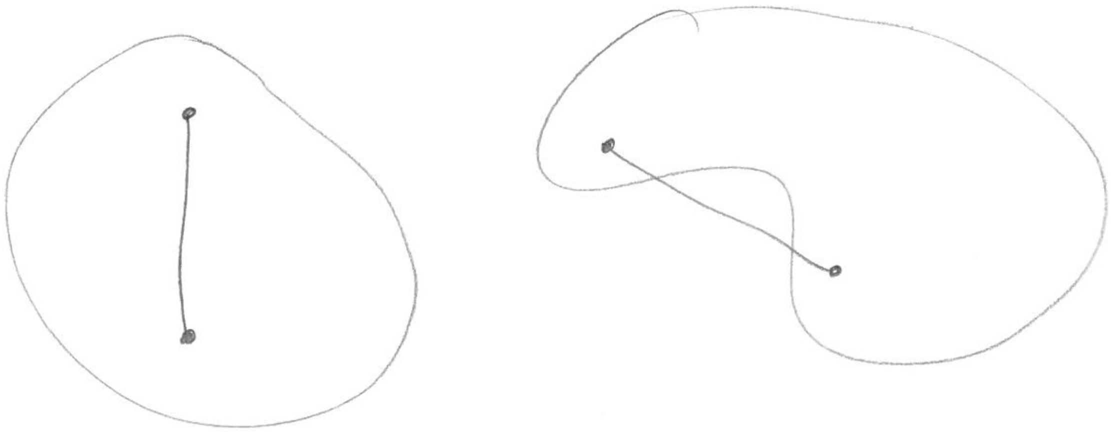
Konvexität

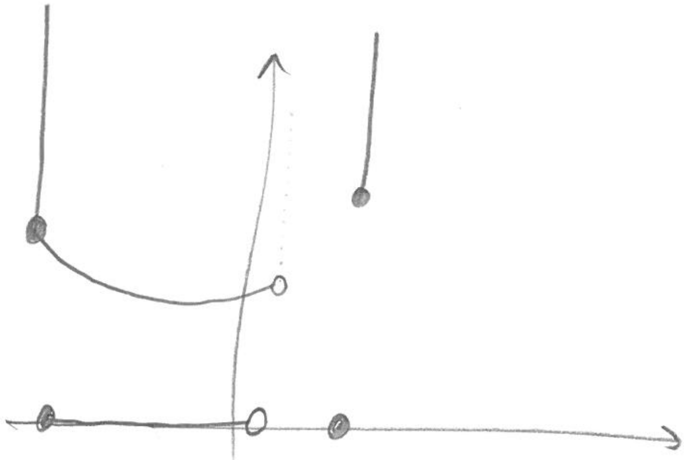
Definition $A \subset \mathbb{R}^2$ ist konvex, falls für jede zwei Punkte $x, y \in A$ gilt es, dass

$$tx + (1-t)y \in A \quad \forall t \in [0,1]$$



Definition Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Der Epigraf von f ist die Menge

$$\mathrm{Epi}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D,\ y \geq f(x) \}$$



Definition $f: D(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist „konvex“ falls ihr Epi(f) konvex ist.

Bemerkung

f konvex $\Longrightarrow$ $D(f)$ konvex

f konvex $\not\Longleftarrow$ $D(f)$ konvex

Satz Sei $f: D(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben

$$\left.\begin{array}{l} D(f) \text{ konvex} \\ f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \\ \quad \forall x, y \in D(f) \ \forall t \in [0,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ konvex}$$

Beispiele $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $f(x) = x^2$ konvex

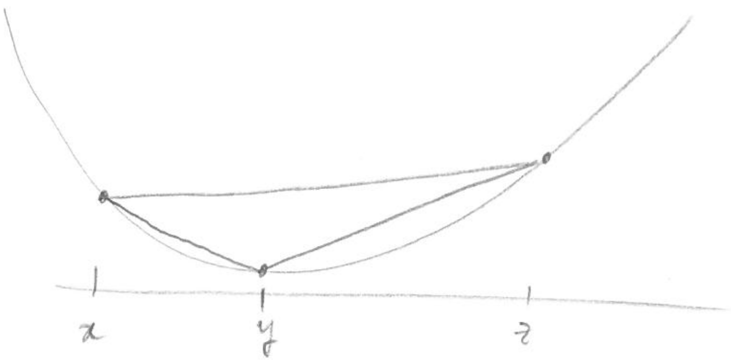
2) $f(x) = x^3$ nicht konvex

3) $f(x) = |x|$ konvex

Achtung
Konvexität hat nichts mit Differ. zu tun

<u>Satz</u> Sei $f: I \to \mathbb{R}$ konvex $\iff \forall x, y, z \in I$.

$$x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \overset{1}{\leq} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$



<u>Beweis.</u>

$\boxed{\text{Ad} \implies}$ Wir haben dass $y = tx + (1-t)z$, wobei

$$t = \frac{z-y}{z-x} \in (0,1). \text{ Dann } \quad 1-t = \frac{z-x-z+y}{z-x} = \frac{y-x}{z-x}$$

$$f(y) \leq t f(x) + (1-t) f(z)$$

So $$f(y) - f(x) = (1-t)\big(f(z)-f(x)\big) = \frac{y-x}{z-x} f(z) - f(y)$$

und $$f(z) - f(y) \geq t\big(f(z)-f(x)\big) = \frac{z-y}{z-x}\big(f(z)-f(x)\big).$$

$\boxed{\text{Ad} \Leftarrow}$ Von 1 haben wir, dass

$$f(y) \leq \frac{y-x}{z-x} f(z) - \frac{y-x}{z-x} f(x) + f(x)$$

$$= \frac{y-x}{z-x} f(z) + \frac{z-y}{z-x} f(x) = (1-t) f(z) + t f(x). \quad \square$$

Bemerkung $f: I \to \mathbb{R}$ konvex $\iff$ KL

$\forall x_0 \in I \quad \varphi: h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad h \neq 0, \; x_0+h$

monoton wachsend.

