Der Satz von Hahn-Banach und seine geometrische Bedeutung

Seminararbeit im Rahmen des PS Funktionalanalysis 2
SS 2008

Brigitte Kertelits (9925250)

16. November 2008

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit dem Satz von Hahn Banch und einer seiner geometrischen Folgerungen, nämlich der Trennung konvexer Mengen. Der Aufbau folgt größtenteils dem Buch "Funktionalanalysis" von Dirk Werner.

Inhaltsverzeichnis

1 Der Satz von Hahn-Banach und seine geometrische Bedeutung

1.1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit dem Satz von Hahn-Banach und seinen Konsequenzen. Speziell wollen wir hier auf die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach eingehen und diese auch beweisen. Der Satz von Hahn-Banach beschäftigt sich mit der Fortsetzung von linearen Funktionalen, welche auf einem linearen Teilraum definiert sind, auf den gesamten Vektorraum. Dies unter Beibehaltung der Norm bzw. verwandter Größen. Im nicht seperablen Fall wird zum Beweis das Lemma von Zorn verwendet. Allgemein kann man sagen, dass der Satz von Hahn-Banach zu den grundlegenden Sätzen der Funktionalanalysis zählt.

Die geometrische Version dieses Satzes wird Trennungssatz oder auch Satz von Eidelheit genannt und gibt Informationen über die Trennung konvexer Mengen in normierten Vektorräumen (oder allgemeiner lokalkonvexen Räumen) durch lineare Funktionale.

Im folgenden Abschnitt werden wir ein paar grundlegende Begriffe, Aussagen und Beispiele betrachten. Danach werden wir den Satz von Hahn-Banach vorstellen und besprechen, schlussendlich werden wir uns ausführlich mit dem Trennungssatz und seinem Beweis beschäftigen, wobei wir am Ende noch einen kurzen Ausblick auf Anwendungen dieses Satzes außerhalb der Funktionalanalysis geben werden.

1.2 Grundlegende Begriffe, Aussagen und Beispiele

Im folgenden wollen wir Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachten. Wir verwenden die Bezeichnung $\mathbb{K}$-Vektorraum um anzudeuten, dass sowohl ein reeller als auch ein komplexer Vektorraum gemeint sein kann.

Definition 1. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ wird eine Halbnorm genannt, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \qquad \forall \lambda \in K, x \in X \tag{1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{2}$$

Ist zuätzlich die Eigenschaft

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

erfüllt, so heißt p eine Norm. Die Eigenschaft (2) wird als Dreiecksungleichung bezeichnet. Üblicherweise wird eine Norm mit dem Symbol $\|\cdot\|$ anstatt von p bezeichnet.

Bemerkungen

1. Aus Punkt (1) der obigen Definition folgt bereits $p(0) = 0$, denn mit $\lambda = 0$ und $x = 0$ gilt:
$$p(0) = p(0 \cdot 0) = 0\, p\,(0) = 0$$

2. Auf einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird auf natürliche Weise eine Metrik induziert, denn:
$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X.$$

Die Axiome lassen sich einfach nachprüfen. Somit sind in einem normierten Raum topologische Begriffe wie konvergente Folge, Cauchyfolge, Stetigkeit, Kompaktheit etc. definiert. Für halbnormierte Räume kann ähnlich argumentiert werden. In diesem Zusammenhang wollen wir noch eine wichtige Definition wiederholen.

Definition 2. *Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt vollständig. Ein vollständiger, normierter Raum heißt Banachraum.*

Beispiele

1. In der Analysis werden für $x = (x_1, ..., x_n)$ auf K^n die Normen
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$
betrachtet. Diese Normen sind insofern äquivalent, als eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie bezüglich einer dieser Normen konvergiert. In unendlichdimensionalen Vektorräumen ist das im Allgemeinen nicht der Fall!

2. Es sei T eine Menge. $l^\infty(T)$ sei der Vektorraum aller beschränkten Funktionen von T nach $\mathbb{K}$. Für $x \in l^\infty(T)$ setze
$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)| \quad (< \infty).$$
Man nennt $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm und es gilt: $(l^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

3. Es sei $C^1[a,b]$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist $C^1[a,b]$ ein Untervektorraum von $C[a,b]$, jedoch ist $C^1[a,b]$ nicht abgeschlossen bezüglich der Supremumsnorm, also ist $(C^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum. Betrachtet man hingegen für $x \in C^1[a,b]$ die folgenden Normen,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup_{t\in[a,b]} \max\{|x(t)|, |x'(t)|\} = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\} \\ \|x\| &= \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty\,, \end{aligned}$$

so ist $C^1[a,b]$ bezüglich dieser beiden Normen ein Banachraum. Dies dient zusätzlich als Beispiel dafür, dass es auch in ∞-dimensionalen Vektorräumen äquivalente Normen geben kann.

