1.4. LEMMA (Bernoulli-Ungleichung) Sei $-1 \le x \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

Beweis: Induktion

$n=0$: $(1+x)^0 = 1 \ge 1+0x$ ✓

Ind. Voraussetzung und $1+x \ge 0$?

$n \to n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \ge (1+nx)(1+x)$

$$= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\ge 0} \ge 1+(n+1)x$$

□

1.5. PROP (Wachstum von Potenzen)

Für $b>1$ wird b^n größer als jede vorgegebene Zahl

Sei $b \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $b>1$, dann gilt

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: b^n > K.$$

(ii) Falls $0<b<1$, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: b^n < \varepsilon.$$

Für $0<b<1$ wird b^n kleiner als jede pos. Zahl

Beweis:

(i) Setze $x = b-1 \Rightarrow x>0$ und wir können die Bernoulli-Ungl verwenden

$$\overset{1.4}{\Longrightarrow} b^m = (1+x)^m \ge 1+mx \ (*) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

Der Witz ist, dass K sehr groß sein kann

Sei $K \in \mathbb{R} \xrightarrow[x>0]{\text{Arch}} \exists n \in \mathbb{N}: nx > K-1 \quad (**)$

Wähle $m=n$ in $(*)$. Dann gilt $b^n \overset{(*)}{\ge} 1+nx \overset{(**)}{>} 1+K-1 = K$

(ii) Folgt aus (i); genauer setze $b_1 = 1/b \Rightarrow b_1 > 1$

$$\underset{[b=b_1,\ K=1/\varepsilon]}{\overset{(i)}{\Longrightarrow}} \exists n \in \mathbb{N} : b_1^n > K$$

Also insgesamt $\underline{b}^n = \dfrac{1}{b_1^n} \underline{< \varepsilon}$. □

Zum Abschluss des § betrachten wir geometrische Summen – ein ganz wichtiges Werkzeug

1.6. GEOMETRISCHE SUMMEN Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

(i) Für $x = 1$ erhalten wir

$$\underline{s_n(1)} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underline{n+1}$$

(ii) Um $s_n(x)$ für $x \neq 1$ zu berechnen schreiben wir

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$x s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \quad x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$$

$$\underbrace{s_n(x) - x s_n(x)}_{(1-x)\, s_n(x)} = 1 - x^{n+1}$$

$$\Longrightarrow s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (\ast)$$

$$(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von $S_n(x)$ für n groß (und $x\neq 1$). Dazu schreiben wir (*) um zu

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (**)$$

unabhängig von n

Interessanter Term

(iv) Für $|x|<1$ besagt 1.5(ii), dass der interessante Term betragsmäßig beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \varepsilon_1>0 \Longrightarrow \exists N\in\mathbb{N}: |x|^N<\varepsilon_1 \qquad (***)$$

[1.1.4(ii), $b=|x|$]

Klarerweise gilt (***) auch für alle $n\geq N$ und daher

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \underset{|x|<1}{=} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon_1}{1-x} \quad \forall n\geq N \qquad (****)$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig [klein; Witz?], setze $\varepsilon_1=\varepsilon(1-x)$. Dann gilt $\forall n\geq N$

$$\left|S_n(x)-\frac{1}{1-x}\right| \overset{(**)}{=} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \overset{(****)}{<} \frac{\varepsilon_1}{1-x} = \varepsilon .$$

Zusammengefaßt ist also $S_n(x)$ für $|x|<1$ und n groß sehr nahe an $1/(1-x)$, und zwar im folgenden präzisen Sinn:

Zu jeder vorgegebenen "Toleranzgrenze" ε können wir einen Index N finden, sodass der Fehler

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right|$$

kleiner als die Toleranz ε ist, falls $n \geq N$.

Anzahl von Berechnungsschritten

Diese Formulierung stößt uns geradezu mit der Nase auf den kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg ...

