Übungen zu Einführung in die Analysis, WS 2019

Ulisse Stefanelli

24. September 2019

1 Wiederholung

1. Seien p, q und r Aussagen. Zeigen Sie, dass dei Aussagen

   (a) $p \vee (\neg p \vee q)$,

   (b) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$,

   (c) $\neg\Big[\big((p \wedge r) \wedge \neg q\big) \vee \big(q \vee \neg(p \wedge r)\big)\Big] \Rightarrow \big((q \wedge (p \vee \neg q)) \Rightarrow \neg p\big)$

   Tautologien sind.

2. Sei $\star$ eine Operation, die durch die folgende Wahrheittafel definiert ist:

p	q	$p \star q$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

   Drücken Sie $p \star q$ mit Hilfe der Negation ($\neg$) und der Konjunktion ($\wedge$) aus.

3. Sei $p \neq 1$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

4. Seien A, B, C, D, E und F die Mengen:

$$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}, \quad B = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$D = \{n^3 - n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad E = \{r \in \mathbb{R} \mid 1 < r \leq 3\}, \quad F = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^4 \notin \mathbb{Q}\}.$$

   Berechnen Sie:

   (a) $(\inf C)(\inf D) + (\sup E)(\inf E)$,

   (b) $(\sup A + \inf A)(\sup B - \inf B)$,

   (c) $\sup F$.

5. Seien A and B nichtleere Mengen reeller Zahlen und

$$A + B := \{a + b \ : \ a \in A,\ b \in B\}, \quad AB := \{ab \ : \ a \in A,\ b \in B\}.$$

   Man zeige $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Gilt auch $\sup(AB) = \sup A \sup B$?

6. Seien z, $w \in \mathbb{C}$ beliebig mit $0 < |z| < 1 < |w|$. Man zeichne:

$$z,\ w,\ z^2,\ w^2,\ \{y \in \mathbb{C} \ : \ y^3 = z\},\ \{y \in \mathbb{C} \ : \ y^4 = w\}.$$

7. Lösen Sie die folgende in $\mathbb{C}$:
   (a) $z^5 = i$,
   (b) $(z\overline{z} - 1)^2 \geq 4$,
   (c) $z^5 + 2iz^3 - 4z = 0$,
   (d) $(z\overline{z})|z - 1|^{-2} = 1$,
   (e) $(z\overline{z} - 1)((z - 2)^4 - 1) = 0$

2 Funktionen

8. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wie viele verschiedene Funktionen $f : A \to A$ gibt? Wie viele Funktionen $f : A \times A \to A \times A \times A$ gibt?

9. Finden Sie ein Beispiel von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{N}$ so dass

$$\text{(a)} \quad f^{-1}(f(A)) \neq A, \quad \text{(b)} \quad f(f(A)) \subset A, \quad \text{(c)} \quad A \subset f(f(A)), \quad \text{(d)} \quad f(A) = f^{-1}(A)$$

10. Seien $f : A \to A$, $\emptyset \neq B' \subset A$ und sei $F : A \times A \to A \times A$ so definiert

$$F(a, a') := (a', f(a)) \quad \forall (a, a') \in A \times A.$$

   Sei $B = f^{-1}(B')$. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad F(F(A \times B)), \quad \text{(b)} \quad F^{-1}(A \times B'), \quad \text{(c)} \quad F^{-1}(F(B' \times B)).$$

3 Folgen

11. Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *nach oben beschränkt*, *nach unten beschränkt* *beschränkt*, *konvergent*, *uneigentlich konvergent* für die gegebenen reellen Folgen vorliegen.

$$a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}, \quad b_n = (-1)^{(-1)^n}, \quad c_n = (-1)^n - (-1)^{3n+1}, \quad d_n = \sin(1/n),$$
$$e_n = n\sin(n), \quad f_n = n^3 - 64n^2, \quad g_n = \ln n - n, \quad h_n = \frac{n!}{(2n)!}.$$

12. Für alle $\alpha \in (0,2)$, berechne man:

    (a) $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}(n+1)^{-1}$.

    (b) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n^{-\alpha}$.

    (c) $\lim_{n\to+\infty}(1+2+\ldots+n)^{\alpha}/n$.

13. Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, (a_n) beschränkt, $b_n \to b$, $c_n := 2^{a_n b_n}$ und $d_n = 10^{10}(a_n(b_n-b))$. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) (c_n) ist beschränkt.

