

Name, Vorname

Matrikel

Unterschrift

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so **■** an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch = -1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $a_n \rightarrow a$ und $a > 0$. Dann: **a** $a_{n^3} \rightarrow a$. **b** $a_{2n} \rightarrow 2a$. **c** $a_{n+1} \rightarrow a + 1$. **d** $a_{n^2} \rightarrow a^2$.
2. Sei $a_n \rightarrow 0$. Dann: **a** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon$. **b** $\exists n \in \mathbb{N} : |a_n| < 1/n$. **c** $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n| < 1/N$. **d** $\exists n \in \mathbb{N} : |a_{n+1}| \leq |a_n| + 1$.
3. Sei $a_n > 0$ und $a_n \rightarrow a$. Dann: **a** $a > 0$. **b** $a_n a > 0$ fast immer. **c** $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a$. **d** $a \neq 0$.
4. Sei $a_n \in \mathbb{N}$ und $a_n \rightarrow +\infty$. Dann: **a** a_n ist nach oben beschränkt. **b** a_{a_n} ist nach unten beschränkt. **c** die Folge $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ ist beschränkt. **d** $\sin(na_n) > 0$.
5. Sei $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ und $b_n \rightarrow 1$. Dann: **a** $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1$. **b** $a_n b_n \rightarrow +\infty$. **c** b_n/a_n ist nicht beschränkt. **d** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = +\infty$.
6. Sei $a_n b_n \rightarrow 1$ und $a_n \rightarrow 0$. Dann: **a** $a_n b_n^2 \rightarrow 0$. **b** $a_n^2 b_n \rightarrow 0$. **c** $a_n^2 b_n^2 \rightarrow 0$. **d** $a_n + b_n \rightarrow 1$.
7. Sei $a_n > 0$ und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Dann: **a** $\ln a_n$ ist beschränkt. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/a_n) < +\infty$.
8. Sei $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Dann: **a** $ab \leq 0 \Rightarrow a_n b_n < 0$ fast immer. **b** $ab < 0 \Rightarrow a_n b_n < 0$ fast immer. **c** $ab = 0 \Rightarrow a_n b_n = 0$ fast immer. **d** $ab > 0 \Rightarrow a_n > 0$ fast immer.
9. Sei $a_{2n} \rightarrow a$ und $a_{2n+1} \rightarrow -a$. Dann: **a** $a_{7n} \rightarrow a \Leftrightarrow a = 0$. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ist konvergent. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent. **d** $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ fast immer.
10. Sei a_n monoton und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergent. Dann: **a** $\sin(a_n)$ ist monoton. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent. **c** $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$. **d** $a_n \geq 0$ fast immer.

Bitte nicht schreiben unter der Linie

Name, Vorname Matrikel Unterschrift

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.

Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2 n^2 - 2|x|^{3n}}{1 + 2x n^2} \right)^{7n}$$

und definieren wir die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergent ist}\}$. Wie viel gilt $\sup A - 2 \inf A$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

12. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{2n^n} - \frac{3n^2 - 2n}{1 + n^2} - \ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \cos(n^2) \right).$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch = -2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\left((a_n \rightarrow a) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n) \right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a.$$

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)