Einführung in die Analysis — Prüfung 29.01.2015 - **Teil 1**

Name, Vorname [   ] Matrikel [   ]

Unterschrift [   ]

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $0 \leq a_n \leq 1/n$. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ ist absolut konvergent. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ist absolut konvergent. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n/n$ ist absolut konvergent. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/(a_n+n)$ ist absolut konvergent.
2. Sei $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$, für $x > 0$ und sei g die Umkehrungfunktion von f. Wie viel gilt $1/(g'(16))$? **a** 17. **b** 19. **c** 18. **d** 1/18.
3. Seien $A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 1 = 0\}$ und $\alpha = 2\sup\{\mathrm{Re}(i\overline{a}), a \in A\}$. Wie viel gilt α? **a** $2/\sqrt{2}$. **b** $2/(2/\sqrt{2})$. **c** 2. **d** 2/4.
4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(2x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $\exists\,(x_n):\ x_n \to 0$ und $(f(x_n))$ ist konstant. **b** $\exists\,(x_n):\ x_n \to 0$ und $f(x_n) \to 0$. **c** $\lim_{x\to 0} f(x) = f(2)$. **d** f ist konstant.
5. Sei p ein Polynom mit Grad n. Dann: **a** p beschränkt $\Rightarrow n$ ungerade. **b** p beschränkt $\Rightarrow p$ konstant. **c** n ungerade $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. **d** n gerade $\Rightarrow p$ periodisch.
6. Sei $f(x) = \sin(x^+) + 2\alpha\arctan(x^-)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $x^+ = \max\{0, x\}$ und $x^- = \max\{0, -x\}$. Dann ist f differenzierbar in 0 für: **a** $\alpha = 0$. **b** $\alpha = 1/2$. **c** $\alpha = -1/2$. **d** Kein $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. Sei $a_n > 0$, so dass (a_n) und $(1/a_n)$ konvergent sind. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty}(1/a_n) \in \mathbb{R}$. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - 1/a_n) \in \mathbb{R}$. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.
8. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann: **a** $\exists\, x \in [0,1] : f(x) > f(0)$. **b** $\exists\, x \in (0,1) : f(x) > x$. **c** $\exists\, x \in (0,1) : f(x) = 0$. **d** $\exists\, x \in [0,1] : f(f(x)) = f(x)$.
9. Sei $a_n \to 0$. Dann: **a** $\exists(n_k) : \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_{n_k}$ konvergiert. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ konvergiert absolut. **c** $e^{a_n} \to 0$. **d** $a_n \leq 1/n$ fast immer.
10. Sei $a_n > 0$ und $a_{2n} \to 0$. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$. **b** $\limsup_{n\to+\infty} a_{4n} = 0$. **c** $\limsup_{n\to+\infty} a_n > 0$. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} < +\infty$.

Bitte nicht schreiben unter der Linie

Name, Vorname | | Matrikel |

Unterschrift |

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Sei $f(x) = -(x-1)^2 + 2^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und man definiert die Menge

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; \text{die Reihe } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n) + 2^2}{n^{f(x)}} \text{ ist absolut konvergent} \right\}.$$

Wie viel gilt $\sup A + 2 \inf A$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha(x) = 8(\alpha-1)\sin x$ für $x \geq 0$ und $f_\alpha(x) = \alpha^2 e^{2x} - 8(\alpha^2 - 2\alpha) - 4$ für $x < 0$. Man definiert die Mengen

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f_\alpha \text{ monoton in } [-1,1]\},\; B = \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f_\alpha \text{ stetig}\},\; C = \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f_\alpha \text{ differenzierbar}\}.$$

Wie viel gilt $-\inf A + 8 \sup C - \sup B$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

-36	-32	-28	-24	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\,(n_k) \,:\, \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k} \text{ konvergiert absolut.}$$

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)