2.41 MOTIVATION. (Ein genauerer Blick auf divergente Folgen)

Zum Abschluss dieses langen § werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet

- die Vorzeichenmaschine $(-1)^n$ ist divergent aber beschränkt
- $a_n = n$ ist unbeschränkt und (daher) divergent.

Wir führen nun für diese 2. Art – nämlich über alle Schranken hinauswachsend – der Divergenz einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmte" Divergenz.

2.42 DEF (Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz)

(i) Eine (reelle) Folge (a_n) heißt uneigentlich konvergent oder bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder kurz ∞), falls

$$\underbrace{\forall K \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: \ a_n > K \quad \forall n \geq N}$$

wächst schließlich über jede Schranke hinaus

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $[a_n \to \infty]$

(ii) Wir sagen a_n konvergiert uneigentlich, oder divergiert bestimmt gegen $-\infty$, falls $(-a_n) \to \infty$ und schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $[a_n \to -\infty]$.

2.43 BEOBACHTUNG (Bestimmte Div. & Schranken)

(i) $a_n \to -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: \ a_n < K \quad \forall n \geq N$

(ii) Bestimmt divergente Folgen sind unbeschränkt, genauer:

$a_n \to \infty \implies (a_n)$ nach oben unbeschränkt

$a_n \to -\infty \implies (a_n)$ —"— unten —"— —

2.44 BSP (Bestimmt divergente Folgen)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim(-n^2) = -\infty$

(ii) $a_n = (-1)^n n$ ist unbeschränkt daher divergent aber <u>nicht</u> bestimmt divergent, denn $a_{2n} \to \infty$ und $a_{2n+1} \to -\infty$

Also ist die Umkehrung von 2.43(ii) falsch

$$\boxed{\text{bestimmt divergent} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{unbeschränkt}}$$

2.45 PROP (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte)

Seien (a_n), (b_n), (c_n) (reelle) Folgen mit $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n, c_n \to \infty$

Dann gilt

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim(b_n + a_n) = \infty$

(ii) $\lim(b_n + c_n) = \lim(c_n + b_n) = \infty$

(iii) $\lim(a_n - b_n) = \lim(-b_n + a_n) = -\infty$

(iv) falls $a > 0$: $\lim(a_n b_n) = \lim(b_n a_n) = \infty$

(v) $\lim(b_n c_n) = \lim(c_n b_n) = \infty$

Beweis: [UE] $\square$

2.46 WARNUNG. Es gibt keine analogen Rechenregeln für die Differenz uneigentlich divergenter Folgen bzw das Produkt von uneig. div. Folgen mit Nullfolgen:

- $\lim n = \infty$, $\lim n^2 = \infty$, $\lim(n-n) = 0$, $\lim(n - n^2) = -\infty$
- $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim(n \frac{1}{n}) = 1$, $\lim(n \frac{1}{n^2}) = 0$

2.47 PROP (Kehrwerte best. div. Folgen & Nullfolgen)

Sei $(a_n)_n$ eine (reelle) Folge

(i) $\lim a_n = \infty$ [oder $-\infty$] $\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$

und $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0$

(ii) $\lim a_n = 0$, $a_n > 0 \ \forall n$ [bzw. $a_n < 0 \ \forall n$] $\Longrightarrow \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty$ [bzw. $-\infty$]

Beweis.

(i) • Es genügt $a_n \to +\infty$ zu betrachten [vgl. Def 2.42(iii)]

• Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass wir $\frac{1}{a_n}$ zumindest für große n bilden können. Er folgt unmittelbar aus Def 2.42(i) mit $K=0$:

$$K := 0 \overset{2.42(i)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n > K = 0 \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerke: $\frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall n \geq n_0$

• Wir zeigen $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$, setze $K = 1/\varepsilon$

$$\overset{2.42(i)}{\Longrightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N}: a_n > K = 1/\varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_0): \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \, .$$

(ii) [UE] $\square$

2.48 BSP. $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0 \overset{2.47(ii)}{\Longrightarrow} \lim\left(\frac{2^n}{n}\right) = \infty$

[2.11(v)] $\quad$ $\left[\frac{n}{2^n} > 0 \ \forall n\right]$

2.49 BEM (Uneigentliche Divergenz vererbt sich nach oben resp. unten)

Falls $a_n \le b_n$ für fast alle n und $a_n \to \infty$ dann folgt (direkt aus Def 2.46(ii)) $b_n \to \infty$.