4. Hier betrachten wir die folgenden Vektorräume

$$\begin{aligned} d &= \{(t_n) : t_n \in \mathbb{K}, t_n \neq 0 \quad \text{für nur endlich viele n}\} \\ c_0 &= \left\{(t_n) : t_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} = 0\right\} \\ c &= \{(t_n) : t_n \in \mathbb{K} : (t_n) \text{ konvergiert}\} \\ l^\infty &= l^\infty(\mathbb{N}) = \{(t_n) : t_n \in \mathbb{K} : (t_n) \text{ beschränkt.}\} \end{aligned}$$

und versehen sie jeweils mit der Supremumsnorm $\|(t_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|$. Für diese Vektorräuume gilt

$$d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty.$$

Man kann zeigen, dass l^∞ (bezüglich $\| \, \|_\infty$) ein Banachraum ist. Als abgeschlossene Teilräume davon sind c, c_0 ebenfalls Banachräume. Der Raum d ist in l^∞ nicht abgeschlossen und auch kein Banachraum.

Da wir uns der Untersuchung linearer Abbildungen zwischen normierten Räumen widmen, benötigen wir die folgende Definition.

Definition 3. *Eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt stetiger Operator. Ist der Bildraum der Skalarenkörper, sagt man Funktional statt Operator.*

Ein stetiger Operator $T : X \to Y$ erfüllt also eine der äuivalenten Bedingungen:

(1) Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so gilt $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

(2) Für alle $x_0 \in X$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|x - x_0\| \leqslant \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| \leqslant \epsilon.$$

(3) Für alle offenen $O \subset Y$ ist $T^{-1}(O) = \{x \in X : Tx \in O\}$ offen in X.

An dieser Stelle sei ein wichtiger Satz zur Charakterisierung von stetigen Operatoren erwähnt.

Satz 1. *Es seien X und Y normierte Räume, und es sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äuqivalent:*

(1) T ist stetig

(2) T ist stetig bei 0.

(3) T ist beschränkt, das heißt es existiert ein $M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$.

Die kleinste in (3) auftauchende Konstante heißt Operatornorm von T und wird mit $\|T\|$ bezeichnet, d.h.

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

Wir betrachten nun

$$L(X, Y) := \{T : X \to Y : \text{T ist linear und stetig}\},$$

den Vektorraum der stetigen Operatoren von X nach Y. Da Summen und skalare Vielfache von Nullfolgen wieder Nullfolgen sind, ist $L(X, Y)$ bezüglich der algebraischen Operationen

$$(S + T)(x) = Sx + Tx$$
$$(\lambda T)(x) = \lambda Tx$$

tatsächlich ein Vektorraum. Man beachte, dass stets der Nulloperator $x \mapsto 0$ in $L(X, Y)$ liegt, also $L(X, Y) \neq \emptyset$. Wir setzen noch $L(X) = L(X, X)$. In diesem Zusammenhang formulieren wir noch einen wichtigen Satz.

Satz 2. *Es sei $L(X, Y)$ der gerade definierte Vektorraum, dann gelten:*

(a) Für die definierte Operatornorm gilt $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$. Sie ist eine Norm auf $L(X, Y)$.

(b) Falls Y vollständig ist, ist- unabhängig von der Vollständigkeit von X- der Operatorraum $L(X, Y)$ vollständig.

Es stellt sich allerdings als ein wesentliches Prinzip der Funktionalanalysis heraus, dass man Informationen über normierte Räume mittels der auf ihnen definierten linearen stetigen Funktionalen gewinnt. Deswegen führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 4. *Der Raum $L(X, \mathbb{K})$ der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum X heißt der Dualraum von X und wird mit X' bezeichnet.*

Als Spezialfall von Satz (2) erhält man sofort:

Korollar 1. *Der Dualraum eines normierten Raums, versehen mit der Norm $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$, ist stets ein Banachraum.*

Mit diesen Informationen ausgestattet, werden wir uns nun im folgenden Abschnitt mit verschiedenen Formulierungen des Satzes von Hahn-Banach beschäftigen.

