Aufgabensammlung
Gewöhnliche Differentialgleichungen 1

R. Steinbauer

Sommersemester 2005

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für das *Proseminar zu Gewöhnliche Differentialgleichungen 1,* das die gleichnamige Vorlesung begeleitet. Das Proseminar und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloss die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. im Proseminar ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe kann daher nur auf der Basis beider Veranstaltungen entstehen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepaßt; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen" (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (Ein Überblick über die Literatur wird in der Vorlesung gegeben) und/oder Gruppenarbeit.

0 Vorbemerkungen—Zur Einstimmung

1. *Bakterienwachstum—Cholera*
   Die Seuche Cholera wird durch den Virus *Vibrio cholerae* hervorgerufen (der von *Robert Koch* (1843–1910; Nobelpreis f. Medizin 1905) entdeckt wurde). Zum Zeitpunkt t_0 wird eine Kolonie dieser Bakterien in eine Nährlösung eingebracht. Eine halbe Stunde später besteht sie aus 329 Mitgliedern und eine Stunde darauf aus 2684.

   Wie groß ist die Verdoppelungszeit der Bakterienkultur? Wie groß ist die Kolonie 5 Stunden nach Beginn des Experiments?

2. *Radioaktiver Zerfall*
   Die Atomkerne einiger chemischer Elemente (Uran, Plutonium, ...) zerfallen spontan. Obwohl für keinen einzigen instabilen Atomkern vorausgesagt werden kann, wann genau er zerfällt, kann der Zerfallsprozeß einer genügend großen Anzahl N von Kernen durch die Differentialgleichung

   $$N'(t) = -\alpha N(t)$$

   modelliert werden. Hier ist α (> 0) die stoffabhängige Zerfallskonstante.

Die Zeit τ, in der von einer bestimmten Stoffmenge die Hälfte zerfällt heißt *Halbwertszeit.* (Sie kann einige Sekundenbruchteile (Pt^{212}) oder etliche Milliarden Jahre (U^{238}) betragen.)

(a) Zeige, dass die Halbwertszeit unabhängig von der Anfangsmenge der radiokativen Substanz ist.

(b) Drücke die Zerfallskonstante α durch die Halbwertszeit τ aus.

(c) Das bei Atombombenversuchen freigesetzte Kobaltisotop hat eine Halbwertszeit von 5.3 Jahren. Berechne nach wievielen Jahren nur mehr 10% bzw. 1% der ursprünglich freigesetzten Menge vorhanden ist.

(d) Vergleiche Aufgabe 1 mit Aufgabe 2. Was fällt dir auf?

3. *Kriegslust*
In einem Land mit N Einwohnern propagieren zum Zeitpunkt t (> 0) genau $K(t)$ energisch einen gewissen Krieg. L. F. Richardson hat 1948 für die Ausbreitung der Kriegslust das Modell

$$\frac{dK}{dt} = \lambda K(N-K) \qquad (\lambda > 0 \text{ eine Konstante})$$

vorgeschlagen.

(a) Zeige, dass der Bruchteil $k(t) := K(t)/N$ an Kriegstreibern die Differentialgleichung

$$k' = \mu k(1-k) \qquad (\mu > 0 \text{ eine Konstante})$$

erfüllt.

(b) Zeige, dass

$$k(t) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{k_0} - 1)e^{-\mu t}} \quad \text{mit} \quad k_0 = k(0)$$

die ODE in (3a) löst.

(c) Angenommen 5% der Bevölkerung eines Landes befürworten einen Krieg und beginnen kriegstreiberische Propaganda. Nach einem Monat sind weitere 5% auf Seite der Kriegstreiber gewechselt. Welcher Anteil der Bevölkerung befürwortet nach einem halben Jahr den Krieg?

4. *Differentialgleichungen in den Analysis-Lehrveranstaltungen*
Nimm deine Lieblings-Analysis-Quelle (Mitschrift, Skriptum, Buch, etc.) zur Hand und sieh nach, ob sie einen Abschnitt über gewöhnliche Differentialgleichungen enthält. Was wird dort—grob gesagt—gemacht?

5. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
   Nimm obige Quelle(n) zur Hand und schlage den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nach. Bereite ein 5-minütiges Minireferat etwa mit folgendem Inhalt vor: Idee, (eine) genaue Formulierung, Beweisidee.

   Was hat das mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun?

6. *Fallgesetze*
   In der klassischen Mechanik wird die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m längs der x-Achse durch die Differentialgleichung (oft Bewegungsgleichung genannt)

   $$m\ddot{x}(t) = f(t, x, \dot{x})$$

   modelliert (vgl. Vo. 0.7) , wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sog. Ortsfunktion ist, t die Zeit und $f(t, x, \dot{x})$ die Kraft, die zum Zeitpunkt t auf einen Massenpunkt im Ort x mit Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ wirkt.

   (a) *Freier Fall:* Der Massenpunkt fällt (aus geringer Höhe) nur unter Einfluß der Schwerkraft; i.e., $f(t, x, \dot{x}) = mg$, wobei $g = 9.81ms^{-2}$ die Erdbeschleunigung ist. Welchen Weg x hat der Körper zur Zeit t zurückgelegt, falls er zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit Geschwindigkeit $v(0) = 0$ am Ort $x(0) = 0$ (also aus der Ruhelage) startet. Wie lautet die Lösung des Anfangswertprobelms mit $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$?

   (b) *Verzögerter Fall:* Wir berücksichtigen nun zusätzlich den Luftwiderstand und wählen $f(t, x, v) = mg - \rho v$, wobei die Konstante ρ Widerstandskoeffizient genannt wird und bearbeiten das Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

   Nach Lust und Laune resp. Vorwissen und Ausdauer entweder
   • Zeige, dass die Funktion

   $$x(t) = \frac{m}{\rho}\big(v_0 - \frac{mg}{\rho}\big)\left(1 - e^{-\rho t/m}\right) + \frac{mg}{\rho}t$$

   das Anfangswertproblem löst. Brerechne den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} v(t)$; was bedeutet das physikalisch?
   oder
   • Leite die Lösung der Gleichung her. (*Hinweis:* Fasse die ODE zunächst als Gleichung erster Ordnung für v auf; diese ist vom Typ $\dot{v} = \alpha v + \beta$ und wird durch $v(t) = Ce^{\alpha t} - \beta/\alpha$ gelöst, wobei α und β Konstanten sind. Dann integriere v um die Lösung x der Bewegungsgleichung zu erhalten.)

1 Erste Beispiele

7. *Wahl des Anfangszeitpunkts*
   Beweise die in der Bemerkung in 1.4 gemachte Aussage, dass für das Anfangswertproblem
   $$x'(t) = ax(t), \qquad x(t_0) = x_0$$
   die Wahl von $t_0 = 0$ keine Einschränkung der Allgemeinheit ist. (*Hinweis:* Ist x eine Lösung mit $x(0) = x_0$, dann ist $u(t) := x(t - t_0)$ Lösung mit $u(t_0) = ...$)

8. *Allgemeine Lösung vs. Anfangswertproblem*
   Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
   $$x' = ax + 3,$$
   wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

   Was sind die Gleichgewichtspunkte dieser Differentialgleichung? Für welche Werte von a handelt es sich dabei um Quellen resp. Senken?

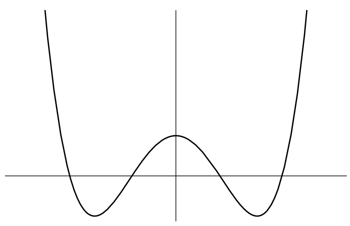
   Löse das Anfangswertproblem für $x(0) = 0$.

9. *Allgemeine Lösung 1*
   Betrachte die lineare, nichtautonome Differentialgleichung 1. Ordnung
   $$x' = a(t)x \qquad \text{wobei } a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ eine gegebene Funktion ist.}$$
   Finde eine Formel für die Lösung der Gleichung (*Hinweis: Trennung der Variablen.*) und zeige, dass diese Formel schon die allgemeine Lösung angibt.

10. *Allgemeine Lösung 2*
    Gegeben ist die lineare, nichtautonome Differentialgleichung erster Ordnung
    $$x' = ax + f(t),$$
    wobei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fix gewählt sind. Sei $y(t)$ eine Lösung dieser Gleichung. Zeige, dass die allgemeine Lösung von der Form $y(t) + ke^{at}$ ist.

11. *Richtungsfeld, Lösungskurven, Phasenlinie 1*
    Skizziere für die folgenden Differentialgleichungen die Richtungsfelder und die Löungskurven, finde alle Gleichgewichtslösungen und bestimme, ob es sich dabei um Quellen oder Senken handelt und skizziere die Phasenlinien.

    (a) $x' = x - x^3$
    (b) $x' = x^3 - 3x$
    (c) $x' = \cos x$
    (d) $x' = |1 - x^2|$



12. *Richtungsfeld, Lösungskurven, Phasenlinie 2*
    Betrachte die Differentialgleichung $x' = f(x)$, wobei der Graph von f obige Gestalt hat. Skizziere Richtungsfeld, Lösungskurven und Phasenlinie.

13. *Bifurkationsdiagramm*
    Erstelle das Bifurkationsdiagramm der (ein-Parameter-Familie von) gewöhnlichen Differentialgleichung(en)
    $$x' = g_a(x) = x^2 - ax = x(x-a).$$

2 Erster Überblick

14. *Klassifikation von Differentialgleichungen 1*
    Klassifiziere die folgenden (Systeme von) Gleichungen.
    (a) $y'(x) + 2y(x) = x^2 - 1$
    (b) $\dot{x}^2 + 2x = 0$
    (c) $y(t)^2 + t^2 = 0$
    (d) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = f(x,y)$
    (e) $\dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)),\ \dot{y}(t) = y(t)(-c + dx(t)),\ (a,b,c,d \geq 0)$

15. *Lineare Differentialgleichungen 1*
    Welche der folgenden Gleichungen ist linear?
    (a) $y'(x) = \sin(x)y + \cos(y)$
    (b) $y'(x) = \sin(y)x + \cos(x)$
    (c) $\dot{x}(t) = \sin(t)x + \cos(t)$

16. *Lineare Differentialgleichungen 2*
    Was ist die allgemeinste Form einer linearen ODE 2. Ordnung? Verallgemeinere dies auf k-te Ordnung und auf Systeme (arbeite also Definition 2.6.(ii) aus).

17. *Umschreiben von Gleichungen höherer Ordnung auf Systeme 1. Ordnung*
    Transformiere die folgenden (Systeme von) ODEs auf 1. Ordnung.

(a) $\ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x$
Kann das System in Matrixform geschrieben werden?

(b) $\ddot{x} = -y,\ \ddot{y} = x - z,\ \ddot{z} = -z$
Dieses System ist linear. Gilt das auch für das entsprechende System 1. Ordnung? Ist das immer der Fall?

18. *Umschreiben nicht-autonomer Gleichungen auf Systeme autonomer Gleichungen*
Das Verfahren aus obiger Aufgabe resp. 2.8. in der Vorlesung kann sinngemäß auch dazu verwendet werden, um nicht-autonome Gleichungen/Systeme in autonome Form zu bringen, indem die unabhängige Variable t zu den abhängigen Variablen hinzu genommen wird.

Führe dies explizit für die Gleichung $\dot{x}(t) = t^2 - x$ und dann für das System 1. Ordnung $x'(t) = f(t, x)$ durch.

19. *Trennung der Variablen*
Löse die folgenden ODEs. Was kann i.a. über die Lösung (Existenz, Eindeutigkeit) gesagt werden, was hier in den einzelnen Fällen?

(a) $x' = x^3$

(b) $\dot{y} = \sin(t)y$

(c) $\dot{x} = g(t)\tan(x)$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

20. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung—Allgemein*
Ziel der nächsten Aufgaben ist es die Existenztheorie der "allgemeinen lineare Differentialgleichung 1. Ordnung" umfassend zu behandeln—also Bemerkung 2.19. aus der Vorlesung genauer auszuarbeiten. Hast du bei einer der Aufgaben Probleme, so wird dir ein Blick in fast jedes Buch über Gewöhnliche Differentialgleichungen weiterhelfen.

Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

wobei $x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b : \ I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und I ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$ ist.

(a) *Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (*$b = 0$*).*
Beweise den folgenden Satz:
Ist $b = 0$, so ist jede Funktion der Form

$$x(t) = C\, e^{A(t)},$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist und $C \in \mathbb{R}$ beliebig eine Lösung der Differentialgleichung (1).
Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1), (2) ist durch

$$x(t) = x_0\, e^{A(t)-A(t_0)}$$

gegeben.
Hinweis: Beim Existenzteil kannst du entweder nachweisen, dass die Angegebene Formel eine Lösung ist oder den etwas anspruchsvolleren Weg wählen die Lösung mittels "Trennung der Variablen" abzuleiten. Für die Eindeutigkeit orientiere dich an 1.3 aus der Vorlesung.