Analog für $a_n \le b_n$ und $b_n \to -\infty$.

---

§3 VOLLSTÄNDIGKEIT VON $\mathbb{R}$, KONVERGENZPRINZIPIEN

3.1 MOTIVATION (Ordnungsvollständigkeit) Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (auch Supremumseigenschaft; $\boxed{0}$, 1.9)

(V) Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum)

kleinste obere Schranke

an wesentlichen Stellen verwendet. Z.B. folgt die Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. $\boxed{0}$ 1.11 (i)] und diese wiederum impliziert $\frac{1}{n} \to 0$.

In diesem § wollen wir (V) und seinen Konsequenzen weiter nachspüren – (V) ist der rote Faden der sich durch die gesamte Analysis zieht.

Zu diesem Zweck benötigen wir ersteinmal 2 neue Begriffe nämlich Teilfolge und Häufungswert um zu einem ersten Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

3.2 MOTIVATION (Teilfolge) Wir lernen hier ein Verfahren kennen um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln – dieses ist intuitiv sehr einfach zu verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verwirrend).

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge (a_n) erhält man, wenn man einige Glieder von (a_n) auslässt, z.B.

$(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ hat etwa die TF

$(0, 4, 8, 16, \dots)$, $(0, 6, 12, 18, \dots)$, [alle durch 3 teilb.]

$(0, 4, 10, 18, \dots)$ [a_1 ausgelassen, a_3, a_4 ausgelassen, ...]

Wesentlich dabei ist es, dass

- nur Glieder der Ausgangsfolge (a_n) verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keinerlei Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder a_n verwendet werden [lach: Jede Folge ist TF von sich selbst] oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine TF von (a_n) sind z.B.

$(0, 1, 2, 4, 6, \dots)$ oder $(0, 2, 6, 4, \dots)$ Reihenfolge verändert

kommt in (a_n) nicht vor bzw. $(0, 2, 2, 4, 6, \dots)$ kommt doppelt vor

Technisch beschreibt man diesen Prozess indem man aus der Menge der Indizes $0, 1, 2, 3, \dots$ gewisse auswählt also z.B. $1, 3, 5, 7, \dots$ und damit die zugehörigen a_n's, also $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ Dh aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewisse $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ [hier $n_0=1, n_1=3, n_2=5, n_3=7$] mit $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$. Nun offiziell:

3.3 DEF (Teilfolge) Sei $(a_n)_n$ eine Folge.

Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. eine Folge natürlicher Zahlen) mit der Eigenschaft $n_0<n_1<n_2<\dots$ (d.h. $n_k<n_{k+1}\ \forall k\in\mathbb{N}$) dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}=(a_{n_0},a_{n_1},a_{n_2},\dots)$$

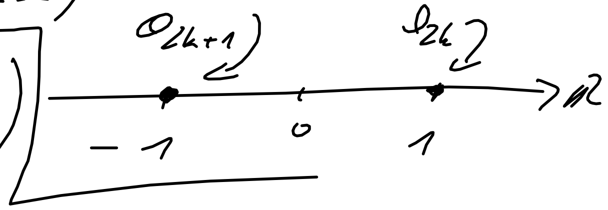
Teilfolge (TF) der Folge (a_n).