    (b) (c_n) ist konvergent.

    (c) (d_n) ist konvergent.

    (d) $(d_n c_n)$ ist konvergent.

14. Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, $a_n \to a$ und $b_n \to +\infty$. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) $a > 0 \implies a_n b_n \to +\infty$.

    (b) $a = 0 \implies a_n b_n \to 0$.

    (c) $a_n/b_n \to 0$.

    (d) $a = 0 \implies a_n \cos(b_n) \to 0$.

    (e) $a_n b_n$ beschränkt $\implies a_n b_n \to 0$.

15. Berechnen Sie:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

16. Sei (a_n) eine reelle Folge. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) $a_n \to a \iff a_{n+1} - a_n \to 0$.

    (b) $0 < a_n^2 < a_n \iff a_n \to 0$.

    (c) $a_n \to a \iff a_{2n+1} \to a$.

17. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) (a_n) monoton, (a_n^3) beschränkt $\implies (a_n)$ konvergent.

    (b) (a_n) konvergent und $(a_n b_n)$ konvergent $\implies \{b_n\}$ konvergent.

    (c) $a_{2n} \to \ell_1$, $a_{2n+1} \to \ell_2$, $a_{3n} \to \ell_3 \implies \ell_1 = \ell_2 = \ell_3$.

    (d) $(-1)^n a_n \to \ell$, (a_n) monoton $\implies \ell = 0$.

    (e) (a_{2n}) monoton und (a_{2n+1}) konvergent $\implies (a_{3n})$ konvergent.

18. Welche von diesen Folgen konvergiert? Warum?

$$a_n = \ln\left(-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad b_n = \frac{(\log_2 n)^2}{1+\log_3 n}, \quad c_n = \frac{(\arctan n)^+}{\ln(n+1)}, \quad d_n = (\sin(\sin n))^n.$$

4 Reihen

19. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2}.$$

20. Beweisen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^{2n}}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n^3+1}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{10} \ln n}{n^{5/2}}.$$

21. Sei die Menge $A \subset \mathbb{R}$ so definiert

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^2-8}}{n^2+1} \; \text{ konvergiert} \right\}.$$

Berechnen Sie $\sup A - 2 \inf A$.

22. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der foldenden Reihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{10} \mathrm{e}^{-n}.$$

23. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n}}{(2n)!}$$

konvergiert und mit der Hilfe des Taschenrechners berechnen Sie ihre Summe mit Toleranz 10^{-3}.

24. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cos(\pi n/2)$ konvergiert und dass ihre Summe s zum Interval $(3/4, 13/16)$ gehört.

25. Welche von diesen Reihen sind absolut bwz. bedingt konvergent?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/10}}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}, \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/n}}.$$

26. Welche von diesen Eigenshaften (A) Nichtnegative Termen, (B) konvergent, (C) uneigentlich-konvergent, (D) absolut konvergent, haben die folgende Reihen?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\cos n + 2^n}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-7)^n}{n!}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}, \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

5 Elementäre Funktionen

27. Seien die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : (-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ so definiert

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \lfloor x \rfloor x, \quad h(x) = |-x|$$

und sei $C = [0,1]$. Finden Sie die folgenden Mengen

$$f(C),\ g(C),\ h(C), f^{-1}(C),\ g^{-1}(C),\ h^{-1}(C),\ f(h(C)),\ g(h(C)),\ h^{-1}(f(C)),\ f(g(h(C))).$$

28. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie den folgenden Satz

$$f \text{ konstant} \iff f \text{ monoton wachsend und monoton fallend.}$$

29. Seien f, $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Sätze
   (a) f und g monoton wachsend $\Rightarrow fg$ monoton wachsend,
   (b) fg monoton $\not\Rightarrow f$ monoton und g monoton.

30. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch. Zeigen Sie das Folgendes
   (a) die Funktion $f \circ h$ ist periodisch,
   (b) die Funktionen $g \circ g$ und g^3 sind monoton,
   (c) die Funktionen $g \circ h$, $h \circ g$ und g^2 können nicht monoton sein.

31. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig. Zeichnen Sie den Graph der folgenden Funktionen

$$g : x \mapsto 2^{f(x)}, \quad h : x \mapsto \ln(1 + |f(x)|), \quad \ell : x \mapsto |f(|x|)|, \quad m : x \mapsto f(f(x)).$$

32. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz mit Konstante $L > 0$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ α-Hölder mit Konstante $M > 0$. Zeigen Sie, dass
   (a) $f \circ f$ Lipschitz mit Konstante L^2 ist,
   (b) $g \circ g$ (2α)-Hölder mit Konstante $M^{1+\alpha}$ ist,
   (c) $g \circ f$ α-Hölder mit Konstante $L^\alpha M$ ist.

