Andere Polynome

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \to 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad x \to 0$$

Wir werden diese Polynome berechnen.
Jetzt verwenden wir sie.

Beispiele

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x^2}{x^2} = 3$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{3x} = -\dfrac{2}{3}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x^3)}{x^6} = \frac{9}{2}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2x^2)}{x^2} = -2$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 + \cdots - 1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots - 1} = -2$

9) $\lim_{x \to 0+} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2/2}{(\arctan\sqrt{x})^{2}} =$

$= \lim_{x \to 0+} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cdots - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cdots - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - \cancel{\frac{x^2}{2}}}{\left(\sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3} + \cdots\right)^{2}} = \frac{1}{2}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x^3)}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \cdots\right)^2}{x^6} = 1$

<u>Achtung</u> für $x \to x_0 \neq 0$ kann man die McLaurin Polynome <u>nicht</u> verwenden

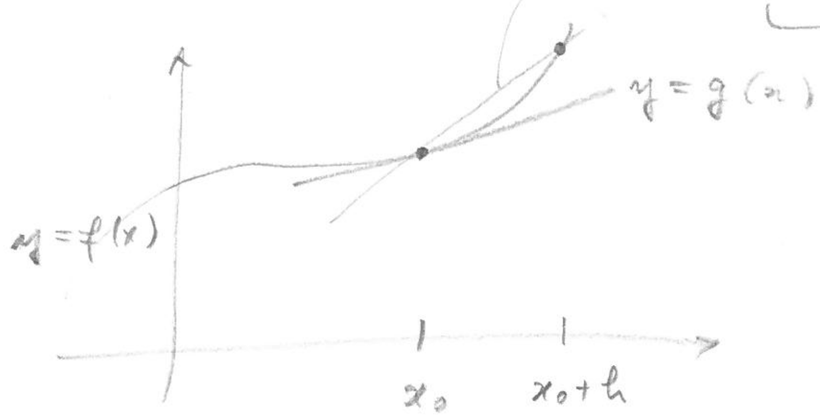
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin(1)$$

<u>Frage</u>: Wie kann man diese hilfreiche Polynome berechnen?

Differentialrechnung

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ gegeben und $x_0 \in (a,b)$. Wir suchen die affine Funktion $g : x \mapsto mx + q$ die „am bestens" f in der Nähe von x_0 „approximiert".

$$g_h(x) = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{die Steigung}}(x-x_0) + f(x_0)$$



__Definition__ Seien $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0 \in (a,b)$ gegeben. Wir sagen, dass „f an der Stelle x_0 differenzierbar ist", falls der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

existiert (und ist __endlich__). In diesem Fall sagen wir, dass „die Ableitung von f an der Stelle x_0 l ist" und schreiben wir „$f'(x_0) = l$" oder „$\frac{df}{dx}(x_0) = l$". Ferner heißt f „differenzierbar", falls sie an jeder Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.

<u>Satz</u> (Bedeutung von „beste Näherung")

Seien $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0 \in (a,b)$.

Dann:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ differenzierbar} \\ \text{an der Stelle } x_0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \exists\, L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ linear}: \\ f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o(h), \\ \qquad h \longrightarrow 0 \end{array}\right.$$

<u>Beweis</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ Nehmen wir $L(h) := f'(x_0)\,h$.

Dann $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0.$

$\boxed{\Longleftarrow}$ L hat die Form $L(h) = mh$ für $m \in \mathbb{K}$.

