

Übungen zu Analysis, SS 2015

Ulisse Stefanelli

4. April 2020

1 Wiederholung

1. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Folgen

$$a_n = n^2 \cosh(1/n), \quad b_n = \ln(\ln(n))/n, \quad c_n = (2^n - n^2)/n!,$$

2. Stellen Sie Beispiele von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vor, sodass

- (a) f ist strict monoton und hat kritische Punkte,
- (b) f hat kritische Punkte, die keine lokalen Maximumstellen bzw. Minimumstellen sind,
- (c) f hat lokale Maximumstellen bzw. Minimumstellen, die keine kritische Punkte sind,
- (d) f ist monoton und periodisch,
- (e) f ist ungerade, nicht konstant und 0 ist eine lokale Maximumstelle oder eine lokale Minimumstelle,
- (f) f ist gerade und 0 ist keine lokalen Maximumstelle bzw. Minimumstelle.

3. Richtig oder falsch? Geben Sie einen Beweis oder stellen Sie ein Gegenbeispiel vor:

- (a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade $\Rightarrow f - g$ gerade
- (b) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade $\Rightarrow f - g$ ungerade
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist gerade
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist gerade
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist ungerade
- (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist ungerade

4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch und differenzierbar. Beweisen Sie, dass f unendliche viele kritische Punkte hat.

5. Berechnen Sie die folgenden Limes

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arctan(\sin(x^2)))^2}{(\cos x)^2 - 1},$

$$(b) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \operatorname{Sh}(1/t^2)}{1/t},$$

$$(c) \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 y + \ln(1 - y^2)}{1 - \cos(2y)},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}.$$

6. Seien $f(x) = 5 - 8x - 2e^{5x}$, $g(x) = e^{-8(x+1)} - \arctan(8(x+1)) - x$, für $x \in \mathbb{R}$, und seien f^{-1} und g^{-1} die entsprechenden Umkehrfunktionen (untersuchen Sie die Existenz solcher Umkehrfunktionen nicht). Berechnen Sie

$$\frac{2}{(f^{-1})'(3)} + \frac{1}{(g^{-1})'(2)}.$$

7. Zeichnen Sie den Graph von

$$f_\lambda : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x^3 - \lambda x + \lambda & \text{se } |x| < 1 \\ \frac{4}{\pi} \arctan(\lambda x) & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

für verschiedene Werte von $\lambda > 0$. Für welchen λ hat man $f_\lambda \in C^0(\mathbb{R})$ bzw. $f_\lambda \in C^1(\mathbb{R})$?

2 Unbestimmte Integration

8. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen

$$\int \frac{x^2 \arctan(x^3)}{1 + x^6} dx, \quad \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int e^{e^x + x} dx$$

9. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und beschränkt. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^2 + 1} dx, \quad \int f(x) f'(x) \cos((f(x))^2) dx, \quad \int f'(f(x)) f'(x) dx.$$

10. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen

$$\int x \operatorname{Ch} x dx, \quad \int \sin x \operatorname{Sh} x dx.$$

11. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen

$$\int x^2 \sin x dx, \quad \int x^n \sin x dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3 Riemannsche (oder bestimmte) Integration

12. Zur Erinnerung:

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\},$$

$$R[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist riemannintegrierbar}\}.$$

Seien $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sodass $f \in R[0, 1]$, $g \in C[0, 1]$, und h streng monoton wachsend ist. Richtig oder falsch?

- (a) $g \circ g - h \circ h \in R[0, 1]$.
- (b) $f \circ f \notin R[0, 1]$.
- (c) $f - f^+ + \sup f \in R[0, 1]$.
- (d) $\tan \circ h \in R[0, 1]$.