6 Stetigkeit

33. Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = 0$ sind:

$$f_1(x) = \sqrt{x^+}, \quad f_2(x) = |x| \arctan(x), \quad f_3(x) = e^{|x|-1}$$
$$f_4 = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad f_5(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

34. Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen $g_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig sind:

$$g_1(z) = \overline{z}, \quad g_2(z) = e^{3i\pi} z, \quad g_3(z) = |z|^2 - z\overline{z},$$
$$g_4(a+ib) = \begin{cases} \dfrac{a^4}{a^2+b^2} & a+ib \neq 0 \\ 0 & a+ib = 0 \end{cases}, \quad g_5(a+ib) = \begin{cases} \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} & a+ib \neq 0 \\ 0 & a+ib = 0 \end{cases}.$$

35. Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann $\exists x \in [0,1]$, so dass $f(x) = x$. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

36. Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ monoton wachsend. Dann $\exists x \in [0,1]$, so dass $f(x) = x$. (Hinweis: betrachten Sie den Punkt $\sup\{x \in [0,1] \,:\, f(x) \geq x\}$)

37. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) $f \in C^0([0,1]),\ f(0)f(1) \geq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = 0.$
    (b) $f \in C^0([0,1]),\ f(0)f(1) \leq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in (0,1),\ f(x) = 0.$
    (c) $f \in C^0([0,1]),\ f(0)f(1) \leq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = 0.$
    (d) $f \in C^0([0,\infty)),\ f(0) \cdot \lim_{x\to\infty} f(x) < 0 \ \Rightarrow\ \exists x > 0,\ f(x) = 0.$
    (e) $f \in C^0(\mathbb{R})$ und periodisch $\Rightarrow$ f beschränkt.
    (f) $f \in C^0(\mathbb{R})$ und periodisch $\Rightarrow$ f hat unendliche viele Maximumstellen.

38. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f = 0$ in $\mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass $f = 0$.

39. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) + \ln(\mathrm{e} + x) & x > 0 \\ \sin(x) + \alpha \sinh(x^3) - 4\alpha^2 + 2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Sei $A := \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ stetig in } 0 \text{ ist}\}$. Wie viel ist $2\sup A - 6\inf A$.

7 Grenzwerte von Funktionen

40. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x-1}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x-2}.$$

41. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^3-1}{x}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-1}.$$

42. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to0} \frac{x}{|x|}.$$

43. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1+} \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+1}{\ln x^3 - x^3}.$$

44. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\exp\left(1-\cos\left(\sin\left(\frac{x^2}{100^{100}-x^4}\right)\right)\right)\right), \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x.$$

8 Differentiarechnung

45. Berechnen Sie die Ableitung in $\mathbb{R}$ der foldenden Funktionen

$$\text{(a) } x \mapsto x^2\sin(x^3), \quad \text{(b) } x\mapsto \ln(1+x^2), \quad \text{(c) } x\mapsto e^{\cos(x^2)}, \quad \text{(d) } x\mapsto \arctan(\arctan(x)).$$

46. Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differentierbar sind, und berechnen die Ableitung

$$\text{(a) } x\in\mathbb{R}\mapsto x^{1/3}, \quad \text{(b) } x\in\mathbb{R}\mapsto \ln(1+|x|), \quad \text{(c) } x\in\mathbb{R}\mapsto x^+\sin x, \quad \text{(d) } x\mapsto \arctan(|x|).$$

47. Zeigen Sie, dass die funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Ist f' stetig?

48. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie die Ableitung von

$$\text{(a) } x\mapsto f(x^2), \quad \text{(b) } x\mapsto f(x)-f(-x), \quad \text{(c) } x\mapsto \sin(f(x)), \quad \text{(d) } x\mapsto e^{f(f(x))}.$$

49. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so gegeben: $f(x) = x^2\arctan(1+x)+\sin(x^3)+(x-1)^3$ und sei $y=g(x)$ die Gleichung, die die Tangente zum Graf von f im Punkt $(0,0)$ definiert. Berechnen Sie $g(2)$ und $g'(0)$.