Dann $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{h}$

$+ m = m.$ $\square$

<u>Bemerkung</u> (Tangente) Die Tangente zum Graph von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist

$y = g(x)$, wobei $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

<u>Bemerkung</u> (die Ableitung als Funktion)

$f': x \longmapsto f'(x)$

$D(f') = \{x \in D(f) : f \text{ differenzierbar an } x \text{ ist}\}$

<u>Bemerkung</u> $D(f') \subset D(f)$

Ableitungen von der Definition

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x_0+h) + q - (mx_0 + q)}{h} = m$$

Bemerkung: f = Konstante $\Longrightarrow f' = 0$

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-i} h^i - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + o(h) - x_0^n}{h} = \binom{n}{1} x_0^{n-1}$$

$$= n x_0^{n-1}$$

Beispiel $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$

3) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $x_0 > 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(\Big(\overbrace{1 + \frac{h}{x_0}}^{=: e^y} \Big)^\alpha - 1 \right)}{\underbrace{h}_{x_0 e^y - x_0}} =$$

$$= x_0^{\alpha-1} \lim_{y \to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \alpha x_0^{\alpha - 1}$$

Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

4) $$\sin'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x_0 \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0} \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= \cos x_0$$

5) $$\cos'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-\sin x_0) \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x_0 \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= -\sin x_0$$

6) $$\exp'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

7) $x \mapsto a^x$, $0<a\neq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{a^h - 1}^{y}}{h} =$$

$$\log_a(1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$$

$$= a^{x_0} \ln a \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln a \; a^{x_0}$$

8) $x \mapsto \ln x, \quad x_0 > 0$

$$(\ln)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

9) $x \mapsto \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, \quad x_0 > 0$

$$(\log_a)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x_0}$$

10) $x \mapsto |x|$

$$x_0 \neq 0 \implies \lim_{h \to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ -1 & x_0 < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \implies |\cdot|$ ist nicht differenzierbar.

Dann $D(|\cdot|') = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} = D(|\cdot|)$

<u>Satz</u> f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0

<u>Beweis</u> x_0 ist ein Häufungspunkt von $D(f)$ und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)\big) = \lim_{h \to 0}\big(L(h) + f(x_0)\big) = f(x_0)$$

Bemerkung f stetig in $x_0 \not\Rightarrow f$ differenzierbar in x_0

<u>Satz</u> (Rechenregeln) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{K}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a,b)$. Dann

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

3) Falls $g(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

<u>Bemerkung</u> die Ableitung ist eine lineare Verknüpftung:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(Kf)' = \underset{\overset{\|}{0}}{K'}f + Kf' = Kf'$$

<u>Beweis</u> $\boxed{\text{Ad } 1)}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \pm g(x_0+h) - f(x_0) \pm g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \pm \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

$\boxed{\text{Ad } 2)}$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)g(x_0+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)f(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Ad 3) $1 = g\,\frac{1}{g}$ in der Nähe von x_0.

$$(1)' = 0 = \left(g\,\frac{1}{g}\right)' = g'\,\frac{1}{g} + g\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Dann ist $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$= \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Man braucht trotzdem, dass $\frac{1}{g}$ differenzierbar ist...

Übungen

1) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$. Dann
$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

2) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dann
$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

3) $f: \{x \neq -1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$. Dann

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - 1 \cdot x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}.$$

4) $f = \tan$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ad 3) $$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$ D 9

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{(g(x_0+h)g(x_0))h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0+h)g(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$ $\square$

Bemerkung

$$f \text{ differenzierbar an der Stelle } x_0 \iff \begin{cases} \exists\, \phi \text{ stetig an der Stelle } x_0: \\ f(x) - f(x_0) = \phi(x)\,(x - x_0) \end{cases}$$

In diesem Fall ist $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis $\boxed{\text{Ad} \Rightarrow}$ Nehmen wir

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Ad} \Leftarrow}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \phi(x) = \phi(x_0). \quad \square$$

<u>Satz</u> (Kettenregel) Seien $f:(c,d)\to\mathbb{K}$ und $g:(a,b)\to(c,d)$, g differenzierbar an der Stelle $x_0\in(a,b)$, f diff. an der Stelle $y_0=g(x_0)$. Dann ist $f\circ g$ diff. an der Stelle x_0 und