(b) *Allgemeine und partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.* Zeige, dass die Differenz $y_1(t) - y_2(t)$ zweier Lösungen y_1, y_2 der Gleichung (1) die homogene Gleichung also (1) mit $b = 0$ erfüllt. *Hinweis:* In der Literatur wird dieser Sachverhalt meist wie folgt formuliert: Haben wir eine spezielle (die sog. partikuläre) Lösung von (1) gefunden, so gewinnen wir die allgemeine Lösung von (1) durch Addieren der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Versuche diese Aussage geeignet zu interpretieren.

(c) *Herleitung einer partikulären Lösung—Variation der Konstanten.* Setze den "Ansatz" $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ in die Differentialgleichung (1) ein, um eine Differentialgleichung für die Funktion C zu gewinnen. Diese läßt sich durch Integration lösen (vgl. §2.2.1 in der Vorlesung). Versuche C möglichst explizit anzugeben.

(d) *Existenzsatz*
Fasse deine Ergebnisse aus den Punkten (a)-(c) im/in (d)einem Existenzsatz für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung zusammen.

21. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung—ein explizites Beispiel*
Betrachte die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x' = (\sin t)x + \sin t.$$

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(b) Bestimme mittels "Variation der Konstanten" eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Gib die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an.

22. *Lokale vs. globale (Nicht-)Eindeutigkeit*
Auf $\mathbb{R}^2$ betrachte die ODE

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|}.$$

(a) Finde *alle* Lösungen der Gleichung und stelle diese graphisch dar. (*Hinweis:* Da mit y auch $z(x) = -y(-x)$ eine Lösung ist, genügt es die Trennung der Variablen für positive Lösungen durchzuführen. Insgesamt eregeben sich neben der trivalen Lösung also die positiven und die negativen Lösungen; diese können beliebig gestückelt werden. (Beweis!))

(b) Fertige eine Skizze an. Wieviele Lösungen gibt es durch den Punkt $(-1,-1)$, wieviele durch den Punkt $(-1,0)$? Worin besteht der Unterschied in bezug auf die Eindeutigkeit?

23. *Einmünden in konstante Lösungen und Eindeutigkeit*

(a) Im Setting und in der Notation von Satz 2.16 gelte $g(x_0) = 0$, $g(x) \neq 0$ auf $x_0 - \eta \leq x < x_0$ (mit $\eta > 0$) und

$$\int\limits_{x_0-\eta}^{x_0} \frac{ds}{g(s)} \qquad \text{sei divergent.}$$

Zeige, dass dann keine Lösung existiert, die „von unten" in die konstanten Lösung $x(t) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ einmündet. (*Hinweis:* Indirekt.)

(b) Natürlich gilt ein analoges Resultat mit $x_0 < x \leq x_0+\eta$ für das Einmünden „von oben". Benütze dieses und (a) um eine Eindeutigkeitsaussage zu formulieren.

24. *Nochmals Eindeutigkeit—konkret*

(a) Zeige, dass die Lösungen der Gleichung aus (19a) eindeutig sind.

(b) Zeige, dass die Integralbedingung aus (23a) im Fall der ODE aus Aufgabe 22 verletzt ist. (Tritt die Nicht-Eindeutigkeit also zwingend auf?)

(c) Löse die ODE

$$x'(t) = -t\ \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x(t)|} \qquad \text{(sgn die Signum- oder Vorzeichenfunktion)}$$

Diskutiere die folgenden Punkte

- Die Integralbedingung aus (23a) ist verletzt.
- Das Anfangswertproblem mit $x(t_0) = x_0$ ist für alle $x_0 \neq 0$ nicht nur lokal eindeutig lösbar (das garantiert ja schon Satz 2.16), sondern auch global.
- Im Fall $x_0 = 0$ existieren unendlich viele Lösungen falls $t_0 \neq 0$; für $t_0 = 0$ ist das AWP (sogar global) eindeutig lösbar.

25. *Blow up*
Betrachte die ODE

$$x' = e^x \sin t.$$

Zeichne das Richtungsfeld, finde alle Lösungen und stelle sie graphisch dar. Was läßt sich über das Existenzintervall der Lösungen sagen? Was passiert mit Lösungen mit Anfangswert in der Nähe von $x(0) = -\log 2$?