1.3 Fortsetzung von Funktionalen - Der Satz von Hahn-Banach

Wir gehen hier nun der Frage nach, ob es überhaupt auf jedem normierten Raum ein stetiges lineares Funktional $\neq 0$ gibt. Dafür ist es unter anderem der folgende Begriff notwendig.

Definition 5. *Es sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls*

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0, x \in X$,

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Beispiele

1. Jede Halbnorm ist sublinear.

2. Jede lineare Abbildung auf einem Vektorraum ist sublinear.

Weitere Beispiele (Minkowskifunktionale) werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Nun kommen wir zu jener Version des Satzes von Hahn-Banach, die inhaltlich eigentlich in die lineare Algebra gehört.

Satz 3. *Sei X ein reeller Vektorraum und U ein Unterraum von X. Weiters seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $l : U \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$l(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in U.$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$, $L|_U = l$, mit

$$L(X) \leq p(x) \, füralle \, x \in X.$$

Als nächstes formulieren wir obigen Satz für komplexe Vektorräume. Für $\mathbb{C}$-wertige Abbildungen ergibt allerdings $l(x) \leq p(x)$ keinen Sinn. Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist aber natürlich auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man beachte, dass für $x \neq 0$ dann x und ix linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Der obige Satz kann daher auf X sowie $\mathbb{R}$-lineare Funktionale angewandt werden. Nun gibt es einen engen Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}$-linearen und $\mathbb{C}$-linearen Funktionalen, den wir in kommendem Lemma beschreiben werden.

Lemma 1. *Es sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

(a) Ist $l : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, das heißt

$$l(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 l(x_1) + \lambda_2 l(x_2) \; \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X,$$

und setzt man

$$\tilde{l}(x) := l(x) - i\, l(ix),$$

so ist $\tilde{l} : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional und $l = \operatorname{Re} \tilde{l}$.

(b) Ist $h : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $l = \operatorname{Re} h$ und $\tilde{l}$ wie unter Punkt (a), so ist l $\mathbb{R}$-linear und $\tilde{l} = h$.

(c) Ist $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $l : X \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear, so gilt die Äquivalenz

$$|l(x)| \leq p(x) \, \forall x \in X \iff |\operatorname{Re} l(x)| \leq p(x) \, \forall x \in X.$$

(d) Ist X ein normierter Raum und $L : X \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear und stetig, so ist $\|l\| = \|\operatorname{Re} l\|$.

Man kann also sagen, dass $l \mapsto \operatorname{Re} l$ eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}$-linearen und dem der $\mathbb{R}$-wertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale ist. Im normierten Fall ist sie isometrisch.

Nun können wir die komplexe Version von Satz 3 formulieren.

Satz 4. *Sei X ein komplexer Vektorraum, und U sei ein Unterraum von X. Ferner seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $l : U \to \mathbb{C}$ linear mit*

$$\operatorname{Re} l(x) \leq p(x) \, \forall x \in U.$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{C}$, $L|_U = l$, mit

$$\operatorname{Re} l(x) \leq p(x) \, \forall x \in X.$$

Nun wollen wir die algebraischen Hahn-Banach-Sätze auf normierte Räume anwenden.

Satz 5. *Sei X ein normierter Raum und U ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u' : U \to \mathbb{K}$ existiert dann ein stetiges lineares Funktional $x' : X \to \mathbb{K}$ mit*

$$x'|_U = u', \ \|x'\| = \|u'\|.$$

Jedes stetige Funktional kann also normgleich fortgesetzt werden.

Hier sei bemerkt, dass eine solche Fortsetzung im allgemeinen nicht eindeutig ist, und dass das Analogon für diesen Satz für Operatoren im allgemeinen falsch ist.

1.4 Der Trennungssatz - eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach

Nun wollen wir die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach kennenlernen. Unser Ziel ist hierbei die Trennung konvexer Mengen eines normierten Raumes durch stetige lineare Funktionale. Um das Trennungsproblem zu formulieren, wollen wir uns zunächst noch einmal die Definition der Konvexität in Erinnerung rufen.

Definition 6. *Eine Menge U heißt konvex, falls $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$, $\forall \, x, y \in U, 0 \leq \lambda \leq 1$.*

Wir gehen im Folgenden also der Frage nach, ob zu konvexem U und $V \subset X$ ein Funktional $x' \in X, x' \neq 0$ existiert, sodass

$$\sup_{x \in U} x'(x) \leq \inf_{x \in V} x'(x) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } \sup_{x \in U} \operatorname{Re} x'(x) \leq \inf_{x \in V} \operatorname{Re} x'(x) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

erfüllt ist. Geometrisch bedeutet das, dass wir eine Hyperebene suchen, die die beiden konvexen Mengen U und V trennt: Interpretieren wir x' als Hyperebene h, so liegt jeder Punkt von U näher zur Hyperebene als jeder Punkt von V. Es gibt daher einen Vektor $a \in X$, sodass die verschobene Hyperebene $h + a$ den Raum X in zwei Halbräume X_1 und X_2 zerlegt, sodass $U \subset X_1$ und $V \subset X_2$ erfüllt ist, was nun unserer geometrischen Vorstellung von der Trennung der beiden konvexen Mengen durch eine Hyperebene entspricht. Weiters gilt, dass die "Länge"des Vektors a die Ungleichung

$$\sup_{x \in U} \operatorname{Re} x'(x) \leq \|a\|^2 \leq \inf_{x \in V} \operatorname{Re} x'(x)$$

erfüllt.

Um unsere Frage nach der Existenz eines solchen Funktionals nun zu beantworten benötigen wir die folgende Definition.

Definition 7. *Es sei X ein Vektorraum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Das Minkowskifunktional $p_A : X \to [0, \infty]$ wird durch*

$$p_A(x) := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in A \right\}$$

definiert. Man nennt A absorbierend, falls $p_A < \infty \ \forall \ x \ \in X$.

Beispiel. Ist A die offene Einheitskugel eines normierten Raums, so ist das Minkowskifunktional $p_A = \|x\|$.

Als nächstes beweisen wir ein für unsere Zwecke hilfreiches Lemma, welches die wichtigsten Eigenschaften des Minkowskifunktionals für eine spezielle Wahl von U erläutert.

Lemma 2. *Ist X ein normierter Raum und $U \subset X$ eine konvexe Teilmenge mit $0 \in \operatorname{int} U$. Dann gilt:*

(a) U ist absorbierend, es gilt sogar: Falls $B_\epsilon = \{x : \|x\| < \epsilon\} \subset U$, so ist für das Minkowskifunktional $p_U(x) \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\| \ \forall x \in X$ erfüllt.

(b) p_U ist sublinear.

(c) Ist U offen, so gilt $U = p_U^{-1}([0, 1))$.

Beweis. (a) Sei $B_\epsilon \subset U$, $\epsilon > 0$ Dann gilt für alle ϵ', mit $0 < \epsilon' < \epsilon$

$$(\epsilon - \epsilon') \frac{x}{\|x\|} \in U, x \in X, \text{ und}$$

$$p_U \leq \lambda_0 = \frac{\|x\|}{\epsilon} \text{ nach der Definition von } p_U.$$

(b) Die positive Homogenität von p_U folgt aus

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}\lambda x \in U\right\} \\ &= \inf\left\{\beta\lambda : \beta^{-1}x \in U\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\beta : \beta^{-1}x \in U\right\} = \lambda p_U(x),\ \lambda > 0. \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Ungleichung

$$p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$$

beweisen. Hierfür sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Jetzt wählen wir $\lambda, \mu > 0$, mit $\lambda \leq p_U(x) + \epsilon$ und $\mu \leq p_U(y) + \epsilon$, sodass

$$\frac{x}{\lambda} \in U \text{und } \frac{y}{\mu} \in U \text{erfüllt sind.}$$

Aus der Konvexität von U und den obigen Resultaten ($\frac{x}{\lambda} \in U, \frac{y}{\mu} \in U$) lässt sich nun

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu} \in U$$

erreichen. Somit erhalten wir auch

$$p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die gewünschte Behauptung.

(c) Ist $x \in U$, so ist wegen der Offenheit von U auch $(1+\epsilon)x \in U$, für ein genügend kleines ϵ. Daher ist $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$, das heißt

$$U \subset \{x \in X : p_U(x) < 1\}.$$

Ist nun umgekehrt $p_U(x) < 1$, dann folgt $\frac{x}{\alpha} \in U$ mit einem $\alpha > 0$. Da $0 \in U$ gilt, erhalten wir somit

$$x = \alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\,0 \in U.$$

□

Nun kommen wir zu einem weiteren Lemma, welches die Basis für die Hahn-Banach-Trennungssätze bildet.