§2 FOLGEN UND GRENZWERTE

Jetzt geht es los – und zwar mit der offiziellen

<u>2.1. DEF</u> (Folge) Sei M eine Menge. Eine <u>Folge in M</u> ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M$$

Gilt $M = \mathbb{R}$ bzw $M = \mathbb{C}$, so nennen wir a eine reelle bzw. komplexe Folge. [Zunächst wird fast immer $M = \mathbb{R}$ sein.]

<u>2.2. SCHREIBWEISE</u>. Nachdem eine Folge als eine spezielle Funktion definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl [EMA, 4.3]) hier gültig.

mit komischem Def.bereich

Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige spezielle Schreibweisen eingebürgert:

(i) Statt $a(1), a(2)$, usw schreiben wir a_1, a_2, usw.

(ii) Für die ganze Folge schreiben wir statt a oft auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder kürzer } (a_n)_n \text{ oder nur } (a_n)$$

(iii) Hin und wieder werden Folgen auftreten, die erst bei $n=1$ oder noch später beginnen – das bringen wir durch die Schreibweise $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder etwa $(a_n)_{n=17}^{\infty}$ zum Ausdruck.

Ja aber: dürfen die das? Soll heißen: Sind das dann überhaupt Folgen im Sinne der Def?

Ja schon, denn sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ eine Folge, die erst bei n_0 beginnt. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+n_0}$ eine „echte" Folge und es zahlt sich nicht aus, zwischen (a_n) und (b_n) zu unterscheiden.

2.3 BSP (Ganz einfache Folgen)

(i) Für alle $n\in\mathbb{N}$ setze $a_n = 2n$. Das ergibt die reelle Folge
$$(a_n)_n = (2n)_n = (0,2,4,6,8,\dots)$$

(ii) Sei $c\in\mathbb{R}$. Mit $b_n = c\ \forall n\in\mathbb{N}$ erhalten wir eine sog. konstante (reelle) Folge
$$(b_n)_n = (c)_n = (c,c,\dots).$$

Dafür hätten wir den Begriff aber nicht gebraucht...

(iii) Mit $c_n = 1/n$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$ erhalten wir

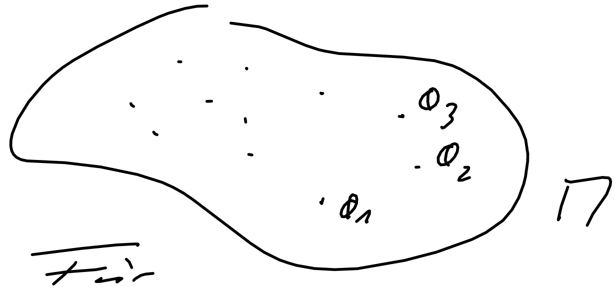
$$(c_n) = (1/n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

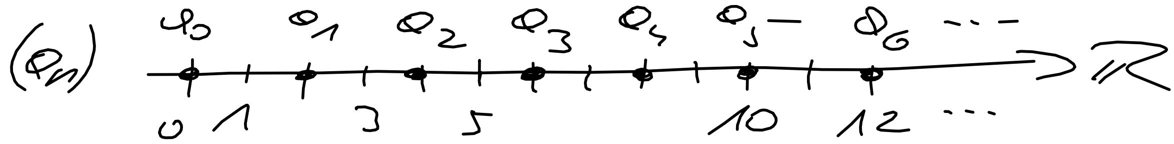
2.4. Veranschaulichung von Folgen.

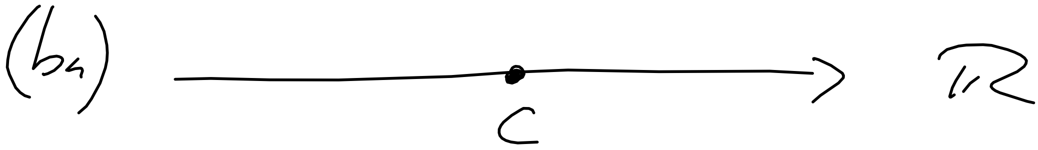
Es gibt 2 Wege Folgen in prägnanter Weise zu veranschaulichen.

