Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ]

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2x\ln(1+|x|^{1/2})$ gegeben. Dann **a** f ist nicht stetig. **b** f ist nicht differenzierbar. **c** $f \in C^1(\mathbb{R})$. **d** $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

2. Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 2^2\}$. Welchen Wert hat $\sup(\mathrm{Re}(A)) + \inf(\mathrm{Im}(A))$? **a** 0. **b** 2. **c** −2. **d** $2i$.

3. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 \mathrm{e}^{-5x}$. Welchen Wert hat $\ln(-f''(1)/5)$? **a** e^{-5}. **b** 5. **c** 0. **d** −5.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(|x|)$ definiert. Dann: **a** g ist differenzierbar. **b** g ist konvex. **c** g ist stetig. **d** g ist ungerade.

5. Seien $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2x$ und g die Umkehrfunktion von f. Welchen Wert hat $g'(3)$? **a** 3. **b** 5. **c** 1/5. **d** 1/3.

6. Seien $a_n \to 1$ und $b_n = \arctan(a_n)$. Dann **a** $b_n > \pi/6$ fast immer. **b** $b_n \leq \pi/4$ fast immer. **c** $b_n \geq 0$. **d** $\arctan(-a_n) \geq 0$ fast immer.

7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $\forall \varepsilon{>}0\, \exists \delta{\geq}0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$. **b** $\forall \varepsilon{\geq}0\, \exists \delta{>}0 : |x-x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. **c** $\forall \varepsilon{>}0\, \exists \delta{\geq}0 : |x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\delta$. **d** $\exists \delta{>}0\, \forall \varepsilon{>}0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$.

8. Seien $0 < a_n \to 1$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n / b_n$ konvergiert. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ konvergiert. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert.

9. Seien $a_n = n^{x^2-5}$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konvergiert}\}$. Welchen Wert hat $\sup A$? **a** −1. **b** −2. **c** 1. **d** 2.

10. Seien $a_n, b_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $\sqrt{(a_n b_n)^2} \to \ell$. **b** $|a_n b_n| \to \ell^2$. **c** $a_n/b_n \to 1$. **d** $\lfloor a_n \rfloor \to \lfloor \ell \rfloor$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ]

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Für alle $\alpha, \beta > 0$ definiert man $f_{\alpha\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^{\alpha}|2-x|^{\beta}$. Seien $\gamma := 2\inf\{\alpha+\beta \ : \ f_{\alpha\beta} \text{ ist differenzierbar}\}$ und $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{-n}$. Welchen Wert hat $1/s$?

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin\left(2-2\cos(3x)\right)}{\ln(1+3x^2)} - \frac{4}{\pi}\arctan\left(\frac{3}{x}\right)\right).$$

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:
$$a_n \to -1, \ b_n \to 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n < b_n \text{ fast immer.}$$

    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ]

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konvex und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $g(x)=f(|x|)$ definiert. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ g ist differenzierbar. $\boxed{\mathbf{b}}$ g ist stetig. $\boxed{\mathbf{c}}$ g ist ungerade. $\boxed{\mathbf{d}}$ g ist konvex.

2. Seien $a_n\to 1$ und $b_n=\arctan(a_n)$. Dann $\boxed{\mathbf{a}}$ $b_n>\pi/6$ fast immer. $\boxed{\mathbf{b}}$ $b_n\le\pi/4$ fast immer. $\boxed{\mathbf{c}}$ $b_n\ge 0$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\arctan(-a_n)\ge 0$ fast immer.

3. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig in $x_0\in\mathbb{R}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall\varepsilon{\ge}0\,\exists\delta{>}0: |x-x_0|{\le}\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|{<}\varepsilon$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall\varepsilon{>}0\,\exists\delta{\ge}0: |x-x_0|{<}\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|{\le}\varepsilon$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\forall\varepsilon{>}0\,\exists\delta{\ge}0: |x-x_0|{<}\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|{<}\delta$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\exists\delta{>}0\,\forall\varepsilon{>}0: |x-x_0|{<}\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|{\le}\varepsilon$.

4. Sei $A=\{z\in\mathbb{C}\,:\,z\overline{z}=4^2\}$. Welchen Wert hat $\sup(\mathrm{Re}(A))+\inf(\mathrm{Im}(A))$? $\boxed{\mathbf{a}}$ $4i$. $\boxed{\mathbf{b}}$ 0. $\boxed{\mathbf{c}}$ 4. $\boxed{\mathbf{d}}$ -4.

5. Seien $f:x\in\mathbb{R}\mapsto x^3+4x$ und g die Umkehrfunktion von f. Welchen Wert hat $g'(5)$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 5. $\boxed{\mathbf{b}}$ $1/7$. $\boxed{\mathbf{c}}$ 7. $\boxed{\mathbf{d}}$ $1/5$.

6. Sei $f:x\in\mathbb{R}\mapsto x^3\mathrm{e}^{-3x}$. Welchen Wert hat $\ln(-f''(1)/3)$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 0. $\boxed{\mathbf{b}}$ -3. $\boxed{\mathbf{c}}$ 3. $\boxed{\mathbf{d}}$ e^{-3}.

7. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $f(x)=4x\ln(1+|x|^{1/4})$ gegeben. Dann $\boxed{\mathbf{a}}$ $f\notin C^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $f\in C^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\mathbf{c}}$ f ist nicht stetig. $\boxed{\mathbf{d}}$ f ist nicht differenzierbar.

8. Seien $0<a_n\to 1$ und $b_n=\sum_{k=1}^n a_k$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ konvergiert. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ konvergiert. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/b_n$ konvergiert.

9. Seien $a_n=n^{x^2-17}$ und $A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ konvergiert}\}$. Welchen Wert hat $\sup A$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 1. $\boxed{\mathbf{b}}$ -1. $\boxed{\mathbf{c}}$ -4. $\boxed{\mathbf{d}}$ 4.

10. Seien $a_n,\ b_n\to\ell\in\mathbb{R}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $|a_nb_n|\to\ell^2$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sqrt{(a_nb_n)^2}\to\ell$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\lfloor a_n\rfloor\to\lfloor\ell\rfloor$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_n/b_n\to 1$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname ____________________ Matrikelnummer __________

Unterschrift ____________________

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Für alle $\alpha, \beta > 0$ definiert man $f_{\alpha\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^{\alpha}|4-x|^{\beta}$. Seien $\gamma := 4 \inf\{\alpha+\beta \ : \ f_{\alpha\beta} \text{ ist differenzierbar}\}$ und $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{-n}$. Welchen Wert hat $1/s$?

    Merken Sie die richtige Antwort an:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes

    $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(2-2\cos(5x))}{\ln(1+5x^2)} - \frac{4}{\pi}\arctan\left(\frac{5}{x}\right) \right).$$

    Merken Sie die richtige Antwort an:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

    $$a_n \to -1,\ b_n \to 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n < b_n \text{ fast immer.}$$

    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben