Übungen zu Partielle Differentialgleichungen, WS 2016

Ulisse Stefanelli

30. Januar 2017

1 Beispiele

1. Betrachten Sie die Beispiele von nichtlinearen PDG und Systemen, die wir im Kurs diskutiert haben, und sagen welche homogen bzw. inhomogen, und linear, semilinear, quasilinear, bzw. nicht quasilinear sind.

2. Stellen Sie Beispiele von PDGn vor:
   (a) Linear, zweiter Ordnung, inhomogen,
   (b) Quasilinear, dritter Ordnung, homogen,
   (c) nicht quasilinear, zweiter Ordnung, inomogen.

3. Stellen Sie Beispiele von PDGn vor:
   (a) Eine PDG dritter Ordnung ohne Lösungen,
   (b) Eine PDG zweiter Ordnung mit unendlichen vielen Lösungen,
   (c) Eine PDG erster Ordnung mit abzählbaren vielen Lösungen.

4. Suchen Sie eine bekannte PDG (d.h. mit Namen) im Netz und klassifizieren Sie sie.

2 Die lineare Transportgleichung

5. Lösen Sie die Gleichung $u_t + 2u_x = 3$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ unter der Bedingung $u(x, 0) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

6. Lösen Sie die Gleichung $u_t - u_x = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ unter der Bedingung $u(0, t) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

7. Sei $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit kompaktem Träger der Gleichung $u_t + b \cdot \nabla u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ für $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Beweisen Sie, dass $u = 0$.

8. Sei $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit kompaktem Träger der Gleichung $u_t + b \cdot \nabla u = f$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ für $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $f \in C^\infty$. Stimmt es, dass $u = 0$?

9. Sei $u(x,t) = (1 - |x-t|)^+$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist u eine klassische Lösung von $u_t + u_x = 0$? In welchem Sinn löst u die Gleichung?

10. Sie $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $u_t + u_x = 0$ mit $u(0,t) = u(1,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ periodisch ist. Ist $t \mapsto u(x,t)$ konstant für alle bzw. manche $x \in \mathbb{R}$?

11. Finden Sie die Lösung des Problems
$$u_t + u_x = 1 \text{ in } \{x + t > 0\}, \quad u(x,t) = \sin x \text{ auf } \{x + t = 0\}.$$

12. Finden Sie die Lösung des Problems
$$u_t + 2tx\, u_x = 0 \text{ in } \{t > 0\}, \quad u(x,0) = \sin x \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

13. Finden Sie die Lösung des Problems
$$x_2 u_{x_1} + u_{x_2} = u \text{ in } \{x_2 > 0\}, \quad u(x_1,0) = g(x_1) \;\; \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

3 Partielle Differentialgleuchungen erster Ordnung

14. Lösen Sie das Problem
$$u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 \text{ in } \{x_2 > 0\}, \quad u(x_1,0) = -x_1 \;\; \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

15. Lösen Sie das Problem
$$x_1 u_{x_1} + u\, u_{x_2} = 0 \text{ in } \{x_1 > 1\}, \quad u(1,x_2) = x_2 \;\; \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

16. Lösen Sie das Problem
$$u_{x_1} + u\, u_{x_2} = 0 \text{ in } \{x_1 > 0\}, \quad u(0,x_2) = x_2 \;\; \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

17. Lösen Sie das Problem
$$u^2 u_{x_1} - u^2 u_{x_2} = 0 \text{ in } \{x_1 > 0\}, \quad u(0,x_2) = x_2 \;\; \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$
Hat die Gleichung Lösungen bzw. starke Lösungen, die die Bedingung nicht erfüllen?

4 Partielle Differentialgleuchungen zweiter Ordnung

18. Finden Sie die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, wo die Gleichung
$$y u_{xx} - 2u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$$
elliptisch, parabolisch, bzw. hyperbolisch ist.

19. Sei $u = u(x_1, x_2)$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{x_1x_1} = u_{x_2x_2}$ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $v(x_1, x_2) = u(x_2, x_1)$, $w(x_1, x_2) = u(1, x_1 - x_2)$ und $z(x_1, x_2) = u(x_1 - x_2, x_2 - x_1)$ die Wellengleichung in $\mathbb{R}^2$ lösen.

20. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$u + \Delta u = 0 \tag{1}$$
Rotation-invariant ist (d.h. die Gleichung bleibt unverändert, wenn man eine Rotation der Koordinaten betrachtet). Klassifizieren Sie alle Rotation-invariante Gleichungen der zweiten Ordnung.

21. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Klassifizieren Sie folgende Gleichungen
$$\text{(a)} \ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(i+1)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{(b)} \ \sum_{i=1}^{n} (1+(-1)^i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$
$$\text{(c)} \ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{(d)} \ \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

5 Die Laplace Gleichung

22. Finden Sie alle harmonische Polynome der dritten Ordnung in zwei Dimensionen.

23. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ *subharmonisch*, d.h. $-\Delta u \leq 0$. Zeigen Sie, dass:
$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y \quad \forall B_r(x) \subset\subset \Omega.$$
Wie ändert sie sich die Aussage, falls u *superharmonisch* ist, d.h. $-\Delta u \geq 0$?

24. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch. Zeigen Sie, dass
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$
Wie ändert sie sich die Aussage, falls u superharmonisch ist?

25. Seien $B := B_1(0) \in \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ die Lösung des Dirichlet-Problems
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \ \ B, \\ u(x) &= x \cdot e_1 \quad \text{auf} \ \ \partial B, \end{aligned}$$
wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Ohne u zu berechenen, bestimmen Sie den Wert $u(0)$ sowie den Maximumwert von u in $\overline{B}$.

26. (Vergleichsprinzip) Seien u und v harmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und stetig bis zum Rand. Zeigen Sie, dass
$$u \leq v \quad \text{auf} \ \ \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u \leq v \quad \text{in} \ \ \overline{\Omega}.$$

27. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ superharmonisch und nicht negativ mit $u(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $u = 0$.

28. Seien $B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$ und $u, h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ sodass $\Delta u \geq 0 = \Delta h$ in B, $u \leq h$ in ∂B und $u \geq 0 = h(0)$ in B. Welchen Wert hat $u(1, 0, \ldots, 0)$?

29. Seien u harmonisch und v subharmonisch in $\mathbb{R}^2$. Zu zeigen ist
    (a) $v \leq 2$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^4 = 1\} \Rightarrow v(0, 0) \leq 2$,
    (b) $v > 0$ und $\varepsilon > 0 \Rightarrow v^{1+\varepsilon}$ subharmonisch,
    (c) u konvex $\Rightarrow u$ affine,
    (d) $u(x + 1, y) = u(x, y + 2) = u(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow u$ konstant.

6 Die Wärmeleitungsgleichung

30. Sei u kalorisch in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ und h harmonisch in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende
    (a) $v(x, t) = u(-x, t)$, $w(x, t) = h(x)$ und $y(x, t) = u(Rx, t)$ sind kalorisch, wobei R eine beliebige Rotation ist,
    (b) $z(x, t) = u(x, -t)$ ist nicht unbedingt kalorisch,
    (c) z von Punkt (b) kalorisch und beschränkt $\Rightarrow u$ konstant.

31. Finden Sie alle kalorische Polynome der dritten Ordnung in $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

32. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Finden Sie eine kalorische Funktion u in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sodass $u(x, t) = f(t - b \cdot x)$ kalorisch in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gewisse, nicht-konstante Funktion ist.

33. Sei u kalorisch in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Finden Sie $\beta > 0$, sodass für alle $\lambda > 0$ die Funktion $v(x, t) = u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ kalorisch in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ ist. Dann, finden Sie eine kalorische Funtion in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ der Form $(x, t) \mapsto f(xt^{-1/2})$.

34. Seien u kalorisch in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ und $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$. Sei $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ ein lokaler Minimumpunkt von $w - u$. Zeigen Sie, dass $w_t(x_0, t_0) - \Delta w(x_0, t_0) \leq 0$.

35. Seien u und v kalorisch in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $u \leq v$. Zeigen Sie, dass $u(0, 0) = v(0, 0) \Rightarrow u = v$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$.

36. Sei $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kalorisch. Zeigen Sie folgendes: e^u kalorisch $\Leftrightarrow u$ konstant.

37. Sei u die Lösung des Cauchy-Problems
$$u_t - u_{xx} = 0 \ \text{ in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \quad u(x, 0) = g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$
    wobei $g \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie folgende:
    (a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_\varepsilon > 0 \ \forall t > t_\varepsilon : \ \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) < \varepsilon$
    (b) falls $g \geq 0$, $\forall t > 0 : \ \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) = 0$.

7 Die Wellengleichung

38. Lösen Sie das Problem $u_{tt} = u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, $u(x, 0) = \cos(x) + 1$ für $\pi < |x| < 3\pi$, $u(x, 0) = 0$ sonst, und $u_t(\cdot, 0) = 0$. Zeichnen Sie die Lösung.

39. Sei $u \in C^2$ die Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ mit $u(x, 0) = g(x)$ und $u_t(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass
$$\forall R > 0 \, \exists t_R > 0 : (|x| \leq R, t \geq t_R \Rightarrow u(x, t) = 0).$$

40. (Vergleichsprinzip?) Seien u und v Lösungen der Wellengleichung in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ mit $u_t(\cdot, 0) = v_t(\cdot, 0)$ und $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$. Zeigen Sie, dass $u(x, t) \leq v(x, t)$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Gilt dann das Vergleichsprinzip für die Wellengleichung?

41. Sei $u \in C^2$ die Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ mit $u(x, 0) = g(x)$ und $u_t(x, 0) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und g, $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass
    (a) $s \in (0, +\infty) \mapsto \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x, s) + u_x^2(x, s) \, \mathrm{d}x$ konstant ist,
    (b) $s^* > 0$ existiert, sodass $\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x, s) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, s) \, \mathrm{d}x$ für alle $s > s^*$.

42. Sei $u \in C^3(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ mit $\nabla u(\cdot, 0) = \nabla u_t(\cdot, 0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\nabla u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

    [Lösung: für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ löst die Ableitung $v = \partial u / \partial x_i$ die Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ (einfach die Wellengleuchung für u durch x_i ableiten). Ferner $v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Gemäß dem Einflussbereich-Satz, hat man $v = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Deshalb ist $\nabla u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.]

43. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ mit $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 1$ für alle $|x| \leq 3$. Welchen Wert hat $u(0, 2)$?

    [Lösung: die Funktion $v(x, t) = u(x, t) - t - 1$ löst die Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ und hat $v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$ für alle $|x| \leq 3$. Gemäß dem Einflussbereich-Satz, hat man $v(0, 2) = 0$. Somit ist $u(0, 2) - 2 - 1 = 0$ und $u(0, 2) = 3$.]