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x x^\gamma = 0 \qquad \alpha; \gamma > 0$$

11) $$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$$

**Definition** (Landausymbole)

Seien $f, g : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ und $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$.

- Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ sagen wir, dass „$f$ klein-o von $g$ ist, als $x \to x_0$" und schreiben „$f = o(g)$, $x \to x_0$"

- Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ sagen wir, dass „$f$ und $g$ äquivalent sind, als $x \to x_0$" und schreiben „$f \sim g$, $x \to x_0$"

Ähnliche Definitionen für $x \to \pm\infty$.

**Beispiele**

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$
- $\sin x \sim x$, $x \to 0$
- $\sin^2 x = o(x)$, $x \to 0$

**Bemerkungen**

1) $f \sim g$, $x \to x_0 \implies f = g + o(g)$, $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 1 - 1 = 0$$

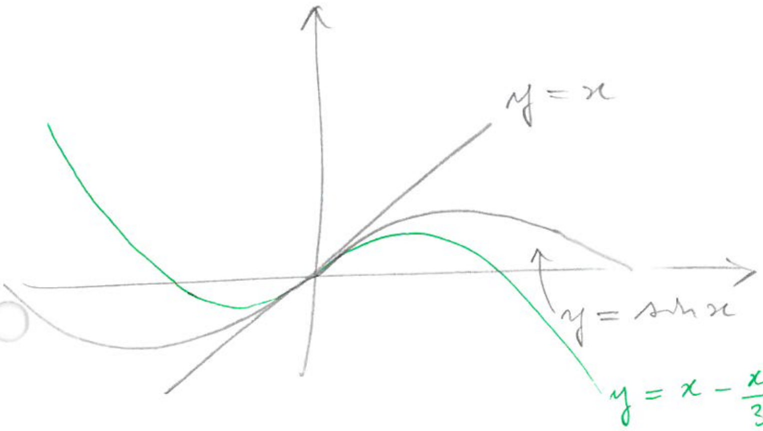
2) $f \sim h$, $x \to x_0 \implies$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \quad \text{(falls sie existieren)}$$

Anwendung $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

# McLaurin Polynome

Näherung einer Funktion in der Nähe von $x_0 = 0$:




**Erster Grad**: Welcher ist der Polynom, der näher zu sein ist, als $x \to 0$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x, \quad x \to 0$$

Dann: $\boxed{\sin x = x + o(x), \quad x \to 0}$

Genauer gesagt $\sin x = x + o(x^2), \quad x \to 0$

**Zweiter Grad**: derselbe Polynom.

**Dritter Grad**: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad x \to 0$

**Fünfter Grad**: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad x \to 0$

**Anwendung** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^3} =$

$$= -\frac{1}{6} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$