Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
Universität Wien

Sommersemester 2012
3 WStd / 5 ECTS

0 EINLEITUNG

In dieser Einleitung machen wir einige inhaltliche & methodische Vorbemerkungen (§0) und legen dann (§1) den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

§0 WAS WILL UND WAS SOLL DIE ANALYSIS

— EINE ERSTE BEGRIFFSBESTIMMUNG

in diesem Skript hat jeder Absatz eine Nummer

0.1. MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN. Zu Beginn jedes Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- LINEARE ALGEBRA & GEOMETRIE
- ANALYSIS

Lösen linearer Gleichungssysteme & der daraus entwickelte abstrakte Begriffsapparat

Grenzwerte, Differential- und Integralrechnung

Die Themen der Analysis sind also schon durchaus aus der Schulmathematik geläufig; sie wird an der Uni allerdings axiomatisch abstrakt aufgebaut daher ist zu Beginn eher das WIE als das WAS ein Problem

[Für viele Studierende ist die 1. Analysis-VO die relativ schwierigste VO des gesamten Studiums.]

0.2 Analysis – eine erste Inhaltsbestimmung

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die Differential- und Integralrechnung (in einer & in mehreren Variablen).

Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?

für kleine Änderungen der unabhängigen Variablen

Gesamtverlauf der Fkt

0.3 BSP (Fahrradfahren)

(Wann, wie) kann aus der Kenntnis der Momentangeschwindigkeit (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der Gesamtverlauf der Fahrt (zurückgelegte Strecke; die Fkt im Großen) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden diese Größen durch den Tachometer bzw Tageskilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe wirklich und wie kann obige Frage systematisch beantwortet werden?

Das führt uns auf:

0.4 DER ANALYTISCHE BEGRIFFSAPPARAT

Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den

GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen Erscheinungsformen – Er ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- & Integralrechnung zugrunde!

0.5 UND WOZU DAS GANZE? Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken scheinende) Materie mit der echten Welt zu tun? SEHR VIEL!

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Lagrange, Laplace, ...) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt & Gesellschaft in den letzten $3\frac{1}{2}$ Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. [Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik so wie die Schrift und nimmt m.E. ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein ...]

0.6 JA SCHÖN – ABER WIE? ZUR METHODIK

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist – und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich – dass die Analysis [wie jedes math. Gebiet] nach der axiomatischen Methode gelehrt wird. – WARUM?

abstraktes Vorgehen nach dem Definition-Satz-Beweis-Schema

(1) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

(2) Sie macht das Erlernen eines Gebiets leichter!

Das ist kein Witz: Statt in „druidischer Weise" von einem Meister im geheimnisvollen Handwerke des intuitiv richtigen Hantierens mit „unendlich kleinen Größen" unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt definiert. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert. Diese werden durch logische Schlußfolgerungen bewiesen.

JA, ABER ... natürlich bereitet diese Herangehensweise den AnfängerInnen große Schwierigkeiten!

Es ist eine große Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der Phantasie & Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache.

Daher ist es auch eines der Ziele dieser VO diese methodische Herausforderung zu bewältigen ... Insofern nimmt die EidA auch den methodischen roten Faden aus der EMA auf und spinnt ihn weiter ...

0.7. Axiomatik in der Analysis

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir im nächsten §. Dabei nehmen wir den inhaltlichen Faden aus der ETA auf und knüpfen daraus den Teppich der Analysis.

0.8 Bevor es wirklich losgeht – eine letzte, auch persönliche Vorbem.

Zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen & die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen & wird nicht ganz ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können).

Ebenso die Kraft der Anwendungen (auf die wir in dieser Vo leider wenig eingehen können): Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie, etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft...