Lemma 3. *Ist X ein normierter Raum und $V \subset X$ konvex und offen mit $0 \notin V$, dann existiert ein $x' \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0\, \forall x \in V.$$

Im Beweis verwenden wir die Schreibweise

$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$$

für Teilmengen $A, B \in X$. Weiters sei festgehalten, dass mit A und B konvex, auch $A + B$ beziehungsweise $A - B$ konvex sind. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Definition.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Da die Aussage für $V = \emptyset$ trivial ist, können wir nun ein $x_0 \in V$ beliebig wählen. Jetzt setzen wir $y_0 = -x_0$ und $U = V - x_0$. Die Menge U ist also die um y_0 verschobene Menge V, die den Nullpunkt enthält. Somit ist U ebenfalls offen und konvex, weil diese Eigenschaften invariant unter Translationen sind. Weiters sehen wir, dass $y_0 \notin U$, weil nach Voraussetzung $0 \notin V$ gilt. Nun betrachten wir das Minkowskifunktional p_U zu U. Da U offen ist, gilt $0 \in \operatorname{int} U$ und somit sind die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt, also ist p_U reellwertig und sublinear. Weiters gilt nach Lemma 2 (c), dass $p_U(y_0) \geq 1$, weil $y_0 \notin U = p_U^{-1}([0,1))$. Nun möchten wir uns über das sublineare Minkowskifunktional ein lineares Funktional mit für unsere Zwecke passenden Eigenschaften konstruieren. Dazu definieren wir auf dem Unterraum $Y = \operatorname{lin}\{y_0\}$ das Funktional

$$y'(ty_0) = tp_U(y_0), t \in \mathbb{R}.$$

Dieses ist offensichtlich reellwertig und es ist linear, denn für $r, s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} y'((r(s+t)y_0) &= r(s+t)p_U(y_0) = rsp_U(y_0) + rtp_U(y_0) \\ &= ry'(sy_0) + ry'(ty_0). \end{aligned}$$

Für $t \leq 0$ gilt die Abschätzung

$$y'(ty_0) = tp_U(y_0) \leq 0 \leq p_U(ty_0),$$

weil $p_U \geq 0 \, \forall x \in X$. Für $t > 0$ ist die Gleichung

$$y'(ty_0) = tp_u(y_0) = |t|p_U(y_0) = p_U(ty_0)$$

erfüllt, weil p_U sublinear ist. Somit folgt daraus, dass

$$y'(y) \leq p_U(y) \, \forall y \in Y,$$

also sind die Voraussetzungen für den Satz von Hahn-Banach erfüllt. Aus diesem Grund können wir nun eine lineare Fortsetzung x' von y' auf X mit

$x'|_Y = y'$ und $x' \leq p_U$ wählen. Aus Lemma 2 (a) können wir folgern, dass dieses x' stetig ist, denn mit den dortigen Bezeichnungen gilt für $x \in X$:

$$|x'(x)| = \max\{x'(x), x'(-x)\} \leq \max\{p_U(x), p_U(-x)\} \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\|,$$

für ein geeignetes ϵ. Weiters gilt für $x \in V$ mit $x = u - y_0, u \in U$ mittels Lemma 2 (c)

$$x'(x) = x'(u) - x'(y_0) \leq p_U(u) - 1 < 0,$$

weil $x'(y_0) = p_U(y_0) \geq 1$. Die letzte Ungleichung ist erfüllt, weil p_U nicht negativ ist. Somit leistet x' das Gewünschte.

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lässt sich mittels Lemma 1 auf das gerade Gezeigte zurückführen. □

Dass man bei diesem Lemma im allgemeinen nicht auf die Eigenschaft offen verzichten kann, lässt sich schon vermuten, da das für den obigen Beweis, wo die Stetigkeit des Funktionals x' gezeigt wird, wesentlich ist. Genauer wollen wir das jedenfalls am folgenden Bespiel sehen.

