Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	
2	
3	
4	
G	

Note:

Prüfung zu

Partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2010, Roland Steinbauer

3. Termin, 26.11.2010

1. *Laplacegleichung.*
   (a) *Mittelwertformeln.*
   Definiere den Begriff einer harmonischen Funktion. Was lässt sich über deren Regularität aussagen? (3 Punkte)
   (b) *Maximumsprinzip.*
   Formuliere und beweise das Maximumsprinzip und das starke Maximumsprinzip für harmonsiche Funktionen. (Die dazu gegebenenfalls benötigte Mittelwerteigenschaft nimm dabei als gegeben an.) (5 Punkte)
   (c) *Eindeutigkeit für die Poissongleichung.*
   Formuliere ein Eindeudigkeitsresultat für die Poissongleichung und beweise es mittels Maximumsprinzip. (4 Punkte)
2. *Wärmeleitungsgleichung.*
   (a) *Eindeutigkeit.*
   Formuliere und beweise das Eindeutigkeitsresultat für die Wäremeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten, das auf der Maximumseigenschaft beruht. Diese nimm als gegeben an, erkläre aber die verwendeten Mengen (parabolischer Zylinder, ect.). (6 Punkte)
   (b) *Eindeutigkeit—da Capo.*
   Formuliere und beweise das ananloge Eindeutigkeitsresultat, das auf den Energiemethoden beruht. (6 Punkte)
3. *Erhaltungssätze.*
   (a) *Skalarer Erhaltungssatz.*
   Formuliere den skalaren Erhaltungssatz in einer Raumdimension und leite die entsprechende Integralgleichung her. (4 Punkte)

(b) *Burgers-Gleichung.*
Wie lautet die Burgers-Gleichung? Erlaubt hier die Methode der Charakteristiken (im Fall allgemeiner Anfangsbedingungen) die Herleitung einer globalen Lösung? Wo liegt das Problem? (4 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung. (Je 2 Punkte)

(a) Lösungen der Wellengleichung zeigen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

(b) Die Fundamentallösung der Laplacegleichung in 2 Dimensionen lautet

$$\Phi(x) = C\frac{1}{|x|^{n-1}}.$$

(c) Jeder lineare partielle Differentialoperator zweiter Ordnung ist global (d.h. für alle x im Definitionsbereich) entweder elliptisch oder parabolisch oder hyperbolisch.

(d) Die Methode der Charakteristiken funktioniert für allgemeine PDGs 2. Ordnung völlig analog zum Fall 1. Ordnung.