3.4 BSP (TF).

(i) $a_n=(-1)^n$ hat zB Teilfolgen $(a_{2k})_k=(1,1,\dots)=(1)_k$ (d.h. $n_k=2k$)

und $(a_{2k+1})_k=(-1,-1,-1,\dots)$ ($n_k=2k+1$)

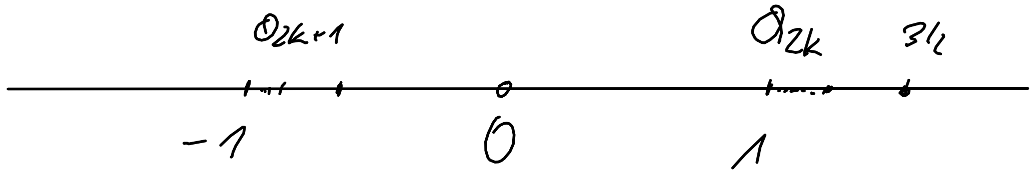
(ii) $b_n=\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}=\left(0,1+\frac{1}{2},-1+\frac{1}{3},\dots\right)$



hat etwa als TF

$$(b_{2k})_k=\left(1+\frac{1}{2k}\right)_{k\geq 1}=\left(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\dots\right)$$

$$(b_{2k+1})_k=\left(-1+\frac{1}{2k+1}\right)_{k\geq 0}=\left(-1+1=0,-1+\frac{1}{3},\dots\right)$$



(iii) $(c_n)_{n\geq 1}=\left(1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},6,\dots\right)=\begin{cases} n & n \text{ gerade}\\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade}\end{cases}$

hat etwa TF $(c_{2k})_{k\geq 1}=(2k)$

$$(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

(iv) I.a. gibt es mehrere Wahlen von $(n_k)_k$ um dieselbe TF zu erzeugen. So ist etwa auch $(a_{4k})=(1)_k$

(v) Keine TF von (a_n) ist $(-1, 0, -1, 0, \dots)$ [0 kommt in a_n nicht vor]

Keine TF von (b_n) ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ [$1+\frac{1}{3}$ kommt nicht vor]

bzw. $\left(-1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{5}\right)$ [Reihenfolge falsch, d.h. $\nexists$ Wahl von n_k mit $n_k < n_{k+1}$]

3.5 MOTIVATION (Häufungswert)

In 3.4 (i) und (ii) haben die Punkte ± 1 eine spezielle Rolle: sie sind jeweils Grenzwerte von Teilfolgen

[$a_{2k} = (1)_n \to 1$, $a_{2k+1} = (-1) \to -1$,

$b_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right) \to 1$, $b_{2k+1} = -1+\frac{1}{2k+1} \to -1$]

Solche Punkte sind interessant & verdienen einen eigenen Namen:

3.6 DEF (Häufungswert einer Folge) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a heißt Häufungswert (HW) von (a_n), falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) existiert mit

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a}$$

3.7 BSP (HW)

(i) Sei $a = \lim a_n$, dann ist a [federweise] auch Häufungswert

(ii) Die VZ-Maschine $a_n = (-1)^n$ hat die beiden HW ± 1

(iii) $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ hat ebenso die beiden HW ± 1

(iv) $c_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat als einzigen HW 0.

3.8 MOTIVATION (Wieviele Folgenglieder sind nahe zum HW?)

Sei $a = \lim a_n$, dann liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) a_n

[Vgl. 2.7]