13. Stellen Sie Beispiele vor:

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \notin R[0, 1]$ und $f \in R[0, b] \forall b \in (0, 1)$.
- (b) $g \notin R[0, 1]$, sodass $g^+ + 2g^- \in R[0, 1]$.
- (c) $h \in R[0, 1]$ mit endliche viele Unstetigkeitsstellen.
- (d) $\ell \in R[0, 1]$ mit unendliche viele Unstetigkeitsstellen.

14. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in [a, b], f \in R[a, b], f = g \text{ in } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

$$\implies g \in R[a, b] \text{ und } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

15. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex} \implies f \in R[a, b].$$

16. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in R[-a, a] \text{ und ungerade} \implies \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

17. Berechnen Sie die folgenden Integrale

- (a) $\int_0^\pi \sin x dx, \int_{-\pi}^\pi \cos x \sin x dx, \int_0^{4\pi} \sin(x/2) dx,$
- (b) $\int_0^1 x \sin x dx, \int_{-1}^1 x e^{-x} dx, \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{Ch} x dx,$
- (c) $(a > 0) \int_a^{2a} \ln(x/a) dx, \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \int_0^a \frac{x}{a} \left(\int_{-a}^a \frac{dt}{a^2} \right) dx.$

18. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^2 (x+3x^+) dx, \int_{-1}^1 \lfloor 2x \rfloor dx, \int_0^3 2x - \lfloor x \rfloor dx,$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 dx, \int_{-1}^1 \sqrt{1-|x|} dx, \int_0^2 \min\{x, 1\} dx,$$

$$(c) \int_{-2}^2 \left(\sqrt{4-x^2} - (1-|x|)^+ \right) dx, \int_{-10}^{10} \lfloor (\cos x)^+ \rfloor dx, \int_0^2 \left(\int_0^x t^2 dt \right) dx.$$

19. Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien $f \in C(a, b)$, $g, h \in C^1(a, b)$, und $x_0 \in (a, b)$. Dann ist die Funktion

$$\ell(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$$

in $C^1(a, b)$ und

$$\ell'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

4 Uneigentliche Integration

20. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi^2 + x^2}, \int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx.$$

21. Betrachten Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent, uneigentlich konvergent, oder nicht konvergent sind:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(-e^x)}{\sin(1/x)} dx, \int_1^{+\infty} x^{10} e^{-x} dx.$$

22. Betrachten Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent, uneigentlich konvergent, oder nicht konvergent sind:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x} dx,$$

(Hinweis: Integralkriterium für Reihen und Cauchy Kriterium).

23. Stellen Sie die folgenden Beispiele vor:

$$(a) \int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ nicht existiert,}$$

$$(b) \int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}, f \text{ nicht beschränkt,}$$

$$(c) f \notin R[0, 1], \text{ sodass } f \in R[0, \alpha] \text{ für alle } \alpha \in (0, 1),$$

$$(d) f \in C[0, +\infty), \int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}, \text{ und } f \text{ nicht beschränkt.}$$

24. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in C^1(a, b), x_0 \in (a, b) \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

25. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell = 0.$$

5 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

26. Stellen Sie Beispiele vor:

(a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{g} 0.$

(b) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{p} 0$ aber $f_n \not\xrightarrow{g} 0.$

(c) $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{g} 0, g_n \xrightarrow{p} 0,$ aber $f_n g_n \not\xrightarrow{g} 0.$

(d) $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n, g_n \xrightarrow{p} 0, f_n g_n \xrightarrow{g} 0.$

27. Berechnen Sie den Limes der Funktionenfolge $f_n(x) = (\sin x)^n + 3x^n$. Konvergiert sie punktweise oder gleichmäßig in $A = [0, 1], B = [0, 2], C = (-1.5, 0]$?

28. Berechnen Sie den Limes der folgenden Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad f_n(x) = \arctan(x/n), \quad f_n(x) = n \arctan(x/n).$$

Konvergieren sie punktweise oder gleichmäßig?