26. *Explizit lösbare Typen von ODEs 1*
Bestimme den Typ der Differentialgleichung (Vo. §2.3) und löse sie (mit Mathematica oder Papier und Bleistift).

(a) $y'(x) = -\dfrac{4x + 3y - 1}{3x + 4y + 1}$

(b) $y'(x) - y = \dfrac{e^x}{y}$

(c) $u'(x) = (1 - 2x^2) + xu + u^2$ (*Hinweis:* Die identische Funktion ist eine Lösung.)

27. *Explizit lösbare Typen von ODEs 2*
Löse die folgenden ODEs (wieder: Mathematica oder Papier und Bleistift).
(a) $y'(x) + \frac{2}{3}xy = xy^4$
(b) $y'(x) = x - 1 + y - xy^2$
(c) $xyy' = -(x^2 + y^2)$

28. *Exakte Differentialgleichungen*
Eine Differentialgleichung der Form
$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$
wobei P und Q stetig differenzierbar auf einem Rechteck $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1 \leq y \leq y_2\}$ sind heißt *exakt*, falls die *Integrabilitätsbedingungen*
$$P_y := \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} =: Q_x$$
gelten.
(a) Zeige, dass dann eine *Stammfunktion* φ existiert (i.e. eine Funktion φ mit $\varphi_x = P,\ \varphi_y = Q$) und gib eine Interpretation in Termen von Vektorfeldern.
(b) Zeige, dass die Lösungen $y(x)$ der exakten Differentialgleichung genau diejenigen diffenzierbaren Funktionen $y(x)$ sind, für die $\varphi(x, y(x))$ auf einem gewissen Intervall konstant ist.
(c) Löse das AWP
$$12xy + 3 + 6x^2y'(x) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

29. *Integrierende Faktoren*
Ist eine ODE der Form $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ nicht exakt, so können wir versuchen eine Funktion $M : R \to \mathbb{R}$ zu finden, sodass
$$M(x, y)P(x, y) + M(x, y)Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$
exakt ist. Ein solches M heißt *integrierender Faktor*.
(a) Finde eine notwendige Bedingung an den integrierenden Faktor M. Warum ist diese schwierig zu erfüllen?

(b) Wie sieht die Bedingung für integrierende Faktoren der Form $M = M(x)$ aus? Löse die ODE $(3xy^2 + y^2) + (2xy)y' = 0$.

(c) Löse die ODE $(5x^2y - 6y^4) + (4x^3 - 14xy^3)y' = 0$ (*Hinweis:* Versuche es mit einem integrierenden Faktor der Form $M(x, y) = x^p y^q$.)

3 Existenztheorie

30. *Lipschitz-Stetigkeit*

(a) Beweise alle Aussagen in Bemerkung 3.4 der Vorlesung. Genauer sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Belege die folgende Kette von Aussagen mit Beweisen resp. Gegenbeispielen

$$f \text{ Lipschitz stetig } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ gleichmäßig stetig } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ stetig.}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen Lipschitz stetig in einer Umgebung von $x = 0$? Wenn ja, gib eine Lipschitzkonstante an.

i. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

ii. $f(x) = |x|^{1/3}$

iii. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (stetig ergänzt bei $x = 0$ mittels $f(0) = 0$)

31. *Picard Iteration*
Führe für folgende (Systeme von) ODEs die Picard-Iteration durch. Berechne explizit die ersten 5 Glieder der Iterationsfolge (Verwendung von Mathematica erwünscht!) und gib eine explizite Dastellung der Folge an. Konvergiert die Folge? Konvergiert sie gegen die Lösung?

(a) $x' = x,\ x(0) = x_0$

(b) $x' = \cos(x),\ x(0) = 0$

(c) $y' = x^2 + xy^2,\ y(0) = 0$

(d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $x'(t) = f(t, x),\ x(0) = 0$, wobei f die auf dem „Rechteck" $Q = \{(t, y) :\ |t| \leq 1,\ |x| \leq 1\}$ definierte Funktion

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & t = 0,\ |x| \leq 1 \\ 2t & 0 < |t| \leq 1,\ -1 \leq x < 0 \\ 2t - 4\frac{x}{t} & 0 < |x| \leq 1,\ 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & 0 < |t| \leq 1,\ t^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ist. (*Hinweis:* f ist stetig, erfüllt aber keine Lipschitzbedingung.)