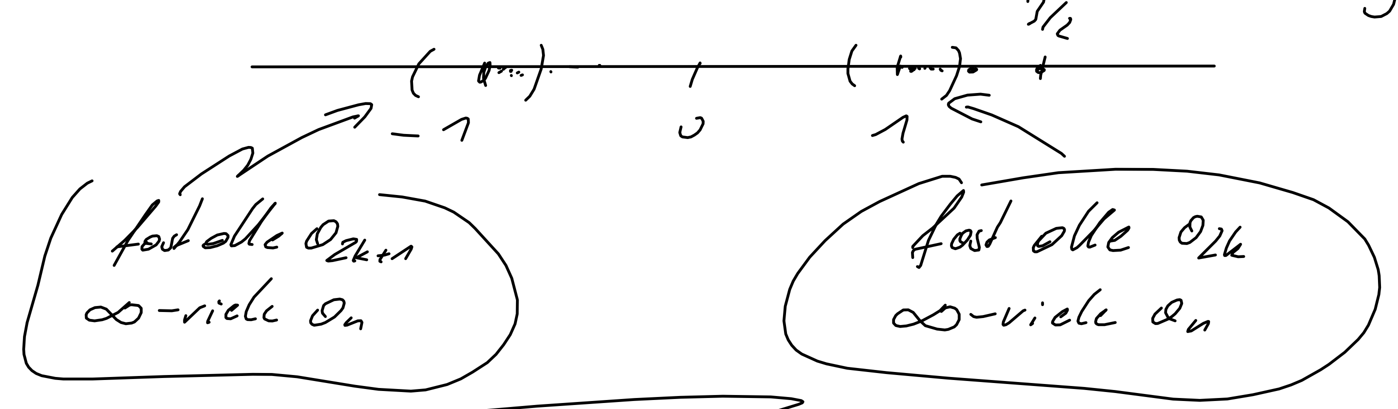
Gilt (nur) a ist HW von (a_n), dann $\exists$ (nur) TF a_{n_k} mit $a_{n_k} \to a$; also liegen alle bis auf endlich viele der a_{n_k} in jedem $U_\varepsilon(a)$ — das sind zumindest unendlich viele der a_n. Diese Eigenschaft ist charakterisierend für HW — wie die nächste PROP lehrt. Vorher noch eine

WARNUNG: In obiger Situation müssen die alle bis auf endlich vielen a_{n_k} nicht schon alle bis auf endlich viele der a_n sein. Mit anderen Worten

lim eindeutig 2.2.1

$$a \text{ HW von } a_n \;\overset{3.7(i)}{\Longleftarrow}\; \not\Longrightarrow \; a = \lim a_n$$

Ein expliziter Gegenbsp ist etwa $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ mit HW ± 1 (3.7(iii)). In jedem $U_\varepsilon(1)$, $U_\varepsilon(-1)$ liegen ∞ viele b_n. Aber für $\varepsilon < 1$ gilt $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(-1) = \emptyset$ und daher können in keiner der beiden Mengen fast alle b_n liegen (es blieben für die andere viel zu wenige b_n übrig!)



3.8 PROP (Charakterisierung von HW) Sei (a_n) eine (reelle) Folge, $a \in \mathbb{R}$.

a ist HW von (a_n) $\Longleftrightarrow$ Jede ε-Umgebung von a enthält unendlich viele a_n, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists m \geq N: \; a_m \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

die Folge kommt immer wieder in $U_\varepsilon(a)$ vorbei.

Beweis: [Da es sich um eine Äquivalenz handelt....]

„$\Longrightarrow$": a HW von (a_n) $\underset{3.6.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TF $(a_{n_k})_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Hinrichtung

Sei $\varepsilon > 0$ $\overset{2.6}{\Longrightarrow}$ $\exists K\ \forall k \geq K\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$

Sei $N \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow \exists k_1 \geq K$ mit $n_{k_1} \geq N$

[Def 3.3: $n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$]

Setze $m = n_{k_1}$ $\Longrightarrow$ $a_m = a_{n_{k_1}} \in U_\varepsilon(a)$

„$\Longleftarrow$": Es gelte die Bed. auf der r.S. der Prop also

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geq N: \quad a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (*)$$

- Wir konstruieren induktiv eine TF $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

$k=1$: Setze $\varepsilon = 1 = N$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists n_1 \geq 1: \ a_{n_1} \in U_1(a)$

$k \mapsto k+1$: Sei $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$ schon definiert

Setze $\varepsilon = 1/k+1$, $N = n_k + 1$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists n_{k+1} \geq N > n_k : a_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$

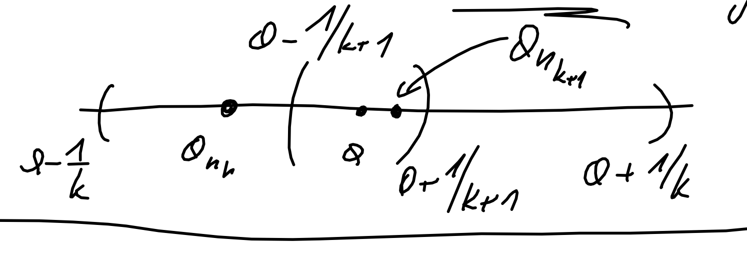
- Wir zeigen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$:

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{K} < \varepsilon$ [1.3(i)]

$\Longrightarrow \forall k \geq K \quad |a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$ ∎

Da nach Konstruktion $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

Idee der Konstruktion: Zoomen mit Umgebungen



3.10 MOTIVATION (In Richtung Bolzano-Weierstraß)

Wir wissen schon [2.7, 2.8]: (a_n) beschr $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ (a_n) konvergent

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich die (abzählbar vielen) Folgenglieder in einem beschränkten Intervall tummeln — und dann müssen sich zumindest manche nahe kommen und einen HW bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reeller Folgen ist.

3.11 THM (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert

Beweis. (1) Wir verwenden die Ordnungsvollständigkeit um einen Kandidaten für einen HW zu bekommen.

(V) als Existenzmaschine

a_n beschr $\overset{\text{Def 2.14}}{\Longrightarrow}$ $\exists K>0 : |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Menge

Idee

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$, denn $K \in A$ [kein a_n erfüllt $a_n > K$]
- A ist n.u.b., denn falls $x < -K \Rightarrow x \notin A$, also ist zB $K-1$ untere Schranke
  alle $a_n \geq -K$

$\overset{(V)}{\Longrightarrow} \exists\ a := \inf A$

Hier passiert es

(2) Wir zeigen, dass a HW der Folge (a_n) ist: Sei $\varepsilon > 0$

- $a+\varepsilon > a$ ist keine untere Schranke für A $[a = \inf A]$

  $\Longrightarrow \exists x \in A: \ a < x < a+\varepsilon$

  $\overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} a_n \le x < a+\varepsilon$ für fast alle n, d.h.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \quad a_n < a+\varepsilon \qquad (*)$$

- a ist unt. Schr. v. $A \Longrightarrow a-\varepsilon \notin A \overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} a_n > a-\varepsilon$ für unendlich viele n, d.h.

$$\forall n_1 \in \mathbb{N} \ \exists m \ge n_1: \quad a-\varepsilon < a_m \qquad (**)$$

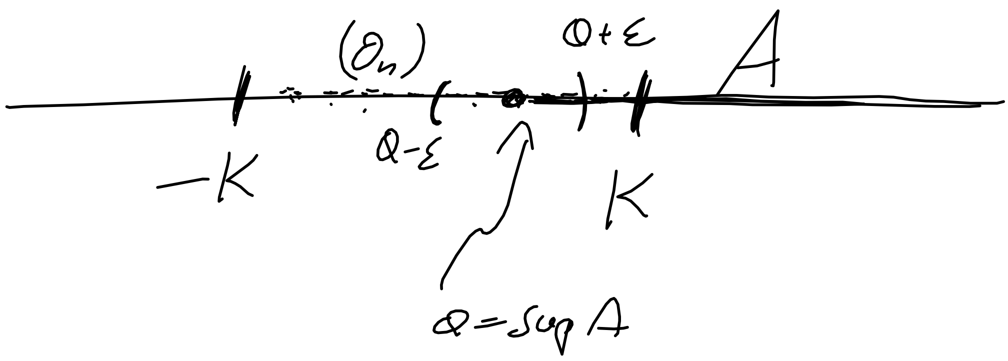
- Kombination von $(*)$ & $(**)$ gibt die Beh.

Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben, dann wähle $n_1 = \max(n_0, N)$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists m \ge n_1 \ge N: & a-\varepsilon < a_m \\ \overset{(*)}{\Longrightarrow} [m \ge n_0] & a_m < a+\varepsilon \end{array}\right\} \ a_m \in U_\varepsilon(a)$$

$\square$

Skizze zur Konstruktion

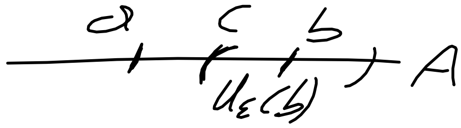


3.12 BEM (a ist der größte HW)

Das im obigen Beweis konstruierte a ist der größte HW von (a_n).