§1 Zusammenfassung: Die Reellen und Komplexen Zahlen

1.1 Motivation: In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen.

[Wir wählen diesen Ausgangspunkt: die reellen (und damit auch die komplexen) Zahlen können aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe [EMA, Erweiterungsstoff im Kap. 6]). Die so konstruierten Mengen $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen — Daher spielt es für alles Weitere keine Rolle wo wir beginnen. Wichtig ist nur, dass wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.]

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile aus der EMA, sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf die EMA arbeiten.

Wir werden den Satz v. Dedekind [EMA, Thm 6.4.4.] zur Definition erheben [EMA, p. 310 unten] also $\mathbb{R}$ als (den bis auf Isomorphie eindeutigen) ordnungsvollständigen geordneten Körper definieren, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen.

1.2 $\mathbb{R}$ als Körper

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper [EMA, Def 4.5.1], d.h. es gilt

(Axiome der Addition)

(A1) Assoziativgesetz: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(A2) Kommutativgesetz: $x+y = y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(A3) Existenz der Null: $\exists 0 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}$

additives Neutrales

$x + 0 = x$

(A4) Existenz von additiv Inversen: $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists -x \in \mathbb{R}:$

$x+(-x) = 0$

(Axiome der Multiplikation)

(M1) Assoziativität: $(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(M2) Kommutativität: $xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(M3) Existenz der Eins: $\exists 1 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}:$

multiplikativ Neutrales

$x \cdot 1 = x$

(M4) Existenz von mult. Inversen: $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \; \exists x^{-1} \in \mathbb{R}:$

$x \cdot x^{-1} = 1$

(Distributivgesetz)

regelt die Verknüpfung von $+, \cdot$

(D) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \quad x(y+z) = xy + xz$

1.3 BEM (Folgerungen aus den Körperaxiomen)

(i) Das additiv neutrale 0 und multiplikativ neutrale Element 1 sind eindeutig bestimmt [EMA, Prop 5.2.16].

(ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen $-x$ bzw x^{-1} eindeutig bestimmt [EMA, Prop. 5.2.33].

(iii) Es gibt keine Nullteiler, d.h $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \neq y$ $\Longrightarrow xy \neq 0$ [EMA, Bem 4.5.9]

(iv) Endliche Summen und Produkte reelle Zahlen erfüllen (erweiterte Versionen) von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz [„Klammerrechnung" zB $(x+y)(u-w) = ux + uy - xw - yw$] und wir verwenden die Summen- und Produktschreibweise Σ, Π [EMA, Kap 2.3].

1.4. Die komplexen Zahlen

(i) Per definitionem [EMA, Def 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reelle Zahlen [$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$], d.h. wir schreiben $z = (x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Auf $\mathbb{C}$ sind eine Addition und eine Multiplikation definiert $(z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2))$

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

(ii) Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper [EMA, Thm. 6.5.2] wobei $0 := (0,0)$ das Nullelement und $1 := (1,0)$ das Einselement sind.
D.h. für $\mathbb{C}$ gelten alle Punkte aus 1.2. mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ [klar weil 1.2 listet ja nur allgemein die Eigenschaften von Körpern]

(iii) Für $z = (x,y)$ verwenden wir auch die Schreibweise

Imaginärteil von z

Realteil von z

$$z = x + iy, \quad x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

wobei $i = (0,1)$ die imaginäre Einheit genannt wird [EMA, Defs. 6.5.5, 6.5.6.]. i hat die bemerkenswerte Eigenschaft

$$i^2 = (0,1)^2 \overset{(1.1)}{=} (-1,0) = -1 + i0 = -1$$

(iv) $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper [EMA, Def. 5.4.13] von $\mathbb{C}$ [EMA, p.333] wobei $\mathbb{R}$ mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x,0) = x + i0 \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}$ eingebettet ist. (Siehe die graue Box in [EMA, p.333].) Insbesondere können wir $0 \in \mathbb{R}$ mit $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ identifizieren und $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$.

