Satz (Kriterium für Extrema)

Nicht gemacht

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I,\ x > x_0$ und
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I,\ x < x_0$
Dann ist x_0 eine Maximumstelle.

Beweis Durch Widerspruch: existiere $x_1 \in I$ mit $f(x_1) > f(x_0)$. Nehmen wir $x_1 > x_0$ an (der andere Fall ist ähnlich). Dann existiert $x_2 \in (x_0, x_1)$, so dass

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$$

was ein Widerspruch ist, weil $x_2 > x_1$. $\square$

Satz (Lipschitzsatz) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann

$$\left.\begin{array}{l} \exists L \geq 0 : |f'(x)| \leq L \\ \forall x \in I \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ ist } L\text{-Lipschitz}, \\ \exists L \geq 0 : \\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \\ \forall x, y \in I \end{array}\right.$$

Beweis $\boxed{\Leftarrow}$ $|f'(x)| = \left|\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| =$

$$= \lim_{y \to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \lim_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq L$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Durch Widerspruch: sei $x \in I : |f'(x)| > L$. Dann $\exists y$ so dass $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > L$ was ein Widerspruch ist. $\square$

Satz (Cauchysatz) Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b). Ferner sei $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Dann existiert $x_0 \in (a,b)$: nicht gemacht

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis Nehmen wir $m(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

Als m stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) ist, existiert $x_0 \in (a,b)$, so dass

$$m'(x_0) = \frac{m(b)-m(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Man hat $m'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0)$

und wir haben die Behauptung. $\square$

<u>Satz</u> (De l'Hôpital) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$. und sei

1) $f(x), g(x) \longrightarrow 0$ als $x \to x_0 + \in I$ oder
2) $f(x), g(x) \longrightarrow \pm\infty$ als $x \to x_0 +$.

Falls $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, (endlich oder nicht) existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(und ähnlich für $x \to x_0 -$ und $x \to \pm\infty$.).

<u>Anwendungen</u>

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} \underbrace{= \cdots =}_{n-1 \text{ Mal}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

$\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} \underbrace{\overset{H}{=} \cdots \overset{H}{=}}_{\lfloor \alpha \rfloor + 1 \text{ Mal}} \beta^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{\alpha(\alpha - 1) \cdots \lfloor \alpha \rfloor x^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor - 1}} = +\infty$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x^2)(2x)}{1} = 0$$

D23

5) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$ existiert nicht.

$\left[\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \right]$

Beweis Betrachten wir den Fall $f(x), g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$

Sei $x_n \to x_0+$. Dann $\exists\, \xi_n \in (x_0, x_n)$, so dass

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Als $\xi_n \to x_0+$

haben wir, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

nicht gemacht

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

$= 1$

der existiert nicht.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} \overset{H}{=}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Definition (Ableitung höherer Ordnung)

Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei $f': D(f') \subset I \to \mathbb{R}$ ihre Ableitung. Falls f' an der Stelle x_0 differenzierbar ist, sagen wir, dass f zweimal differenzierbar ist und benutzen das Symbol „$f''(x_0)$" oder „$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$" für den Wert $(f')'(x_0)$.

Wir definieren durch Rekursion die n-Ableitung $f^{(n)}: D(f^{(n)}) \longrightarrow \mathbb{R}$ so

$$D(f^{(n)}) = \{ x \in D(f^{(n-1)}) : f^{(n-1)} \text{ diff. in } x \}$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \quad \forall x \in D(f^{(n)})$$

Beispiele

1) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto 3x^2 + 2x + 1$

$f': x \in \mathbb{R} \longmapsto 6x + 2$

$f'': x \in \mathbb{R} \longmapsto 6$

$f''': x \in \mathbb{R} \longmapsto 0$

$f^{(n)}: x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \qquad \forall n \geq 4$

2) $(\sin)' = \cos$, $(\sin)'' = \cos' = -\sin$

$(\sin)''' = (-\sin)' = -\sin' = -\cos$

$(\sin)^{(4)} = (-\cos)' = \sin$

$$(\sin)^{(n)} = \begin{cases} \sin & n = 4k \\ \cos & n = 4k+1 \\ -\sin & n = 4k+2 \\ -\cos & n = 4k+3 \end{cases}$$

3) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}(x^+)^2$

$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^+$

$f'' : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \longmapsto \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

$f^{(n)} : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \longmapsto 0 \qquad \forall n \geq 3$

4) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x-1)^+ + \frac{((x-2)^+)^2}{2} + \frac{((x-3)^+)^3}{3!}$

$f' : x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \longmapsto (x-2)^+ + \frac{((x-3)^+)^2}{2} + \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

$f'' : x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\} \mapsto (x-3)^+ + \begin{cases} 0 & x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$

$f''' : x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\} \mapsto \begin{cases} 0 & x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

$f^{(4)} : x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\} \mapsto 0$

Bemerkung Sei p ein Polynom mit Grad n. Dann $p^{(m)} = 0 \quad \forall m \geq n+1$. Seien p und q Polynome mit Grad n und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann

$$p = q \iff p^{(k)}(x_0) = q^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

5) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \Rightarrow f^{(n)} = f$

6) $(Sh)' = Ch$, $(Ch)' = Sh$

$(Sh)^{(n)} = \begin{cases} Ch & n \text{ ungerade} \\ Sh & n \text{ gerade} \end{cases}$

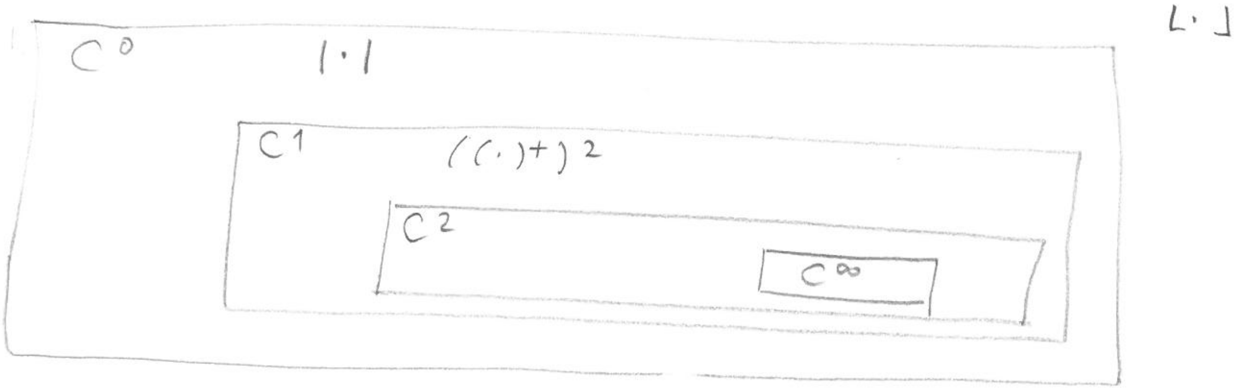
<u>Definition</u> Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

$$C^1(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar} : f' \text{ stetig} \}$$

$$C^2(I) = \{ f \in C^1(I) : f' \text{ differenzierbar}, f'' \text{ stetig} \}.$$

$$\vdots$$

$$C^\infty(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ die Ableitungen aller Ordnungen haben} \}$$



<u>Bemerkung</u> $f = ((\cdot)^+)^{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann

$$f \in C^n(\mathbb{R}) \text{ und } f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$$

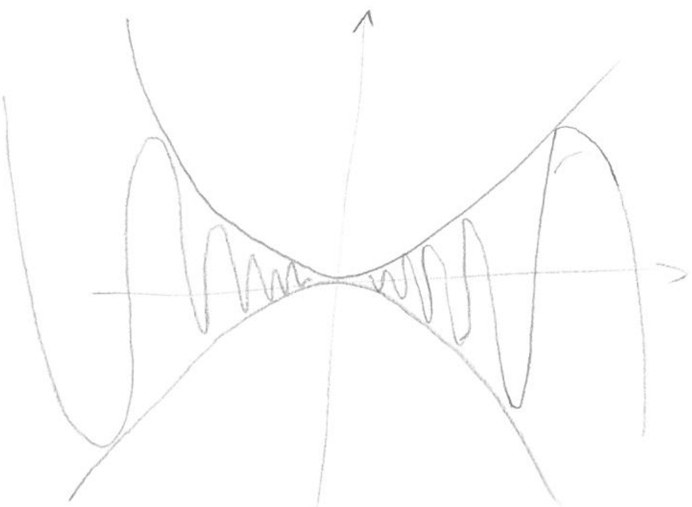
<u>Beispiele</u> sin, cos, exp, ln, Sh, $x \mapsto x^n \in C^\infty$

$|\cdot|$ ist nicht differenzierbar

$|\cdot| = id$ in $(0, +\infty)$. Deshalb

$|\cdot| \in C^\infty(0, +\infty)$.

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ D27



a) $\boxed{f \text{ stetig in } 0}$

$|f(x)| \leq x^2$

$\Downarrow$

$f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

so ist $f\in C^0(\mathbb{R})$

b) $\boxed{f'(0)=0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=0$$

Wir können die Ableitung berechnen

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

<u>Achtung</u> f' ist im ganzen $\mathbb{R}$ definiert trotzdem ist sie nicht stetig.

Deshalb f ist differenzierbar aber $f\notin C^1(\mathbb{R})$

<u>Bemerkung</u> $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

Dann $g\in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $g^{(n-1)}$ ist differenzierbar aber $g^{(n)}$ ist nicht stetig. Deshalb $g\notin C^n(\mathbb{R})$.

nicht gemacht

Satz Sei $f \in C^0(I)$, $x_0 \in I$, differenzierbar in $I \setminus \{x_0\}$ und $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Dann ist f diff. an der Stelle x_0 und $f'(x_0) = \ell$.

Beweis Wir möchten zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$$

Sei $h_n \to 0+$ und $x_n \in (x_0, x_0+h_n)$, so dass

$$\frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_n).$$ Dann $x_n \to x_0+$

und $$\frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_n) \to \ell. \quad \square$$

Bemerkung Die Voraussetzung $f \in C^0(I)$ ist nötig: Gegenbeispiel $f = \operatorname{sgn} : x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$