Denn sei $b > a \xRightarrow{a = \inf A} \exists c \in A: a < c < b$

Setze $\varepsilon = b - c$ (>0!) $\Longrightarrow U_\varepsilon(b)$ enthält höchstens endlich viele a_n (Def A)



(für diese gilt ja $a_n > c \in A$)

$\Longrightarrow b$ ist nicht HW von x_n

Analog dazu können wir auch den kleinsten HW von (a_n) konstruieren [dieser könnte gleich dem größten sein...]

Diese speziellen HW verdienen einen eigenen Namen

3.13 DEF (lim inf, lim sup)

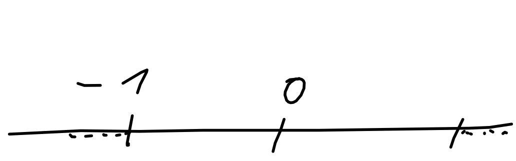
(i) Sei (a_n) eine beschränkte (reelle) Folge. Der größte [kleinste] HW a von (a_n) [$\exists$ wegen BW 3.11] heißt Limes superior [inferior] bzw kürzer limsup [liminf] und wir schreiben

$$a = \limsup a_n \equiv \overline{\lim}\, a_n \quad \left[\liminf a_n \equiv \underline{\lim}\, a_n\right]$$

(ii) Falls (a_n) nicht von oben [unten] beschränkt ist, dann setzen wir $\overline{\lim}\, a_n = \infty$ $\left[\underline{\lim}\, a_n = -\infty\right]$.

3.14 BSP (lim inf/sup)

(i) $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$



$\overline{\lim}\, a_n = 1$, $\underline{\lim}\, a_n = -1$

(ii) $a_n = n$ hat keinen HW und es gilt $\overline{\lim}\, a_n = \infty$

$\nexists\, \underline{\lim}\, a_n$

3.15 MOTIVATION (Konvergenzprinzipien)

Erinnern wir uns an unsere bisherigen Konvergenzbeweise (VO[1] §2 und UE): Bevor es richtig losgehen konnte, haben wir meist einen (guten) Kandidaten für den Limes gebraucht. Das ist in der Praxis natürlich ein großer Nachteil!

Außer bei „einfachen" Folgen: Rechenregeln f. Limiten, Sandwich-Lemma oder unbeschränkten Folgen

Wir werden nun die „Existenzmaschine" Bolzano-Weierstraß so modifizieren, dass sie uns unter passenden Bedingungen nicht nur die Existenz eines HW sondern schon des Limes liefert – ohne einen Kandidaten f. den Grenzwert zu benötigen.

Die mächtigsten dieser Konvergenzprinzipien sind das Cauchy-Prinzip und das Konvergenzprinzip f. monotone, beschränkte Folgen.

Als Bonus werden wir sehen, dass es manchmal relativ leicht ist, den Grenzwert auszurechnen, wenn schon klar ist, dass überhaupt Konvergenz vorliegt.

stellt unsere bisherige Methode auf den Kopf...

Als erstes benötigen wir dazu den Begriff Cauchy-Folge. Das sind Folgen, bei denen sich die Folgenglieder schließlich beliebig nahe kommen. Anschaulich im Bild des „Spaziergangs" in $M=\mathbb{R}$ (vgl. 2.4(i)) versandet die Folge d.h. die Schritte werden immer kleiner ...

Genauer

Achtung nicht nur die einzelne Schrittweite

3.16 DEF (Cauchy-Folge) Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge (CF), falls

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq N\quad |a_n-a_m|<\varepsilon}$$

3.17 BEM (Bedeutung von CF)

Wir werden gleich sehen dass CF genau die konvergenten Folgen sind – daher erübrigt es sich Bsp anzuschauen.

Im Sinne von 3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung ob eine Folge (a_n) eine CF ist (im Prinzip) den Limes a nicht kennen muß [a kommt in 2.16 keines vor – das wird mit dem Auftreten von 2 Indices (m & n) erkauft ...].