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$

<u>Beweis</u> Wir haben, dass

$$f(y)-f(y_0)=\phi_f(y)(y-y_0)$$
$$g(x)-g(x_0)=\phi_g(x)(x-x_0),$$

wobei ϕ_f stetig in y_0 und ϕ_g stetig in x_0 sind und $\phi_f(y_0)=f'(y_0)$, $\phi_g(x_0)=g'(x_0)$. Dann

$$f(g(x))-f(g(x_0))=\phi_f(g(x))\big(g(x)-g(x_0)\big)=$$
$$=\phi_f(g(x))\,\phi_g(x)(x-x_0)$$

und $x\mapsto\phi_f(g(x))\phi_g(x)$ ist stetig in x_0. Dann ist $f\circ g$ diff an der Stelle x_0 und
$(f\circ g)'(x_0)=\phi_f(g(x_0))\,\phi_g(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$. □

<u>Beispiele</u> 1) $f:x\in\mathbb{R}\mapsto\sin(x^2)$
$f'(x)=\cos x^2\cdot 2x$,

2) $f:x\in\mathbb{R}\mapsto e^{x^3}$, $f'(x)=e^{x^3}(3x^2)$,

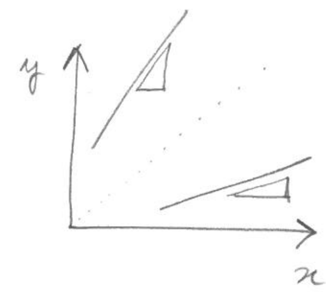
3) $f:x\in\mathbb{R}_+\to x^x$, $f'(x)=x^x(1+\ln x)$.

Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei g die Umkehrfunktion von f, wobei f differenzierbar und streng monoton ist.

Falls $f'(x_0) \neq 0$, ist g differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Beweis g ist stetig und wir haben

$$f(x) - f(x_0) = \phi_f(x)(x - x_0)$$
$$y - y_0 = \phi_f(g(y))(g(y) - g(y_0)),$$

wobei $\phi_f \circ g$ stetig ist und $\phi_f(g(y_0)) = f'(g(y_0)) \neq 0$.
Dann $g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\phi_f(g(y))}(y - y_0)$. Deshalb ist g diff. an der Stelle y_0 und $g'(y_0) = \frac{1}{\phi_f(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Bemerkung Nehmen wir an, dass g differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ ist. Dann

$$1 = (id)' = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Beispiele

1) $f = \tan$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $g = \arctan$

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

$y = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, $1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

2) $f = \sin$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $g = \arcsin$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \sin x$, $y^2 = \sin^2 x$, $1-y^2 = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

$\sqrt{1-y^2} = \cos x$

3) $f = \cos$, $x \in (0, \pi)$, $g = \arccos$

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \cos x$, $y^2 = \cos^2 x$, $1-y^2 = \sin^2 x$,

$\sqrt{1-y^2} = \sin x$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ und sei g die Umkehrfunktion von f. Finden Sie $g'(3)$.

$$\uparrow$$

$$y_0 = f(x_0) = x_0^3 + x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = 1$$

$f'(x) = 3x^2 + 1$. Dann

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

<u>Satz</u> (Fermat) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ eine Maximumstelle (oder Minimumstelle) und f differenz. in x_0. Dann $f'(x_0) = 0$, was einen <u>Kritischen Punkt</u> definiert.

<u>Beweis</u> Sei $x_0 \in (a,b)$ eine Maximumstelle (der Beweis für Minimumstellen ist ähnlich). Dann

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0. \quad \text{Deshalb } f'(x_0) = 0. \ \square$$

<u>Bemerkung</u> der Umkehrschluss ist falsch:

f differenzierbar, $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ Min oder Max

<u>Gegenbeispiel</u> $f(x) = x^3$

<u>Bemerkung</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat sie eine Maximumstelle x_M. Sie kann

1) ein Kritischer Punkt in (a,b) sein $(f'(x) = 0)$
2) eine Stelle in (a,b) an der f nicht differenzierbar ist.
3) ein Extremum: a oder b

Beispiel $f: [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

1) $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ ist der einzige kritische Punkt. $f(0) = 0$

2) f ist differenzierbar

3) $f(-1) = 1, \quad f(3) = 9$

Deshalb, $x_M = 3$ ist die absolute Maximumstelle und $x_m = 0$ ist die absolute Minimumstelle. $x = -1$ ist eine lokale Maximumstelle.