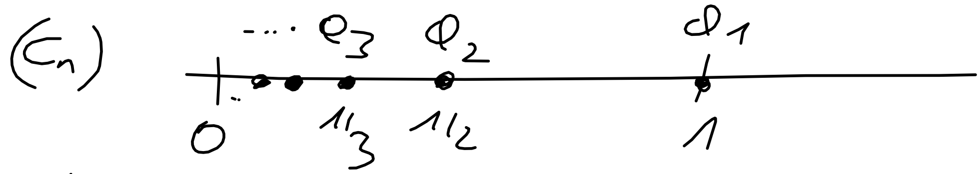
(i) Spaziergang in M:

Man trägt die Werte a_n der Reihe nach in M ein. Für die Bsp in 2.3 ergibt das



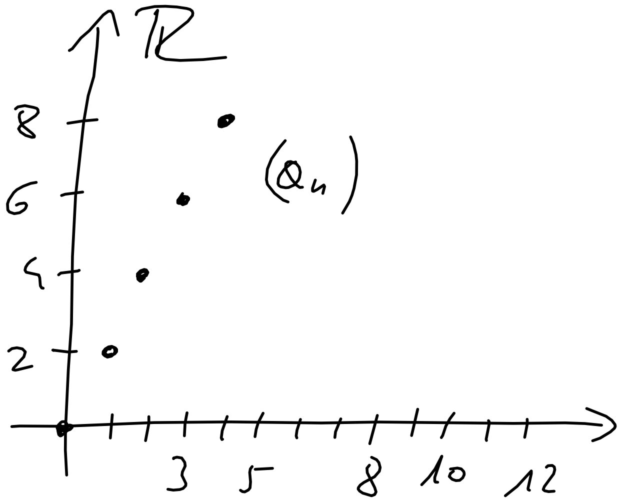


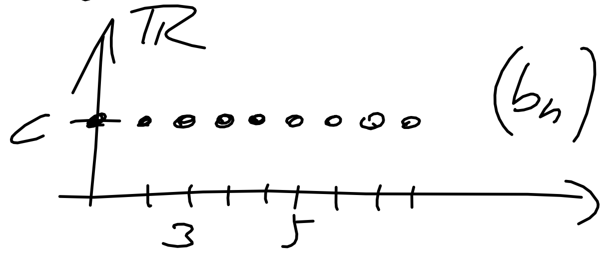


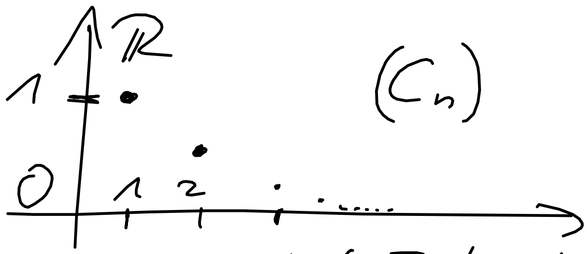


(ii) (Für reelle Folgen) Graph der Folge

Für die Bsp. aus 2.3. ergibt sich so







[siehe auch Mathematica-Notebook auf d. Materialienseite]

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii).

Die Vorzeichenmaschine

2.5 BSP (Einige wichtige Folgen)

(i) $a_n = (-1)^n$, $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

(ii) $b_n = \frac{n}{n+1}$, $(b_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$

(iii) $c_n = n/2^n$, $(c_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots)$

(iv) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert gemäß

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

f_n ist Summe seiner beiden Vorgänger

Es gilt also

$$(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$$

(v) Geometrische Folge: Sei $x \in \mathbb{R}$, setze $d_n = x^n$, $(d_n) = (1, x, x^2, \ldots)$

(vi) Geometrische Reihe (siehe 1.6. – war ja als wichtig angedroht!)

Sei wieder $x \in \mathbb{R}$ und definiere

$$s_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Wie in (v)

Dann gilt $(s_n) = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+\ldots+x^3, \ldots)$

[Darstellung gemäß 2.4 $\longrightarrow$ UE]

[Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Def ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Angelpunkt.]