3.18 THM (Cauchy-Prinzip) Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt

$$\boxed{(a_n) \text{ konvergiert} \iff (a_n) \text{ ist CF}}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$": (die „leichte" Richtung – ein $\varepsilon/2$-Beweis)

Setze $a := \lim a_n$

$$\overset{2.6}{\Longrightarrow} \exists N\in\mathbb{N}: |a_n-a|<\varepsilon/2 \quad \forall n\geq N.$$

Dann gilt $\forall m,n\geq N$

$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \leq |a_n-a|+|a_m-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

„$\Leftarrow$": (Die schwierigere Richtung in 3 Schritten) Sei (a_n) CF

(1) (a_n) ist beschränkt

Setze $\varepsilon = 1$ in 3.16 $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < 1 \ \forall m, n \geq N$

Setze $m = N \Longrightarrow |a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| < 1 \ \forall n \geq N$

verkehrte Δ-Ungl

$\Longrightarrow |a_n| \leq |a_N| + 1 \ \forall n \geq N$

Die ersten N Glieder erledigen wir wie im Beweis von 2.14:
Sei $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, dann gilt

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2) Bolzano-Weierstraß $\Longrightarrow \exists a$ HW von (a_n)

(3) $a_n \to a$: [$\varepsilon/2$-Beweis mit Hineinschmuggeln eines a_k nahe dem HW a]

Sei $\varepsilon > 0$.

(a_n) CF $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m, n \geq N \quad (*)$

a HW $\Longrightarrow \exists k \geq N \ |a_k - a| < \varepsilon/2 \quad (**)$

Das ist die Idee!

Daher gilt $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| = |a_n - a_k + a_k - a|$$

$$\leq |a_n - a_k| + |a_k - a_n|$$

$$\overset{(*),(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

— NICHT VORGETRAGEN — 82

3.19 BSP (Konvergenz ohne Limes)

Sei (ϑ_k) eine reelle Folge mit $|\vartheta_k| \leq \theta < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Reihe $\sum \vartheta_k^k$ und zeigen mittels Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz.

(i) Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.

Wie üblich setzen wir $s_n = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k^k$. Dann gilt für $m < n$

vgl. 2.33

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \vartheta_k^k\right| \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |\vartheta_k|^k \leq \sum_{k=m+1}^{n} \theta^k$$

Trick 17

$$= \sum_{k=0}^{n} \theta^k - \sum_{k=0}^{m} \theta^k \overset{1.6}{=} \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{m+1}}{1-\theta}$$

$$= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1-\theta} = \theta^{m+1} \frac{1-\theta^{n-m}}{1-\theta} \underset{\theta \geq 0}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta} \quad (*)$$

(ii) (s_n) ist CF: Sei $\varepsilon > 0$.

Wegen $0 \leq \theta < 1 \overset{1.5(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: \ 0 \leq \theta^{m+1} < \varepsilon(1-\theta) \quad \forall m \geq N$

Daher gilt $\forall n > m \geq N$

$$|s_n - s_m| \overset{(*)}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon \quad (**)$$

noch nicht fertig!

Ganz analog beweist man $(**)$ für alle $m > n \geq N$.
Schließlich gilt für $m = n \geq N$, dass $s_m - s_n = 0$
Also ist (s_n) insgesamt eine CF

(iii) $3.18 \Longrightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k^k$ konvergiert

ABER: Wir haben keine Ahnung was der Limes $\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k^k$ ist!
i.A. kann dieser auch nicht berechnet werden.

3.20 MOTIVATION (Monotone Folgen – Konvergenzprinzip)

Um das in 3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschr. Folgen anzugehen müssen wir zuerst den ersten Begriff exakt fassen.

3.21 DEF (Monotonie von Folgen) Sei (a_n) eine reelle Folge.

(i) (a_n) heißt [streng] monoton wachsend, falls

$$a_n \leq a_{n+1} \quad [a_n < a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

(ii) (a_n) heißt [streng] monoton fallend, falls

$$a_n \geq a_{n+1} \quad [a_n > a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

(iii) Falls $\exists N \in \mathbb{N}$ sodass $(*)$ bzw $(**)$ nur $\forall n \geq N$ gelten so sagen wir (a_n) hat die respektive Eigenschaft ab N.