(v) $\mathbb{C}$ besitzt mit der komplexen Konjugation eine wichtige Struktur. Genauer haben wir die Abb [EMA, Def 6.5.8]

$$\begin{aligned} \bar{\ } : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\longmapsto \bar{z} = x - iy \end{aligned}.$$

Sie ist ein Körperautomorphismus ([EMA, 5.4.20(iii)] d.h. Körper isom. auf sich selbst) von $\mathbb{C}$, wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h.

$$\bar{\bar{z}} = z .$$

Man sagt die Komplexkonjugation ist eine Involution.

1.5 $\mathbb{R}$ als geordneter Körper

(Hier weichen wir etwas von [Hö] ab; die Zugänge sind aber äquivalent! D)

(i) Auf der Menge $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert (die sog. natürliche Ordnung).

d.h. eine reflexive ($x \leq x$), transitive ($x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$) und antisymmetrische ($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$) Relation; siehe [EMA, Def 4.2.24(i)]

Wir verwenden die Schreibweisen:

$$x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y :\Leftrightarrow y < x$$

(ii) $\leq$ ist eine Totalordnung [EMA, Def 4.2.24(iii)], d.h. es gilt die Trichotomie

(O1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

[Genauer sagt [EMA, Def 2.2.24(iii)]: es gilt mindestens eine der Aussagen $x \leq y$, $y \leq x$. Es gilt aber (4.2.24(iii)) $\Leftrightarrow$ (O1):

"$\Leftarrow$" ist klar

"$\Rightarrow$": per def gilt mind. eine der 3 Aussagen. Wir zeigen, dass niemals 2 oder alle 3 gelten können

- $x < y \wedge x = y$ ist per def nicht möglich [$x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$]
- $x > y \wedge x = y$ detto
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \overset{\text{antisym.}}{\Rightarrow} x = y$ was nicht möglich ist; siehe oben $\square$]

(iii) $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ ist ein geordneter Körper [EMA, Def 6.3.1], d.h. es gelten $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

Verträglichkeit von $\leq$ mit $+,\cdot$

(O2) $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$

(O3) $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow xy>0$

(iv) In $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ gelten die Rechenregeln [EMA, Prop 6.3.2] $(x,y,z\in\mathbb{R})$

$$x\leq y \Longleftrightarrow y-x\geq 0$$
$$x\leq 0 \Longleftrightarrow -x\geq 0$$
$$x\leq y \wedge z\geq 0 \Rightarrow xz\leq yz$$
$$x\leq y \wedge z<0 \Rightarrow xz\geq yz$$
$$x\neq 0 \Rightarrow x^2>0$$
$$0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}$$

<u>1.6. Wiederholung (Intervalle)</u> Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ verwendet man um wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu definieren – die <u>Intervalle</u> [EMA p. 153]. Seien $a<b\in\mathbb{R}$

$(a,b)\equiv\,]a,b[\,:=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ … offenes, beschränktes I.

$(-\infty,b)\equiv\,]-\infty,b[\,:=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$
$(a,\infty)\equiv\,]a,\infty[\,:=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$ … offene, halbbeschränkte I.

$(a,b]\equiv\,]a,b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$
$[a,b)\equiv[a,b[\,:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$ … halboffene, beschr. I.

$(-\infty,b]\equiv\,]-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$
$[a,\infty)\equiv[a,\infty[\,:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$ … abgeschlossene, halbbeschr. I

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$ … abgeschlossenes beschr. I.

Schließlich schreiben wir $(-\infty,\infty)\equiv\,]-\infty,\infty[\,=\mathbb{R}$

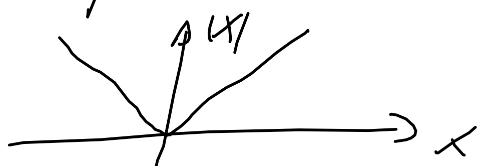
1.7. DER ABSOLUTBETRAG.

Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die „Abstandsmessung"; auf $\mathbb{R}$ bewerkstelligt das der Betrag [EInA, Def 6.4.11]

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion $|\;| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat den Graphen und die folgenden Eigenschaften



[EInA, Prop. 6.4.12]

(N1) $|x| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
und $|x| = 0 \iff x = 0$ (positiv definit)

(N2) $|xy| = |x|\,|y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Multiplikativität)

(N3) $|x+y| \leq |x| + |y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Δ-Ungleichung)

Weiters gilt [EInA, p. 318] $(x, y \in \mathbb{R})$

(i) $|-x| = |x|$ (Spiegelungssymmetrie)

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

(iii) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$, $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (verkehrte Δ-Ungl.; UE $\boxed{0}$, 4)

(iv) $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

[$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases}$; das ist wohldefiniert wegen (O1)]

[detto] (UE $\boxed{0}$, 3)

1.8. (ÜBER) ABZÄHLBARKEIT [EMA, Kap. 4.4]

Eine Menge M heißt abzählbar, falls es eine Bijektion $F: M \to \mathbb{N}$ gibt.

Abzählbare Mengen sind: $\mathbb{N}$ (klar!), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, man sagt überabzählbar [Es ist schon $(0,1)$ überabzählbar, [EMA, p.176]]

Cantorsches Diagonalverfahren [EMA, p. 174]

1.9. ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT → REP

Eine totalgeordnete Menge M heißt ordnungsvollständig, falls $\forall E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$, E nach oben (unten) beschränkt (V) $\Longrightarrow$ E hat ein Supremum (Infimum) [EMA, Def 6.4.1 + Prop. 6.4.2]

kleinste obere Schranke – ein wichtiger Begriff → REP

[EMA, Def 4.2.32] → $\alpha = \sup E \;:\Longleftrightarrow$ (1) α ist obere Schranke von E ($\alpha \geq e \;\forall e \in E$)
(2) $\beta < \alpha \Rightarrow \beta$ ist nicht obere Schranke von E

Aufgabe der Woche

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht ordnungsvollständig – daher eignen sie sich nicht als Grundlage der Analysis! [EMA, Bsp 6.4.3]

1.10. DEFINITION VON $\mathbb{R}$

Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt die im Dedekindschen Satz [1.10; EMA, Thm 6.4.4] vorkommen.

Er lautet: Es gibt bis auf Isomorphie (geordnete Körper) genau einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Teilkörper enthält.

Wir <u>definieren</u> nun $\mathbb{R}$ als genau jenen Körper.

$\mathbb{R}$ hat nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

- die Körperaxiome (algebraische Eigenschaften) (A1) – (A3), (M1) – (M3), (D)

„in $\mathbb{R}$ gelten die 4 Grundrechnungsarten"

- die Ordnungsaxiome (O1) – (O3)

„wir haben das übliche $\leq$"

- Ordnungsvollständigkeit (V)

„$\mathbb{R}$ hat im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ keine Löcher"

Zum Schluss des Abschnitts halten wir einige wichtige Folgerungen aus (V) fest

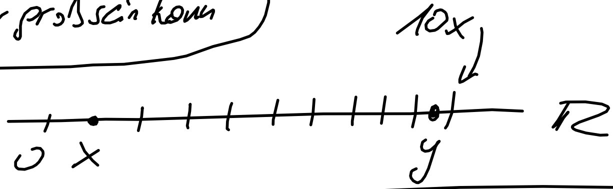
1.11. KONSEQUENZEN AUS DER ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT

(i) Die <u>Archimedische Eigenschaft</u> [EMA, Prop 6.4.5(i)] [REP]

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: nx > y$

Der Witz ist, dass x sehr klein und y sehr groß sein kann

n-faches Abtragen von x übertrifft y



(ii) <u>Dichtheit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$</u> [EMA, Prop 6.4.5(ii)]

Seien $x < y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}: x < r < y$

Der Witz ist es, dass x sehr nahe bei y sein kann

„Zwischen je zwei reellen Zahlen, egal wie nahe sie beieinander liegen, gibt es immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl"

(iii) Existenz & Eindeutigkeit von Wurzeln

Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$\Longrightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = a$ [EMA, Prop. 6.4.2]

n-te Wurzel aus a

1 Folgen und Reihen – Konvergenz

In diesem Kapitel legen wir den Grundstein der Analysis: den Konvergenzbegriff für Folgen. Wir werden also definieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiters werden wir Folgen als Werkzeug verwenden um den zentralen Begriff der (Ordnungs-) Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen als Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entlarven und unser diesbezügliches Wissen verwenden um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit konvergenten Reihen wird sich im Weiteren als ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder M, einer bel. Menge) – offizielle Def. später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie das EMA und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft – damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

§1 $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einige Konsequenzen aus der Archimedischen Eigenschaft

1.1. Wiederholung. (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$)

In [EMA, 6.1.1] wurde $\mathbb{N}$ als Menge definiert, die die Peano-Axiome erfüllt und in [EMA 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt. Es ist also $\mathbb{N}$ jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der Nachfolgerabbildung S die Axiome

(PA1) $0 \in \mathbb{N}$

(PA2) $\forall n \in \mathbb{N}: S(n) \in \mathbb{N}$ (d.h. $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$)

(PA3) $\nexists n \in \mathbb{N}: S(n) = 0$ (d.h. 0 ist kein Nachfolger)

(PA4) S ist injektiv, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N}: S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$

(PA5) Induktionsprinzip: Falls $M \subseteq \mathbb{N}$ und (PA1), (PA2) für M gelten [man sagt M ist induktiv: $0 \in M$ und $m \in M \Rightarrow S(m) \in M$] dann gilt schon $M = \mathbb{N}$

(PA5) sagt, dass vollst. Induktion funktioniert ...

1.2. Bem (Wohlordnung von $\mathbb{N}$)

Klarerweise ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (Details siehe [EMA, Kap 6, Ergänzungsstoff]). Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ besitzt $\mathbb{N}$ die Eigenschaft der Wohlordnung:

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ hat ein Min

Beweis: (i) Falls A endlich ist, dann gibt es klarerweise ein Minimum (es kann nach endlich vielen „Vergleichsschritten" gefunden werden).

(ii) Falls A unendlich ist wählen wir ein beliebiges $a \in A$ und zerlegen A in 2 Teilmengen:

$$B := \{x \in A : x \leq a\} \qquad C := A \setminus B$$

Nun gilt $A = B \cup C$ und B ist endlich $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \min B$

Außerdem gilt lt. Konstruktion $\forall b \in B\, \forall c \in C : b < c$

$\Longrightarrow \min B = \min A$. $\square$

Als nächstes halten wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft fest

1.3. THM (Die Macht von $1/n$)

Der Witz an "$\forall \varepsilon > 0$" ist, dass ε beliebig nahe bei 0 sein kann

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : 1/n < \varepsilon$

(ii) Sei $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$. Falls $r < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ dann gilt schon $r = 0$

„$\frac{1}{n}$ wird beliebig klein"

„Zwischen $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ und 0 ist kein Platz"

Beweis:

(i) [Archimedes 0.1.11(i): $x = \varepsilon, y = 1$] $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$

$\Rightarrow \varepsilon > 1/n$

(ii) Sei $r \geq 0$. Falls $r > 0 \overset{(i)}{\underset{(r=\varepsilon)}{\Longrightarrow}} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 1 : 1/m < r$

↯ zur Voraussetzung

Also gilt $r = 0$. $\square$

1.1.4 LEMMA (Bernoulli-Ungleichung) Sei $-1 \leq x \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis: Induktion

$n=0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$ ✓

Ind. Voraussetzung und $\underline{\underline{1+x \geq 0}}$!

$n \mapsto n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$$= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

$\square$

[ENDE KW 16]