2.6 DEF (Grenzwert) Sei (a_n) eine reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$.
Die Folge (a_n) konvergiert gegen a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N \qquad (2.1)$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) und wir schreiben

$a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ bzw. kürzer $a = \lim a_n$ und

$a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$ bzw. kürzer $a_n \to a \ (n \to \infty)$.

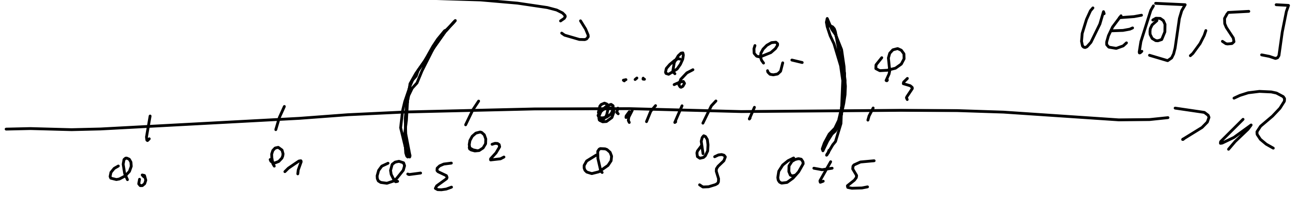
Sprich: a_n geht gegen a

2.7 GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG & SPRECHWEISEN

Für $\varepsilon > 0$ versteht man unter der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von $a \in \mathbb{R}$ alle Zahlen in $\mathbb{R}$, die von a Abstand kleiner als ε haben, also das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

[siehe auch ÜE $\boxed{0}$, 5]



Die Konvergenzbedingung (2.1) sagt nun: Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex N, sodass alle späteren Folgenglieder a_n $(n \geq N)$ in der ε-Umgebung des Grenzwerts a liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \ \ \forall n \geq N.$$

Andere Sprechweisen für die Konvergenzbedingung (2.1) sind

- die Folgenglieder a_n liegen schließlich in jeder (noch so kleinen?) ε-Umgebung des Grenzwerts a.

soll heißen ab einem bestimmten N, dh $\forall n \geq N$

bzw

- in jeder (noch so kleinen?) ε-Umgebung des Limes a liegen fast alle Folgenglieder a_n liegen.

soll heißen: alle bis auf endlich viele; nämlich bis auf $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_{N-1}$

[Weitere gültige & ungültige Formulierungen in der UE]

Wir machen noch die folgenden Sprechweisen offiziell

2.8 DEF (Divergent, Nullfolge)

(i) Ist eine Folge (a_n) nicht konvergent (dh $\nexists a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$) dann heißt (a_n) divergent.

(ii) Gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, dann heißt (a_n) Nullfolge.

2.9 BEHANDLUNG VON BSP (Alles schön & gut, aber wie zeige ich konkret $a_n \to a$?)

(i) Will ich konkret für gegebenes (a_n), a zeigen, dass $a_n \to a$, dann muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N gefunden werden

i.a. schwerer für kleine ε

der darf ruhig von ε abhängen und wird es i.a. auch tun; oft schreibt man deshalb $N(\varepsilon)$

sodass die Abschätzung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle a_n nach a_N gilt.

GROSSE FETTE WARNUNG: Niemals darf umgekehrt ε von N abhängen vgl. [ETIA, 3.2.3.3]

$\cancel{\varepsilon(N)}$

(ii) Will ich hingegen zeigen, dass $a_n \not\to a$, so muß (nur) ein Versager-ε gefunden werden, sodass die a_n beliebig spät aus der ε-Umgebung raushüpfen. Das ergibt sich nämlich aus der Verneinung der Konvergenzbedingung

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \right) =$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Es gibt zumindest ein Versager-ε

sodass egal wie spät

es immer noch ein n gibt

sodass a_n nicht in $U_\varepsilon(a)$ liegt

(iii) Bei konkreten Bsp ist es also förderlich zuerst eine Vermutung über Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuweisen, also entweder (i) zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ zu finden, ab dem alles gut ist, oder

(ii) ein Versager-ε zu finden für das auch beliebig späte Folgenglieder a_n aus der ε-Umgebung abhauen.

