Einführung in die Analysis Prüfung 26.02.2015 - **Teil 1**

Name, Vorname ____________________ Matrikelnummer __________

Unterschrift ____________________

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

---

1. Sei $a_n = n^3 \arctan(2n^{-3})$. Dann $\boxed{\mathbf{a}}$ $a_n \to +\infty$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n \to 0$. ■ $a_n \to 2$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_n \to 1/2$.
2. Sei $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 + 2 = 0\}$ und $\alpha = 2\sqrt{3}\sup\{\operatorname{Im} z \,:\, z \in A\}$. Dann: ■ $\alpha = 3\sqrt[3]{2}$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\alpha = 2/3$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\alpha = 2^3$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\alpha = \sqrt[3]{2}$.
3. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^4 - 2x^3 + 7x$ und $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist konkav in } (-\infty, \alpha)\}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sup A = 1$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\inf A = 1$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\inf A = -1$. ■ $\sup A = -1$.
4. Sei $a_n \to 1$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $a_n \leq 1$ fast immer. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n \geq 1$ fast immer. ■ $a_n \geq 0$ fast immer. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_n \leq 0$ fast immer.
5. Sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(1) = f''(1) = 1/2$ und $g(x) = f(e^{5x})$. Welchen Wert hat $g''(0)$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 5. $\boxed{\mathbf{b}}$ -5. ■ 5^2. $\boxed{\mathbf{d}}$ $1/5$.
6. Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ konvex und $f(0) = f(2) = 0$. Dann ■ $f(1) \leq 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $f(1) > 0$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f(1) < 0$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $f(1) = 0$.
7. Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $a_n \geq 0$ fast immer. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n \to 1$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergiert. ■ $\forall \varepsilon > 0 \,:\, a_n > -\varepsilon$ fast immer.
8. Sei $a_n \to +\infty$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\exists m \,\forall n \geq m \,:\, a_n \geq m$. ■ $\exists n \,\exists m \leq n \,:\, a_n \geq m$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists n \,\forall m \geq n \,:\, a_n \geq m$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\forall m \,\forall n \geq m \,:\, a_n \geq m$.
9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f'(0) = 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ f' ist ungerade. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f' \geq 0$. ■ f' ist gerade.
10. Sei $a_n = \sin(100/n)$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{2n} a_{2n}$ konvergiert. ■ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergiert. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ konvergiert.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Einführung in die Analysis — Prüfung 26.02.2015 - **Teil 2**

Name, Vorname ______________________ Matrikelnummer __________

Unterschrift ______________________

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

---

11. Sei $f(x) = -\ln(3-x)$ für alle $x < 3$ und sei $y = g(x)$ die Gleichung, die die Tangente zum Graph von f an der Stelle $(3-\mathrm{e}^3, -3)$ definiert. Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} 3(g(3))^{-n}$.

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    | 0 | 1 | ■ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes
$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin(1-e^{2x}+2\sin x)}{x^2}+\frac{\ln(1+x^2)}{\cosh x}\right).$$
    (Zur Erinnerung: $\cosh x = (e^x+e^{-x})/2$.)

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    | 0 | 1 | 2 | 3 | ■ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ differenzierbar und } f' \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Einführung in die Analysis — Prüfung 26.02.2015 - **Teil 1**

Name, Vorname ______ Matrikelnummer ______

Unterschrift ______

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$. Dann: **a** $a_n \to 1$. **b** $a_n \geq 0$ fast immer. ■ $\forall \varepsilon > 0 \,:\, a_n > -\varepsilon$ fast immer. **d** $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergiert.
2. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^4 - 2x^3 + 9x$ und $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist konkav in } (-\infty, \alpha)\}$. Dann: ■ $\sup A = -1$. **b** $\inf A = -1$. **c** $\inf A = 1$. **d** $\sup A = 1$.
3. Sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(1) = f''(1) = 1/2$ und $g(x) = f(e^{4x})$. Welchen Wert hat $g''(0)$? **a** -4. **b** $1/4$. **c** 4. ■ 4^2.
4. Sei $a_n = \sin(100/n)$. Dann: ■ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{2n} a_{2n}$ konvergiert. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergiert. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ konvergiert.
5. Sei $a_n = n^3 \arctan(4n^{-3})$. Dann **a** $a_n \to 0$. ■ $a_n \to 4$. **c** $a_n \to +\infty$. **d** $a_n \to 1/4$.
6. Sei $a_n \to +\infty$. Dann: **a** $\exists n\, \forall m \geq n \,:\, a_n \geq m$. ■ $\exists n\, \exists m \leq n \,:\, a_n \geq m$. **c** $\exists m\, \forall n \geq m \,:\, a_n \geq m$. **d** $\forall m\, \forall n \geq m \,:\, a_n \geq m$.
7. Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ konvex und $f(0) = f(2) = 0$. Dann **a** $f(1) = 0$. **b** $f(1) > 0$. **c** $f(1) < 0$. ■ $f(1) \leq 0$.
8. Sei $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 + 7 = 0\}$ und $\alpha = 2\sqrt{3} \sup\{\operatorname{Im} z \,:\, z \in A\}$. Dann: **a** $\alpha = \sqrt[3]{7}$. **b** $\alpha = 7/3$. **c** $\alpha = 7^3$. ■ $\alpha = 3\sqrt[3]{7}$.
9. Sei $a_n \to 1$. Dann: **a** $a_n \geq 1$ fast immer. **b** $a_n \leq 1$ fast immer. **c** $a_n \leq 0$ fast immer. ■ $a_n \geq 0$ fast immer.
10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar. Dann: **a** f' ist ungerade. **b** $f' \geq 0$. ■ f' ist gerade. **d** $f'(0) = 0$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Einführung in die Analysis — Prüfung 26.02.2015 - **Teil 2**

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ]

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Sei $f(x) = -\ln(4-x)$ für alle $x < 4$ und sei $y = g(x)$ die Gleichung, die die Tangente zum Graph von f an der Stelle $(4-\mathrm{e}^4, -4)$ definiert. Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} 4(g(4))^{-n}$.

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    [0] [1] [2] [■] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin(1-e^{3x}+3\sin x)}{x^2} + \frac{\ln(1+x^3)}{\cosh x}\right).$$

    (Zur Erinnerung: $\cosh x = (e^x+e^{-x})/2$.)

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    [0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [■] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar und } f' \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

[ ]

Bitte nicht unter der Linie schreiben