3.22 BSP (Monotone Folgen)

Die Fibonacci-Folge (f_n) [siehe 2.5(iv)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab $N=2$.

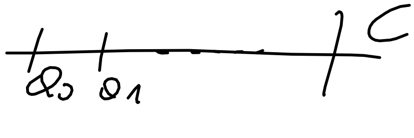
Tatsächlich gilt $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$ und $f_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$ und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \quad \forall n \geq 2$$

3.23 BEMERKUNG. (Monotonie & Schranken)

(i) Eine mon. wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt, denn sei $a_n \leq C$ dann gilt $\forall n$

$$C \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0$$



(ii) Analog für n.u.b Folgen, die mon. fallen.

(iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen dass die Folgen sogar konvergieren. Vorher noch ein motivierendes

3.24 BSP (Approximation für $\sqrt{3}$)

Sei $x_0 > 0$. Wir definieren rekursiv die Folge (x_n) via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Bemerke $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. [Induktion]

(1) (x_n) ist n.u.b. genauer $\forall n \geq 1$: $3 \leq x_n^2$.

Tatsächlich gilt

$$x_{n+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - 3/x_n\right)^2 \geq 0 .$$

(2) (x_n) ist mon. fallend ab $N=1$.

Für $n \geq 1$ gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 3\right) \overset{(1)}{\geq} 0$$

(3) (x_n) konvergiert genauer $\exists x := \lim x_n$

laut dem in 3.23(iii) angekündigten Thm 3.25 (unten) das wir hier schon verwenden.

[Sinn ist es zu sehen, dass uns (3) ermöglicht $\lim x_n$ auszurechnen!]

(4) $\lim x_n = \sqrt{3}$

Zuerst bemerke $0 < \sqrt{3} \leq x$ (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (*) zum Limes über:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & 1/2\left(x + 3/x\right) \end{array}$$

Also gilt $x = \frac{1}{2}(x + 3/x) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$

$\Rightarrow x^2/2 = 3/2 \Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{3}}}$.

Jetzt aber schleunigst zum Thm mit seinem erfreulich einfachen Beweis

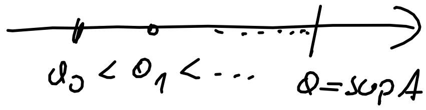
3.25 THM (KP für beschränkte monotone Folgen)

Jede nach oben beschränkte und [ab einem $N \in \mathbb{N}$] monoton wachsende Folge konvergiert.
Analog für n.u.b und mon. fallende Folgen.

Beweis. Sei (a_n) nob & mon wachsend.

(1) Produzieren eines Kandidaten für $\lim a_n$ [(V) ab Existenzmaschine]

Intuitives Bild:



die a_n's werden gegen a gedrängt

Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

3.23(i) $\Rightarrow$ a_n beschränkt $\Rightarrow$ A beschränkt

[$A \neq \emptyset$, klar]

$\overset{(V)}{\Longrightarrow} \exists\, a := \sup A$

(2) $\underline{\lim a_n = a}$.

nicht obere Schranke lt. Def sup

Sei $\underline{\varepsilon > 0}$.

$a = \sup A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad a - \varepsilon < a_N \leq a$

(a_n) mon wachsend $\Rightarrow \underline{\forall n \geq N}: \quad a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$

Daher $\forall n \geq N \qquad \underline{|a - a_n| < \varepsilon}$.

$\square$

3.26 BEOBACHTUNG $(a_n \to \sup A)$

Obiger Beweis zeigt explizit $\lim a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und in diesem Sinne wird das intuitive Bild bestätigt: eine monoton wachsende n.o.b. Folge wird gegen ihr Supremum gequetscht!

Das motiviert auch das Studium von Mengen der Gestalt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw noch allgemeiner die folgenden [später sehr wichtigen] Begriffe für Punktmengen in $\mathbb{R}$.