29. Beweisen Sie die folgenden Sätze, oder stellen Sie ein Gegenbeispiel vor.

(a) $f_n, f \in R[0, +\infty), f_n \xrightarrow{p} f \Rightarrow \int_0^{+\infty} f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f.$

(b) $f_n, f \in R[0, +\infty), f_n \xrightarrow{g} f \Rightarrow \int_0^{+\infty} f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f.$

30. Berechnen Sie die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k / (k+1)!$

31. Berechnen Sie die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k / k.$

6 Taylorpolynome, Taylorreihen und Fourierreihen

32. Berechnen Sie die McLaurinpolynome mit Grad 7 der folgenden

$$a : x \mapsto 2 \cos x, \quad b : x \mapsto \cos(x^2), \quad c : x \mapsto (\cos x)^2, \quad d : x \mapsto \cos(\pi + \sin x).$$

33. Seien $f \in C^\infty(\mathbb{R}), x_0 \in \mathbb{R}$ und p das Taylorpolynom von f mit Grad 6 und Entwicklungspunkt x_0 . Richtig oder falsch? Beweisen Sie oder stellen Sie Gegenbeispiele vor.

a) $p^{(5)}(x_0) = f^{(5)}(x_0),$ b) $p^{(5)}(0) = f^{(5)}(0),$ c) $p^{(7)}(x_0) = 0.$

34. Seien $f : x \mapsto 7x^2 \cos(x^3) + x \sin(7x^8)$ und p ihr MacLaurinpolynom mit Grad 11. Welchen Wert hat $p'(1)$?
35. Seien $f : x \mapsto e^{-6x^6} + 6 \sin(x^2)$ und p ihr MacLaurinpolynom mit Grad 8. Welchen Wert hat $p'(-1)$?
36. Sei $f : x \rightarrow x/(1+x^3)$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachten ihre Konvergenz.
37. Sei $f : x \rightarrow x \ln(1+x)$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachten ihre Konvergenz.
38. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in [-\pi, 0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in [0, \pi)$.
39. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$.
40. Sei $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = \exp(i\alpha x)$ für $x \in [-\pi, \pi)$.

7 Topologische Grundbegriffe

41. Welche von diesen sind metrische Räume?
- (a) $X = \mathbb{R}, d(x, y) = (x - y)^2,$
 - (b) $X = [0, 2\pi), d(x, y) = |e^{ix} - e^{iy}|,$
 - (c) $X = \mathbb{R}, d(x, y) = x - y,$
 - (d) $X = \mathbb{R}^2, d(v, w) = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2,$
 - (e) $X = \mathbb{R}^2, d(v, w) = |2v_1 - w_1| + |2v_2 - w_2|,$
 - (f) $X = \mathbb{R}^2, d(v, w) = \min\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\}.$
42. Welche von diesen sind metrische Räume?
- (a) $X = \{a, b, c\}, d(a, b) = d(b, a) = d(a, c) = d(c, a) = 1, d(b, c) = d(c, b) = 1/3, d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0,$
 - (b) $X = \{\text{alle endliche Submenge von } \mathbb{N}\}, d(A, B) = |A \Delta B|$ (zur Erinnerung: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$),
 - (c) $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}, d(n, m) = |n^{-1} - m^{-1}|$ für $n, m \in \mathbb{N}, d(\infty, \infty) = 0, d(n, \infty) = d(\infty, n) = n^{-1}$ für $n, \in \mathbb{N}.$
43. Welche von diesen sind metrische Räume?
- (a) $X = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ stetig}\}, d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|,$
 - (b) $X = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ stetig}\}, d(f, g) = |f(1/2) - g(1/2)|,$

$$(c) X = C[0, 1], d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

44. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass die Abbildung $D : (x, y) \in X \times X \mapsto \min\{1, d(x, y)\}$ eine Metrik definiert.

45. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$. Richtig oder falsch?

$$(a) A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B,$$

$$(b) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \partial A \cap \partial B = \emptyset,$$

$$(c) \partial B \subset A \subset B \Rightarrow \partial B \subset \partial A,$$

$$(d) A \neq \emptyset, \inf\{d(a, B) \mid a \in A\} = 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

46. In $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ betrachten wir die Submenge

$$A = \{xy = 1\}, \quad B = \{x^2 + y^2 \leq 1, x < 1\}, \quad C = \{|x| \leq |y| \leq |x|/2\}, \quad D = \{|xy| \leq 1\}.$$

Welche sind offen, abgeschlossen, beschränkt?

47. Stellen Sie Beispiele in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ vor:

(a) $A \subset \mathbb{R}^2$ offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt.

(b) $B \subset \mathbb{R}$, sodass $B \times B \subset \mathbb{R}^2$ nicht offen und nicht abgeschlossen ist.

(c) $C \subset \mathbb{R}^2$ offen, abgeschlossen und beschränkt.

48. In $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ betrachten wir die Submenge

$$A = \{f \in X \mid f \text{ konstant}\},$$

$$B = \{f \in X \mid f \text{ beschränkt}\},$$

$$C = \{f \in X \mid f \text{ differenzierbar in } (0, 1) \text{ und } f' = f\}.$$

Welche sind offen, abgeschlossen, beschränkt?

49. Seien $p, q \in [1, \infty]$ und $O \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$O \text{ is offen in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \iff O \text{ is offen in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q).$$

50. Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n_\varepsilon : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(a_i).$$

51. Stellen Sie Beispiele vor:

(a) (X, d) beschränkt, nicht vollständig.

(b) (X, d) nicht beschränkt, vollständig.

(c) (X, d) nicht beschränkt, nicht vollständig.

52. Sei der metrische Raum $(X, d) = (C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ gegeben. Stellen Sie Beispiele vor:

- (a) $A \subset X$ offen, beschränkt.
- (b) $B \subset X$ nicht beschränkt, vollständig.
- (c) $C \subset X$ abgeschlossen, beschränkt.

53. Beweisen Sie den *Satz vom abgeschlossenen Graphen*.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume mit Y kompakt. Dann:
 $f : X \rightarrow Y$ stetig $\iff G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ abgeschlossen

54. Gilt den Satz vom abgeschlossenen Graphen ohne die Kompaktheit Voraussetzung?

55. Stellen Sie Beispiele in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (falls sie existieren) vor:

- (a) A kompakt mit $\partial A = A$.
- (b) B abgeschlossen und nicht beschränkt mit $B \cap \{|x| < k\}$ kompakt für alle $k > 0$.
- (c) $C \neq \emptyset$ und offen mit $C \cap \{|x| < k\}$ kompakt für alle $k > 0$.
- (d) $D \neq \bar{D}$ mit \bar{D} kompakt.

56. Zeigen Sie durch die Definition die Stetigkeit der folgenden Funktionen

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, -x)$ (Rotation).
- (b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = y - x$.
- (c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$.

57. Zeigen Sie, dass $z_n = e^{in} \in \mathbb{C}$ konvergente Teilfolgen hat. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ beliebig. Existiert eine Teilfolge z_{n_k} mit $z_{n_k} \rightarrow z$ (heuristisch)?

58. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und nicht leer. Beweisen Sie, dass

- (a) $K \times K \in \mathbb{R}^2$ kompakt ist,
- (b) $K \times (\mathbb{R} \setminus K) \in \mathbb{R}^2$ nicht kompakt ist,
- (c) $2K = \{2x \in \mathbb{R} : x \in K\}$ kompakt ist,
- (d) $K - K = \{x - y \in \mathbb{R} : x, y \in K\}$ kompakt ist.

59. Bestimmen sie die Operatornorm der Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(v) = Av$, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Zeigen Sie, dass $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$ existiert, sodass $\|L(v)\|_2 = \|L\|_{\text{Op}}$ ist.