Beispiel. Wir betrachten den normierten Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ über $\mathbb{R}$. Nun setzen wir

$$V = \{(s_n) \in d \backslash \{(0)\} : s_N > 0 \text{ für } N := \max\{i : s_i \neq 0\}\}.$$

Es gilt $0 \notin V$ nach Voraussetzung und V ist konvex, denn: Für $s^1, s^2 \in V$ seien

$$N_1 = \max\left\{i : s_i^1 \neq 0\right\} \text{ und } N_2 = \max\left\{i : s_i^2 \neq 0\right\}.$$

Nun sei o.B.d.A. $N_1 \geq N_2$, dann ist für $\lambda \in (0,1)$ stets

$$\lambda s^1 + (1-\lambda)s^2 \in V$$

erfüllt, weil

$$\lambda s_{N_1}^1 + (1-\lambda)s_{N_1}^2 > 0,$$

da ja $s_{N_1}^1 > 0$ und $s_{N_1}^2 \geq 0$ gilt. Die Fälle $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ sind trivial. Dennoch existiert hier kein $x' \in d'$ mit $x'|_V < 0$. Identifiziert man nämlich x' mit einer Folge $(t_n) \in l^1$, so können folgende Fälle eintreten. Ist $t_k \geq 0$ für ein k, so gilt $e_k \in V$, aber $x'(e_k) = t_k \geq 0$, wobei $e_k = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_k = 1$ und $x_n = 0$ für $n \neq k$ bezeichnet. Sind hingegen alle $t_n < 0$, so betrachte

$$x = \frac{-t_2}{t_1}e_1 + e_2 \in V.$$

Es gilt dann

$$x'(x) = \frac{-t_2}{t_1}t_1 + t_2 = 0.$$

Nun können wir die erste Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach formulieren.

Satz 6. *Sei X ein normierter Raum, $V_1, V_2 \subset X$ seien konvexe Teilmengen und V_1 sei zusätzlich offen. Es gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2), \ \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Beweis. Wir werden diesen Satz auf das vorangegangene Lemma 3 zurückführen. Hierzu sei $V = V_1 - V_2$. Wie wir bereits wissen, ist die Differenzenmenge zweier konvexer Mengen ebenfalls konvex. Weiters beobachten wir, dass V in der Form

$$V = \cup_{x \in V_2} (V_1 - \{x\})$$

dargestellt werden kann und somit offen ist. Da wir $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ vorausgesetzt haben, gilt $0 \notin V$. Nach Lemma 3 existiert somit ein Funktional $x' \in X'$, sodass

$$\operatorname{Re} x' (v_1 - v_2) < 0 \ \forall v_i \in V_i \quad (i = 1, 2)$$

erfüllt ist. Also gilt hier Re x'$(v_1) < \operatorname{Re} x' (v_2)$, $\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$,was unserer Behauptung entspricht. □

Als letzten Satz in diesem Abschnitt betrachten wir noch eine weitere Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach. Hier untersuchen wir eine ähnliche Situation für eine abgeschlossene Menge und einen Punkt, und wir werden sehen, dass sich die Ungleichung noch verschärfen lässt, indem man das Infimum in Betracht zieht.

Satz 7. *Sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ sei abgeschlossen und konvex, und es sein $x \notin V$. Dann existiert ein $x' \in X'$, sodass*

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf \{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\}$$

erfüllt ist. Das heißt also, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \epsilon \leq \operatorname{Re} x'(v), \ \forall v \in V.$$

Man sagt, dass x von V strikt getrennt werden kann.

Beweis. Hier führen wir die Situation auf jene im gerade besprochenen Satz 6 zurück. Da V nach Voraussetzung abgeschlossen ist, existiert eine offene Umgebung U um 0, sodass $(x + U) \cap V = \emptyset$ gilt. Wir können diese U als Kugel mit Radius r wählen. Nach Satz 6 existiert somit ein $x' \in X'$, mit

$$\operatorname{Re} x'(x + u) < \operatorname{Re} x'(v), \ \forall u \in U, v \in V.$$

Daraus lassen sich nun

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x'(x) + \operatorname{Re} x'(u) &< \operatorname{Re} x'(v), \ \forall u \in U, v \in V \\ \operatorname{Re} x'(x) + \|\operatorname{Re} x\| r &\leq \operatorname{Re} x'(v), \ \forall v \in V \\ \operatorname{Re} x'(x) + r\|x'\| &\leq \inf \{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\} \end{aligned}$$

ableiten, was zu zeigen war. □

Zum Abschluss sei noch bemerkt, dass dieser Satz auch außerhalb der Funktionalanalysis viele wichtige Anwendungen hat und für viele Beweise ein nicht-konstruktives Existenzargument darstellt, unter anderem:

(1) Existenz von Subdifferentialen für geeignet formulierte verallgemeinerte Richtungsableitungen.

(2) Beweis des Farkas´schen Lemmas, das heißt Anwendung in der konvexen Optimierung.

(3) Beweis des Fundamentalsatzes der Preistheorie für faire Preise von Derivaten im Mehr-Perioden-Modell.