32. *Der Existenzsatz von Peano*
Beweise den Existenzsatz von Peano (Thm. 3.12) gemäß der Beweisskizze 3.15.

33. *Euler-Cauchy Iteration*
Betrachte das Anfangswertproblem
$$x'(t) = t^2 + x(t), \qquad x(0) = 1.$$
Berechne gemäß dem Euler-Chauchy Verfahren einen Näherungswert für die Lösung im Punkt $t = 1$ bei einer Schrittweite von $1/5$ (also $x_5(1)$ in der Notation von Thm. 3.12).
Vergleiche diesen Wert mit dem der tatsächlichen Lösung im Punkt $t = 1$. Wie groß ist der relative Fehler?

34. *Euler-Cauchy vs. Picard*
Betrachte nochmals das Anfangswertproblem
$$x'(t) = x, \qquad x(0) = 1.$$
    (a) Berechne gemäß dem Euler-Cauchy Verfahren einen Näherungswert für die Lösung im Punkt $t = 1$ bei einer Schrittweite von $1/4$ (also $x_4(1)$ in der Notation von Thm. 3.12).
    (b) Berechne unter Zuhilfenahme der Picard-Iteration der Ordnung 4 (Aufgabe 31) einen Näherungswert für die Lösung im Punkt $t = 1$.
    (c) Vergleiche die Ergebnisse aus (a) und (b) mit dem tatsächlichen Wert der Lösung im Punkt $t = 1$.

35. *Abschätzung für die Existenzzeit 1*
Betrachte das Anfangswertproblem
$$x' = x^2, \qquad x(0) = 1.$$
Versuche durch geschickte Wahl von α und β ein möglichst großes h im Satz von Picard-Lindelöf zu erreichen. Vergleiche dieses mit dem max. Existenzintervall der Lösung (vgl. Bsp. 2.21).

36. *Abschätzung für die Existenzzeit 2: Eliminieren der Lipschitzkonstante*
Die Bedingung $h \leq 1/(2L)$ kann aus dem Satz von Picard-Lindelöf eliminiert werden. Genauer zeige, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Lösung (sogar) auf $(t_0 + \tilde{h}, t_0 + \tilde{h})$ mit $\tilde{h} = \min(\alpha, \beta/M)$ existiert. (*Hinweis:* Überzeuge dich zunächst davon, dass im Beweis aus der Vorlesung die fragliche Abschätzung $h \leq 1/(2L)$ nur im letzten Beweisschritt (T ist Kontraktion auf A) eingeht. Ersetze nun diesen Beweisschritt indem du ohne Verwendung der fraglichen Abschätzung zeigst, dass T bzgl. der zur $||\,||_\infty$-Norm äquivalenten Norm (sic!)
$$||z||_L := \max_{-h \leq t \leq h} |z(t)|\, e^{-2L|t|}$$
(wobei wir nun o.B.d.A. $t_0 = 0$ gesetzt haben) eine Kontraktion ist.)

37. *Nochmals $x' = x^2$*
Für die ODE $x' = x^2$ bestimme den Fluß ϕ (insbesondere seinen Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$) und prüfe die Flusseigenschaft 3.40(i) nach. Bestimme das Bild des Intervalls $(-1/2, 1/2)$ unter ϕ_1 und ϕ_2. Fertige eine Skizze an!

4 Systeme linearer ODEs

38. *Picard-Iteration und Matrixexponential*
Sei $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Berechne die n-te Picard-Iterierte x_n für das Anfangswertproblem
$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

39. *Eigenschaften des Matrixexponentials*
Beweise 4.8 (ii) (a) aus der Vorlesung, d.h. seien S, T kommutierende $n \times n$-Matrizen, dann gilt
$$e^S e^T = e^{S+T} = e^T e^S.$$

40. *Ebenes System mit komplexen Eigenwerten*
Löse das ebene lineare System
$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$
zeichne das Phasenportrait und bestimme den Typ des Gleichgewichts.

41. *Ebene Systeme mit verschiedenen reellen Eigenwerten*
Löse die ebenen Systeme $x' = Ax$ für die folgenden Matrizen A und zeichne die Phasenportraits; um welche Gleichgewichte handelt es sich?
    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
    (c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

42. *Ebene Systeme mit komplexen und doppelten Eigenwerten*
Löse die ebenen Systeme $x' = Ax$ für die folgenden Matrizen A und zeichne die Phasenportraits; um welche Gleichgewichte handelt es sich?
    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$