Bemerkung Man kann die rechtseitige Ableitung (bzw linkseitige) so definieren

$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{h \to 0\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Falls $f'_+(a) \leq 0$, ist a eine lokale Maximum-stelle.

Beispiel $f: [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$

1) $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$. f hat keine kritische Punkte

2) f ist nicht differenzierbar an der Stelle 0 und $f(0) = 0$

3) $f(-2) = f(2) = 2$.

Satz (Rolle) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b) mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert $x_0 \in (a,b)$, so dass $f'(x_0) = 0$.

Beweis Falls f konstant ist, sind alle Punkte in (a,b) kritisch. Sei f nicht konstant. Dann $\max f > f(a)$ oder $\min f < f(a)$ (oder beide). Nehmen wir an, dass $\max f > f(a)$ ist (der andere Fall ist ähnlich). Vom Maximumsatz existiert $x_0 \in (a,b)$, so dass $f(x_0) = \max f$. Vom Fermatsatz hat man $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bemerkungen

1) f kann mehrere kritische Punkte haben
2) ohne die Voraussetzung "differenzierbar" gilt der Satz nicht.
3) ohne die Voraussetzung "$f(a) = f(b)$" gilt der Satz nicht.

Satz (Mittelwertsatz oder Lagrange)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann $\exists\, x_0 \in (a, b)$, so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis Sei $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ so gegeben

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist g stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und

$$g(a) = f(a) - 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, b - a = f(a).$$

Vom Rollesatz haben wir, dass $x_0 \in (a, b)$ existiert, so dass $g'(x_0) = 0$. Deshalb

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Bemerkungen wie für Rollesatz:
Die „Lagrangepunkte" können mehrere sein und man braucht alle Voraussetzungen.

Anwendungen vom Lagrangesatz:

Satz Sei $f: I := (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar;
Dann $f' = 0 \iff f$ Konstante

Beweis $\boxed{\Leftarrow}$ schon gemacht.

$\boxed{\Rightarrow}$ Durch Widerspruch: sei f nicht Konstante, nähmlich seien $x, y \in I$, so dass $f(x) \neq f(y)$. Dann existiert x_0 zwischen x und y, so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \neq 0.$$

was ein Widerspruch ist. $\square$

Beispiel $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

Satz Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

f monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

Beweis $\boxed{\Rightarrow}$ Sei $x \in I$. Dann

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Durch Widerspruch: nimmt man $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) > f(y)$.
Dann $\exists x_0 \in (x,y)$, so dass

$$0 > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0).$$ Widerspruch $\square$.

<u>Übung</u> Finden wir die Monotonieintervalle von

1) $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2}$

2) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^3}{3} - x$

3) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$

4) $x \in [0,2] \longmapsto x e^{-x^2}$

$\boxed{\text{Ad } 1}$ $f'(x) = (-2x)\, e^{-x^2}$

$f' > 0 \iff x < 0$

$f' < 0 \iff x > 0$

$\boxed{\text{Ad } 2}$ $f'(x) = x^2 - 1$

$f' > 0 \iff |x| > 1$

$f' < 0 \iff |x| < 1$

$\boxed{\text{Ad } 3}$ $f'(x) = \cos x$

$f' > 0 \iff |x + 2k\pi| < \frac{\pi}{2}$

$f' < 0 \iff |x + 2k\pi| > \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Ad } 4}$ $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f' > 0 \iff 1 - 2x^2 > 0 \iff |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f' < 0 \iff |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$