Bevor wir jetzt endlich mit konkreten Bsp anfangen noch eine einfache aber wichtige

2.10 BEOBACHTUNG (Der Folgenanfang ist egal)

Aus der Def 2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge (a_n) ändern, wenn endlich viele Folgenglieder verändert oder ganz weggelassen werden

[d.h. $\exists M \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq M$ die a_n gleich bleiben – es wird also nur am Folgenanfang herumgebastelt]

2.11. BSP

(i) Konstante Folgen konvergieren.

banales Bsp!

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $b_n = c \ \forall n$ [2.3(ii)] dann gilt $\lim b_n = c$.

So banal, dass N von ε unabhängig wählbar

Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle $N = 0$, dann gilt

$$|b_n - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge

das Extrabeispiel anschaulich klar vgl. 2.3(iii)

Sei $\varepsilon > 0 \overset{1.3(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: 1/N < \varepsilon$

eigentl. Archimedes

$\Longrightarrow \forall n \geq N: \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

[Bemerke 1.3(i) ist nichts anderes als die Feststellung Archimedes $\Rightarrow 1/n \to 0$; es gilt aber auch "$\Leftarrow$" siehe UE]

(iii) Die Vorzeichenmaschine divergiert. (anschaulich klar, oder?)

Sei $(a_n) = (-1)^n$, dann gibt es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$.

Wir beweisen das indirekt. [Für einen Beweis direkt aus der Def mit Versager-ε's $\rightsquigarrow$ UE]

Ang $\exists a \in \mathbb{R}: a_n \to a$.

Setze $\varepsilon = 1/2 \overset{2.6}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N \quad (*)$

Zusätzlich bemerke $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(1-1)| = 2$

Damit ergibt sich $\forall n \geq N$

fieser Trick!

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leadsto} \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \overset{(*)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad ⚡$$

(iv) $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ [Diese Konvergenz kann nach 2.5(ii) bzw UE vermutet werden]

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$ [vgl. (ii)]

Dann gilt $\forall n \geq N$

Wie das Amen im Gebet

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(v) $\lim \frac{n}{2^n} = 0$ [Vermutung wiederum nach 2.5(iii) bzw. UE]

Wir verwenden folgendes

LEMMA $\forall n \geq 4: n^2 \leq 2^n$ [Beweis UE $\boxed{0}$ 1(ii)]

Es gilt also $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 4$. $(*)$ (ok wegen (ii))

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle N so dass $N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right)$ $(**)$

Dann gilt $\forall n \geq N$

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \overset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2.12 MOTIVATION (Naja – zum Teil ganz schön trickreich...)

Wir haben gesehen, dass beim Bearbeiten von konkreten Bsp einiges an Kreativität und auch Übung nötig ist... Bevor wir weitere wichtige Bsp angehen erweitern wir unseren Begriffsapparat – was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

2.14 DEF (Beschränkte Folge) Sei (a_n) eine reelle Folge.

(a_n) heißt nach $\begin{Bmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{Bmatrix}$ beschränkt, falls $\exists K \in \mathbb{R}$:

$$a_n \begin{Bmatrix} \leq K \\ \geq K \end{Bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) heißt beschränkt, falls (a_n) nach oben und unten beschränkt ist.

