

Name, Vorname Matrikelnummer Unterschrift

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch = -1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2x \ln(1+|x|^{1/2})$ gegeben. Dann a f ist nicht stetig. b f ist nicht differenzierbar. c $f \in C^1(\mathbb{R})$. d $f \notin C^1(\mathbb{R})$.
2. Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 2^2\}$. Welchen Wert hat $\sup(\operatorname{Re}(A)) + \inf(\operatorname{Im}(A))$? a 0. b 2. c -2. d $2i$.
3. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 e^{-5x}$. Welchen Wert hat $\ln(-f''(1)/5)$? a e^{-5} . b 5. c 0. d -5.
4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(|x|)$ definiert. Dann: a g ist differenzierbar. b g ist konvex. c g ist stetig. d g ist ungerade.
5. Seien $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2x$ und g die Umkehrfunktion von f . Welchen Wert hat $g'(3)$? a 3. b 5. c $1/5$. d $1/3$.
6. Seien $a_n \rightarrow 1$ und $b_n = \arctan(a_n)$. Dann a $b_n > \pi/6$ fast immer. b $b_n \leq \pi/4$ fast immer. c $b_n \geq 0$. d $\arctan(-a_n) \geq 0$ fast immer.
7. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann: a $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. b $\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. c $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$. d $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
8. Seien $0 < a_n \rightarrow 1$ und $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dann: a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert. b $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n / b_n$ konvergiert. c $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ konvergiert. d $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert.
9. Seien $a_n = n^{x^2-5}$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konvergiert}\}$. Welchen Wert hat $\sup A$? a -1. b -2. c 1. d 2.
10. Seien $a_n, b_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Dann: a $\sqrt{(a_n b_n)^2} \rightarrow \ell$. b $|a_n b_n| \rightarrow \ell^2$. c $a_n / b_n \rightarrow 1$. d $\lfloor a_n \rfloor \rightarrow \lfloor \ell \rfloor$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname Matrikelnummer Unterschrift

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.

Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Für alle $\alpha, \beta > 0$ definiert man $f_{\alpha\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^\alpha |2-x|^\beta$. Seien $\gamma := 2 \inf\{\alpha+\beta : f_{\alpha\beta} \text{ ist differenzierbar}\}$ und $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{-n}$. Welchen Wert hat $1/s$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

12. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(2-2\cos(3x))}{\ln(1+3x^2)} - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{3}{x}\right) \right).$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$a_n \rightarrow -1, b_n \rightarrow 1 \implies a_n < b_n \text{ fast immer.}$$

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname

Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch = -1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(|x|)$ definiert. Dann: **a** g ist differenzierbar. **b** g ist stetig. **c** g ist ungerade. **d** g ist konvex.
2. Seien $a_n \rightarrow 1$ und $b_n = \arctan(a_n)$. Dann **a** $b_n > \pi/6$ fast immer. **b** $b_n \leq \pi/4$ fast immer. **c** $b_n \geq 0$. **d** $\arctan(-a_n) \geq 0$ fast immer.
3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. **b** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \geq 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. **c** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \geq 0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$. **d** $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
4. Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 4^2\}$. Welchen Wert hat $\sup(\operatorname{Re}(A)) + \inf(\operatorname{Im}(A))$? **a** $4i$. **b** 0 . **c** 4 . **d** -4 .
5. Seien $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 4x$ und g die Umkehrfunktion von f . Welchen Wert hat $g'(5)$? **a** 5 . **b** $1/7$. **c** 7 . **d** $1/5$.
6. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 e^{-3x}$. Welchen Wert hat $\ln(-f''(1)/3)$? **a** 0 . **b** -3 . **c** 3 . **d** e^{-3} .
7. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 4x \ln(1 + |x|^{1/4})$ gegeben. Dann **a** $f \notin C^1(\mathbb{R})$. **b** $f \in C^1(\mathbb{R})$. **c** f ist nicht stetig. **d** f ist nicht differenzierbar.
8. Seien $0 < a_n \rightarrow 1$ und $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ konvergiert. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n / b_n$ konvergiert.
9. Seien $a_n = n^{x^2-17}$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konvergiert}\}$. Welchen Wert hat $\sup A$? **a** 1 . **b** -1 . **c** -4 . **d** 4 .
10. Seien $a_n, b_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $|a_n b_n| \rightarrow \ell^2$. **b** $\sqrt{(a_n b_n)^2} \rightarrow \ell$. **c** $\lfloor a_n \rfloor \rightarrow \lfloor \ell \rfloor$. **d** $a_n / b_n \rightarrow 1$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname

Matrikelnummer

Unterschrift

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.

Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Für alle $\alpha, \beta > 0$ definiert man $f_{\alpha\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^\alpha |4-x|^\beta$. Seien $\gamma := 4 \inf\{\alpha+\beta : f_{\alpha\beta} \text{ ist differenzierbar}\}$ und $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{-n}$. Welchen Wert hat $1/s$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

12. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(2-2\cos(5x))}{\ln(1+5x^2)} - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{5}{x}\right) \right).$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$a_n \rightarrow -1, b_n \rightarrow 1 \implies a_n < b_n \text{ fast immer.}$$

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben