Einführung in die Analysis — Simulierte Prüfung - **Teil 1**

Name, Vorname ____________________ Matrikel __________

Unterschrift ____________________

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

---

1. Sei $a_n \to a$ und $a > 0$. Dann: ■ $a_{n^3} \to a$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_{2n} \to 2a$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $a_{n+1} \to a+1$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_{n^2} \to a^2$.

2. Sei $a_n \to 0$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\exists n \in \mathbb{N} : |a_n| < 1/n$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_N| < 1/N$. ■ $\exists n \in \mathbb{N} : |a_{n+1}| \leq |a_n| + 1$.

3. Sei $a_n > 0$ und $a_n \to a$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $a > 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n a > 0$ fast immer. ■ $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a \neq 0$.

4. Sei $a_n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to +\infty$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ a_n ist nach oben beschränkt. ■ a_{a_n} ist nach unten beschränkt. $\boxed{\mathbf{c}}$ die Folge $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ ist beschränkt. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sin(na_n) > 0$.

5. Sei $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ und $b_n \to 1$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n b_n \to +\infty$. ■ b_n/a_n ist nicht beschränkt. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = +\infty$.

6. Sei $a_n b_n \to 1$ und $a_n \to 0$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $a_n b_n^2 \to 0$. ■ $a_n^2 b_n \to 0$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $a_n^2 b_n^2 \to 0$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_n + b_n \to 1$.

7. Sei $a_n > 0$ und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\ln a_n$ ist beschränkt. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$. ■ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/a_n) < +\infty$.

8. Sei $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $ab \leq 0 \Rightarrow a_n b_n < 0$ fast immer. ■ $ab < 0 \Rightarrow a_n b_n < 0$ fast immer. $\boxed{\mathbf{c}}$ $ab = 0 \Rightarrow a_n b_n = 0$ fast immer. $\boxed{\mathbf{d}}$ $ab > 0 \Rightarrow a_n > 0$ fast immer.

9. Sei $a_{2n} \to a$ und $a_{2n+1} \to -a$. Dann: ■ $a_{7n} \to a \Leftrightarrow a = 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ist konvergent. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ fast immer.

10. Sei a_n monoton und $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergent. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sin(a_n)$ ist monoton. ■ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $a_n \geq 0$ fast immer.

Bitte nicht schreiben unter der Linie

Einführung in die Analysis — Simulierte Prüfung - **Teil 2**

Name, Vorname ______________________ Matrikel ____________

Unterschrift ______________________

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

---

11. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2 n^2 - 2|x|^3 n}{1 + 2xn^2} \right)^{7n}$$

und definieren wir die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergent ist}\}$. Wie viel gilt $\sup A - 2 \inf A$?

Merken Sie die richtige Antwort an:

−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	■	7	8	9

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n!}{2n^n} - \frac{3n^2 - 2n}{1 + n^2} - \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \cos(n^2) \right).$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

−9	−8	−7	−6	−5	−4	−■	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\Big((a_n \to a) \;\wedge\; (\exists k \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n) \Big) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a.$$

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht schreiben unter der Linie