Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie den Satz über den *Anfangswertproblem der linearen Transportgleichung.*

Aufgabe 2. Sei u eine Lösung von $u_t + u_x = 1$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x \mapsto u(x, 0)$ ungerade. Zeigen Sie, dass $(x, t) \mapsto u(x, t)$ ungerade ist.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie den *Struktursatz des Systems der charakteristischen Gleichungen*.

Aufgabe 2. Finden Sie $T_{\max} > 0$ maximal, sodass das Problem $u_t + uu_x = 0$ mit Anfangsbedingung $u(x, 0) = -x$ mit der Methode der Charakteristiken in $\mathbb{R} \times (0, T_{\max})$ gelöst werden kann.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie die *Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen*.

Aufgabe 2. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch mit

$$\left| \int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq r^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0.$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie das *Maximumprinzip für harmonische Funktionen*.

Aufgabe 2. Sei $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch mit $h(x,y) = x$ auf $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 = 4\}$. Berechnen Sie $\max_{\overline{\Omega}} h$.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie den *Liouville-Satz für harmonische Funktionen*.

Aufgabe 2. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und $x \mapsto u(x) - u(2x)$ beschränkt. Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie das *Vergleichsprinzip für kalorische Funktionen auf beschränkten Mengen.*

Aufgabe 2. Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ kalorisch mit $u(x, 0) = \cos x$ für alle $|x| \leq \pi/2$ und $u(\pm\pi/2, t) = \sin t$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie, dass $u \leq 1$ ist.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie den Satz über die *Lösung des Cauchy-Problems der n-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung*.

Aufgabe 2. Sei $\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/(4t))$ die Fundamentallösung des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \mid \Phi(x,t) \geq t^{-n/2}\}$ kompakt ist.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie die *D'Alembertsche Formel für die eindimensionale Wellengleichung*.

Aufgabe 2. Sei u eine Lösung von $u_{tt} = u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ mit $u(x, 0) = \ell(x)$ und $u_t(x, 0) = \ell'(x)$ gegeben. Berechnen Sie u als Funktion von ℓ.

Name, Vorname Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie **leserlich** in den Rahmen.

Aufgabe 1. Stellen Sie auf und beweisen Sie den Satz über den *Einflussbereich der n-dimensionalen Wellengleichung.*

Aufgabe 2. Sei u eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ mit und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch mit $h(x) = u(x, 0)$ und $u_t(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass u zeitunabhängig ist.