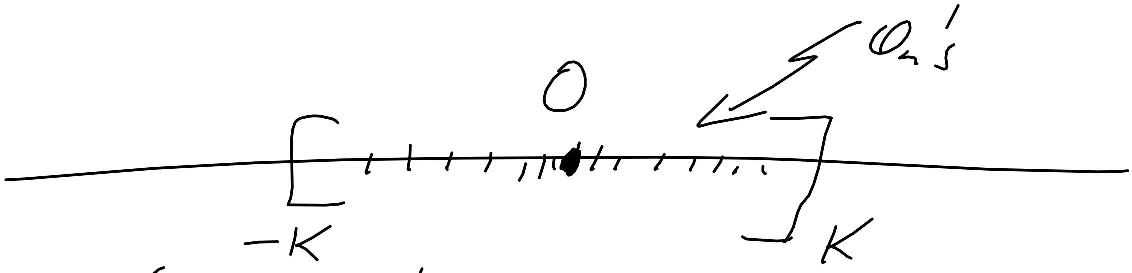
2.15 BEOBACHTUNG (Beschränkte Folgen sind eingesperrt)

Def 2.14 besagt,

$$(a_n) \text{ beschränkt} \iff \exists K>0 : |a_n| \le K \ \forall n \in \mathbb{N}$$

[wähle das Max der K's in 2.14 für oben bzw unten]

Geometrisch bedeutet das, dass alle a_n im Intervall $[-K, K]$ liegen (also dort eingesperrt sind)



2.16 Bsp (Un)-beschränkte Folgen

(i) $a_n = n$ ist nach unten durch 0 beschränkt
$[a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}]$
aber nicht nach oben

d.h. K kann 0 gewählt werden

[Folgt direkt aus dem Archimed. Axiom:
$\forall K>0$ gilt $\exists n \in \mathbb{N}: n > K$ $[x=1, y=K]$]

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist beschränkt.

nach unten beschr.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ ist durch 0 n.u.b $[0 < 1/n \ \forall n \in \mathbb{N};$ 1.5(iv)$]$
und durch 1 n.o.b $\left[\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \le 1 \ \forall 1 \le n \in \mathbb{N}\right]$

Die Tatsache, dass die konvergente Folge $(1/n)$ beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein allg. Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

2.17 SATZ: (Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt)

Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt

Beweis. Sei $a = \lim a_n \underset{\varepsilon=1}{\overset{2.6}{\Longrightarrow}} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq N$

Schon wieder das...

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nun setze $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1\}$.
Dann gilt $|a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.18 WARNUNG (beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergent)

Die Umkehrung von 2.17. ist FALSCH. Ein Gegenbsp ist etwa die Vorzeichenmaschine $a_n = (-1)^n$:
$|a_n| \leq 1 \ \forall n$ aber a_n divergent nach 2.11(iii)

Wir arbeiten nun unsere Beispielliste aus 2.5 weiter ab.

2.19 BSP

(i) Die Fibonaccifolge ist divergent.

$f_0 = 1 = f_1$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Wir zeigen, dass (f_n) unbeschränkt ist $\overset{2.18}{\Longrightarrow}$ (f_n) divergent.

Genauer behaupten wir: $\boxed{f_n \geq n \quad \forall n \geq 5}$

Beweis mittels Induktion:

$n=5$: $f_5 = 5$ (vgl 2.5(iv))

$n \mapsto n+1$: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \underset{(IV)}{\geq} n + (n-1) \underset{n \geq 6}{\geq} n + (2-1) = n+1$ $\square$

(ii) Für ein (beliebiges aber fixiertes) $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die geometrische Folge $a_n = x^n$

Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von x ab

FALL (1): $\boxed{|x|>1 \Rightarrow x^n \text{ divergent}}$

Wachstum von Potenzen

$|x|>1 \overset{1.5(i)}{\Longrightarrow} \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |x|^n > K$
$[b=|x|]$

$\Longrightarrow x^n$ unbeschränkt $\overset{2.17}{\Longrightarrow} x^n$ divergent

FALL (2): $|x|=1$ also $x=1 \Rightarrow a_n = 1\ \forall n \overset{2.11(i)}{\Longrightarrow} a_n \to 1$

oder $x=-1 \Rightarrow a_n = (-1)^n \Rightarrow$ div
2.11(iii)