8 Funktionen mehrerer Variablen

60. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen (aller Ordnungen) der Funktion $f(x, y, z) = x^2 \sin y e^{-z}$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
61. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y, z) = z^2 + \log(x^2 + y^2)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Sind diese stetig?
62. Sei $p \in [1, \infty]$. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(v) = \|v\|_p$ partiell differenzierbar? Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(v) = \|v\|_q^q$ für $q \in [1, \infty)$ partiell differenzierbar?
63. Berechnen Sie die ersten und die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ist $\partial_{xy}^2 f(0, 0) = \partial_{yx}^2 f(0, 0)$? Wieso?

64. Sei $r(x) = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $\nabla r(x)$ und $\Delta r(x)$.
65. Für alle $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar definieren wir $\nabla_{(x,y)} f = (\partial_x f, \partial_y f) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\nabla_{(x,y)} \cdot v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Delta_{(x,y)} f = \nabla_{(x,y)} \cdot (\nabla_{(x,y)} f) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
Sei $O = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \in \mathbb{R}^3$ und $u : (x, y, t) \in O \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x, y, t) = t^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/4t).$$

Zeigen Sie, dass

$$\nabla_{(x,y)} u(x, y, t) = -(xu(x, y, t), yu(x, y, t))/(2t)$$

und dass u die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta_{(x,y)} u$$

für alle $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ erfüllt.

66. Geben Sie Beispiele von Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\nabla \cdot f(x, y, z) = 1+x$, $\nabla g(x, y, z) = (2xye^{z^2}, x^2e^{z^2}, 2x^2yze^{z^2})$, $\Delta h(x, y, z) = \nabla \cdot (\nabla h)(x, y, z) = 1$.
67. Existiert $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, sodass $\nabla g(x, y, z) = (x, yz, z)$?
68. Berechnen Sie den Differential von $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (xz^2, \cos z + e^y)$. Sei L_{x_0} der Differential von f in $x_0 = (1, 0, \pi)$. Welchen Wert hat $L_{x_0}(1, 2, 3\pi)$?
69. Für alle $k \in \mathbb{N}$ finden Sie Beispiele von Funktionen
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die C^k sind aber nicht $k+1$ -mal partiell differenzierbar sind,
 - $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die C^k aber nicht C^{k+1} sind,
 - $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die $k+1$ -mal partiell differenzierbar aber nicht C^{k+1} sind,

70. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ sei $u : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \|x\|_2^{2-n}$. Beweisen Sie, dass $\Delta u = 0$.

71. Sei $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto \ln \|x\|_2$. Beweisen Sie, dass $\Delta u = 0$.

72. Sei $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta w = 0$. Beweisen Sie, dass

$$w \text{ konstant} \Leftrightarrow \Delta(w^2) = 0.$$

73. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\phi(x, y) = x \cos y$ gegeben. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(\xi, 0) d\xi + \int_0^\pi \frac{\partial \phi}{\partial y}(1, \eta) d\eta,$

(b) $\int_0^\pi \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, \eta) d\eta + \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(\xi, 1) d\xi,$

74. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^2 + 6xy + y^2$ im Punkt $(1, 1)$ in Richtung zum Punkt $(2, 4)$.

75. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ in Richtung zum Ursprung.

76. Ermitteln Sie die Gleichung $z = g(x, y)$, die die Tangentialhyperebene an den Graphen von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 + \sin y$ im Punkt $(1, \pi)$.

77. Man berechne die Gleichung der Tangentialhyperebene an der Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, wo f differenzierbar ist.

78. Wie lautet das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2ye^x + y^2$ im Punkt $(0, 2)$?

79. Finden Sie die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (y-x^2)(y-2x^2)$. Welche von diesen sind lokale Extrema?

80. Finden und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$

(b) $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y},$

(c) $f(x, y) = x^3 - 4y^3 + 3x^2 - y^4.$

81. Man untersuche folgende Funktionen auf Extrema:

(a) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 + 3xy,$

(b) $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$