Diese ist nur eine andere Formulierung

des letzten Satzes.

Bemerkung Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex.

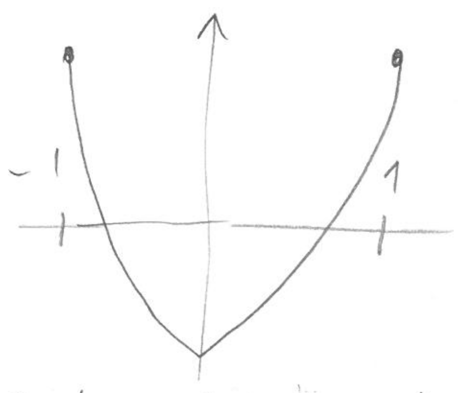
Dann $\forall x_0 \in (a,b)$ $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$ existieren

endlich und $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$.

$f'_+(a)$ existiert auch, entweder endlich oder $-\infty$

$f'_-(b)$ " " , " " oder $+\infty$

Beispiel $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\sqrt{1-x^2} + |x|^2$



Satz f konvex in $[a,b] \implies f$ stetig in (a,b)

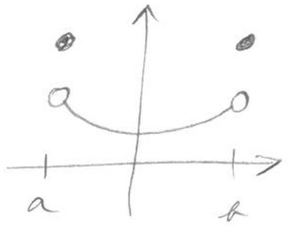
Beweis $\lim\limits_{x \to x_0\pm} f(x) = \lim\limits_{h \to 0\pm} f(x_0+h) =$

$= \lim\limits_{h \to 0\pm} \underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{\to 0} + f(x_0) = f(x_0). \quad \square$

Bemerkung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex $\not\Rightarrow$ f stetig in a oder b

Gegenbeispiel



Satz $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann

f konvex $\iff$ f' monoton wachsend

Beweis $\boxed{\text{Ad} \Rightarrow}$ Sei $x < z$

$$f'(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} =$$

$$= \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \lim_{y \to z-} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(z).$$

$\boxed{\text{Ad} \Leftarrow}$ Seien $x, y, z \in I$ mit $x < y < z$ und

$\xi_1 \in (x, y)$, $\xi_2 \in (y, z)$, so dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Dann $f(y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y)$

für $t = \dfrac{z - y}{z - x}$. Deshalb ist f konvex. $\square$

<u>Satz</u> Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal diff. Dann

f konvex $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$

<u>Beweis</u> f' ist diff. Dann f konvex $\Longleftrightarrow$

f' monoton wachsend $\Longleftrightarrow$ $(f')' \geq 0$. $\square$

<u>Bemerkung</u> Wir sagen, dass f „konkav" ist

falls $-f$ konvex ist.

Es gibt Funktionen, die nicht konvex und

nicht konkav sind.

Die Funktione die gleichzeitig konvex

und konkav sind, sind die affine Funktionen.

<u>Beweis</u> $\boxed{\Rightarrow}$ $f(x) = f(tx_0 + (1-t)x_1)$ $\quad t = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$

$$(\geq, \leq) = t f(x_0) + (1-t) f(x_1)$$

$$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \left(1 - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei f affine. Dann $f'' = 0$. $\square$

Definition $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist „streng konvex" falls $D(f)$ konvex ist und $\forall x, y \in I$, $x \neq y$ $\forall t \in [0,1]$: $f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$.

Bemerkung

f diff.: f streng konvex $\iff$ f' streng mon. wach.

f zweimal diff: f streng konvex $\iff$ $f'' > 0$

Beispiele

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ ist streng konvex

$g : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ ist konvex aber nicht streng konvex

Satz (Kriterium für Minimumstellen)

Sei $f \in C^2(I)$, $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$.

Dann ist x_0 eine Minimumstelle.

Beweis $f'' > 0$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$, weil $f'' \in C^0(I)$. Durch Widerspruch sei $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$, so dass $f(x_1) < f(x_0)$. Nehmen wir an, dass $x_1 < x_0$. Dann ist

$$0 < \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq f'(x_0) = 0$$

was ein Widerspruch ist.

Anwendung

1) $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(0) = 2 \implies x$ ist eine Minimumstelle

2) $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(0) = 12x \big|_{x=0} = 0$ ....

Die Zeichnung des Grafs einer Funktion

1) Zeichnen wir den Definitionsbereich (oder sogar finden wir den maximalen Definitionsbereich, der zu einem gewissen algebraischen Ausdruck passt).

2) Untersuchen wir manche Eigenschaften der Funktion (z.B. Periodizität, gerade-ungerade $f=0$, $f(0)$, ...)

3) Berechnen wir Limes der Funktion an eigenen gewissen Häufungspunkte des Definitionsbereichs (z.B. die Extreme) Suchen wir Asymptote.

4) Untersuchen wir den Signum der Funktion (d.h. lösen wir $f \geq 0$)

5) Untersuchen wir die Monotonie der Funktion (d.h. lösen wir $f' \geq 0$)

6) Untersuchen wir die Konvexität der Funktion (d.h. lösen wir $f'' \geq 0$)

Beispiele

1) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 e^{-|x|}$

2) $f : x \in D \longmapsto x \ln(1-x)$

3) $f : x \in D \longmapsto x\, e^{\frac{x+2}{x-1}}$