FALL (3): $\boxed{|x|<1 \Rightarrow x^n \to 0\ (n\to\infty)}$

der interessante Fall

das war leicht

Falls $x=0 \Rightarrow x^n = 0\ \forall n \geq 1 \overset{2.11(i)}{\Longrightarrow} a_n \to 0$

Bleibt nur der Fall $0<|x|<1$. Sei $\varepsilon>0$

$\overset{1.5(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}:\ |x|^N < \varepsilon$ und damit $\forall n \geq N$
$[b=|x|]$

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon.$$

2.20 HOPPALA (Der Grenzwert?)

Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge geredet. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa 2 oder 3? Zum Glück gilt...

[vgl. die Anmerkung in [EMA, grüne Box, p. 118]]

2.21. SATZ (Eindeutigkeit des Limes)

Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes

Beweis. [Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe 2 verschiedene Limiten und folgern daraus einen Widerspruch.]

Ang: $\exists\, a \neq b$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b \Rightarrow \frac{|a-b|}{3} =: \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$$

$\overset{a \neq b}{\Longrightarrow} 1 < 2/3$ ↯ $\square$

2.22 MOTIVATION (Weitere theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz)

Ganz im Sinne von 2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limiten weitere Hilfestellungen bitter nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können um Grenzwerte komplizierterer Folgen zu berechnen

2.23 SATZ (Summen & Produkte konvergenter Folgen)

Seien (a_n) und (b_n) konvergente (reelle) Folgen. Dann konvergieren auch $(a_n+b_n)_n$ und $(a_n \cdot b_n)_n$ und es gilt

$$\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$
$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

Die Summe konvergenter Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte; detto fürs Π

Beweis. Sei $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$

Summe: Wir müssen zeigen, dass $a_n + b_n \to a+b$.

Sei $\varepsilon > 0 \implies \varepsilon/2 > 0$ und daher

$$\exists N_1 \; \forall n \geq N_1 \; |a - a_n| < \varepsilon/2, \text{ und}$$
$$\exists N_2 \; \forall n \geq N_2 \; |b - b_n| < \varepsilon/2$$

$\implies \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$|(a_n+b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$
$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Produkt: zz: $a_n b_n \to ab$

(a_n) konv $\overset{2.17}{\implies}$ (a_n) beschr, genauer: $\exists K_1 > 0 : |a_n| \leq K_1 \; \forall n$

Definiere $K := \max(K_1, |b|) > 0$.

Sei nun $\varepsilon > 0 \implies \varepsilon/2K > 0$ und wegen $a_n \to a$, $b_n \to b$ gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_1$$
$$\exists M_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_2$$

$\implies \forall n \geq M := \max(M_1, M_2)$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b - b_n) + (a_n - a) b|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\le} |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$

$$< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K = \varepsilon \qquad \square$$

2.24 BEM (Polierte Beweise) Natürlich ist insbesondere der letzte Beweis POLIERT, in dem Sinn, dass ε und K so gewählt wurden, dass am Schluss $< \varepsilon$ dasteht und nicht etwa $2K\varepsilon$. Letzteres wäre zwar auch okay, aber eben nicht ganz so lässig. [VE]

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der Δ-Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von $\varepsilon/2$ - Beweisen [vgl. Summe in 2.23]. Wir werden aber sehr bald auch $\varepsilon/3$ - Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der Δ-Ungl. angedeutet.

Statt weiterer „Methodologie" lieber eine (einfache) Folgerung aus 2.23

2.25 KOR: (Linearkombinationen konv. Folgen)

Seien (a_n), (b_n) konvergente (reelle) Folgen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$$

Beweis. Das Korollar folgt aus 2.23 mittels eines Tricks: Wir interpretieren die Folge $(\lambda a_n)_n$ als Produkt zweier Folgen

$$(\lambda a_n) = (\lambda)_n \cdot (a_n)$$

konstante Folge $(\lambda)_n \to \lambda$ (2.11(i)) $\quad \overset{2.23}{\Longrightarrow} \lambda a_n \to \lambda \lim a_n$