(i) Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0. \qquad (*)$$

Für $x < 0$ gilt $\exp(x) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>0}}}_{>0\ (*)} > 0$

(iii) Wegen $\exp(-n) = 1/\exp(n)$ [(ii)] genügt es die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$\underline{n=0}$: $\exp(0) = 1 = e^0$

$\underline{n \mapsto n+1}$: $\exp(n+1) \overset{(4.2)}{=} \exp(n)\exp(1) \overset{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$

$\square$

4.41 BEM & MOTIVATION

Nicht vorgetragen

(i) Thm 4.39 und Kor 4.40(i) bezeugen, dass exp ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp: (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$$

ist; vgl. [EMA, 5.2.62]

(ii) Zum Abschluß des Fund des Kapitels beweisen wir nun eine grobe aber doch nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe – später [WS] werden wir diese noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe]

4.42 PROP (Fehlerabschätzung für exp)

Sei $N \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

N-te Partialsumme

wobei der „Rest" R_{N+1} für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1 + N/2$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

erfüllt.

Beweis. Für den Restterm gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut. [4.36(ii)]
Daher gilt

$$|R_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \underbrace{\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}}_{\leq |x|^2/(N+2)^2} + \dots\Big)$$

verallgemeinerte Δ-Ungl f. abs kon. Reihen:

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Bew: $\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n\Big| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{n=0}^{N} |a_n|$

$(N \to \infty)$

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \overset{2.28}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{|x|}{N+2}\Big)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

$|x| \leq \frac{N+2}{2}$

$$\underset{\text{geom. R.}}{\overset{2.37}{=}} 2\,\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

$\square$

4.43 BSP (Approximation für e) Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1)$$

und $x = 1 \leq 1 + N/2 \ \forall N \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus 4.42 für $N = 2$

$$e = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und

$$0 < R_3(1) \leq 2\,\frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} < 3.$$

($\frac{17}{6} = 2.8\dot{3}$)

Tatsächlich gilt $e \approx 2{,}71828$ [die ersten 100 Stellen erhält man genau schon nach Summation der ersten 73 Terme]

2 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit FUNKTIONEN und zwar zunächst mit solchen von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die folgende schöne Eigenschaft haben:

> Kleine Änderungen der Argumente verursachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sog. STETIGEN FUNKTIONEN haben einige herausragende Eigenschaften, z.B.: Jede stetige $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (Zwischenwertsatz)
- nimmt Maximum & Minimum an (Satz vom Max).

Nach einem gründlichen Studium des STETIGKEITSBEGRIFFS lernen wir eine wichtige Klasse „einfacher" Funktionen kennen: die ELEMENTAREN TRANSZENDENTEN Funktionen.

Dazu gehört insbesondere die LOGARITHMUSFUNKTION, die die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Ebenfalls mittels exp gelangen wir zur Definition der allgemeinen POTENZ r^s $(r > 0, s \in \mathbb{R})$.

Dann erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen & Reihen auf den Fall komplexer Zahlen und gelangen über die komplexe Exponentialfunktion zu den WINKELFUNKTIONEN Sinus & Cosinus.

§1 Stetigkeit

In diesem § lernen wir den essentiellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen. Zuvor wiederholen wir Grundlegendes zu solchen Fkt

1.1. Erinnerung (Funktionen)

Eine Funktion $f: A \to B$ zwischen (beliebigen) Mengen A, B ordnet jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zu [EMA, 3.4.1]

Wir betrachten hier Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$. Für solche Funktionen ist der Graph [EMA, 4.3.4]

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

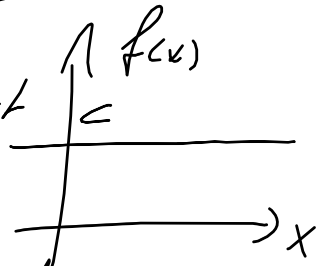
Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und kann in der „üblichen Weise" gezeichnet werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von

1.2. Bsp (reelle Fkt)

dafür hätten wir den Begriff nicht gebraucht...

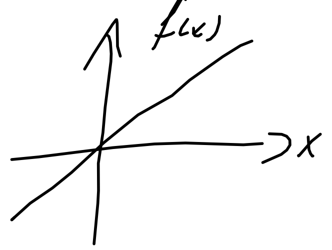
(i) Konstante Fkt.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, dann definiert $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ eine konstante Fkt



(ii) Die identische Abb auf $\mathbb{R}$ [EMA, p.165] ist gegeben durch

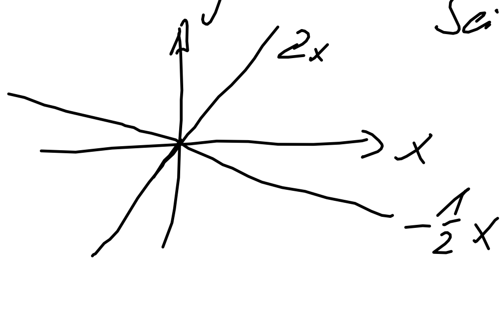
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$



(iii) Lineare Fkt sind etwas allgemeiner. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig

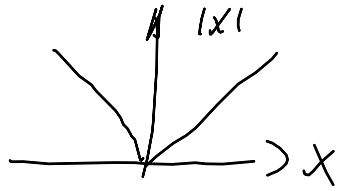
Anstieg

$$l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$l(x) = ax$$



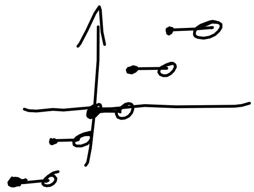
(iv) Die Betragsfunktion $\boxed{0}$ 1.7 $\quad |\,|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x|$$



(v) Die Gaußklammer $\quad \lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ [ÜE, Blatt 1, $\boxed{6}$]

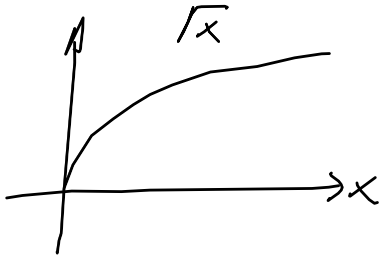
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$



(vi) Die Wurzelfkt $\quad \sqrt{\ }: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

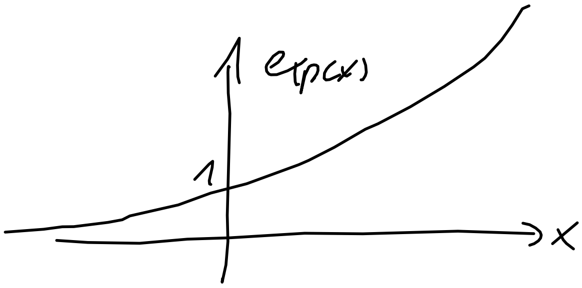
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

[$\boxed{0}$ 1.11(iii)]



(vii) Die Exponentialfkt. [$\boxed{1}$ 4.37]

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \exp(x)$



(viii) Polynomfunktionen [ETIA, p. 30] Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(x \in \mathbb{R})$

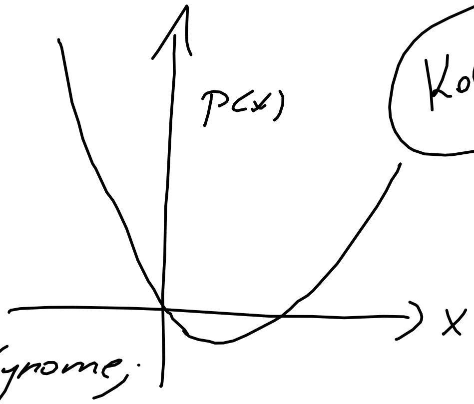
Grad, falls $a_m \neq 0$

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Koeffizienten

z.B. $m = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = -1 = -a_2$

$$p(x) = -x + x^2$$



(ix) Rationale Fkt. Eine rationale Funktion ist Quotient zweier Polynome, genauer sei $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

$$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

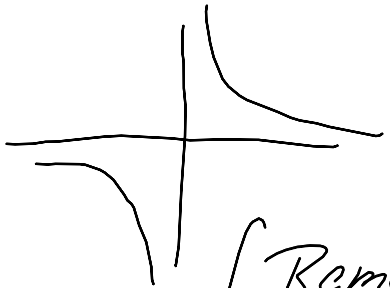
und sei $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Wir definieren

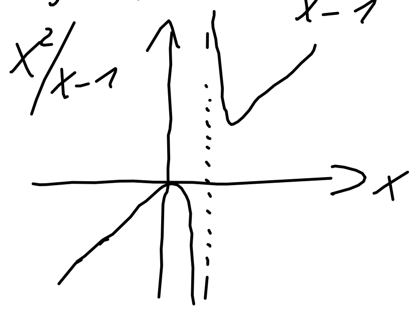
$$r: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

Ein Bsp einer rat. Funktion ist etwa $\mathbb{R}\setminus\{1\} =: D \ni x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{R}$ oder etwas einfacher mit $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$r(x) = \frac{1}{x}$





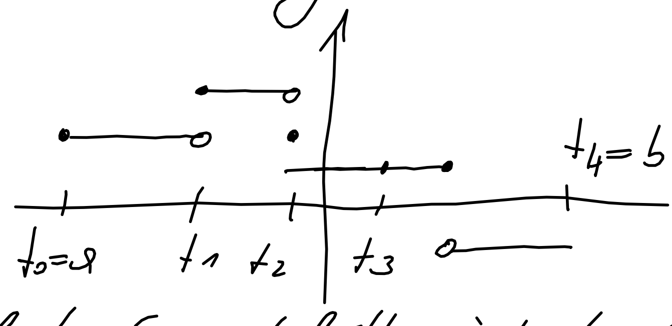
[Bemerke Polynome sind rationale Fkt mit Nenner $q(x)=1$.]

(x) Treppenfunktionen: Eine Fkt $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls

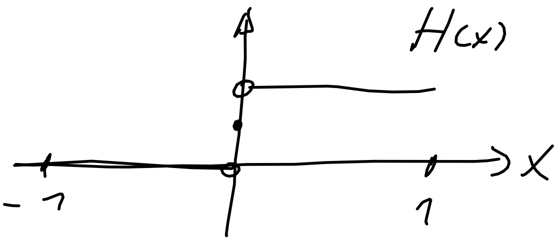
- es eine endliche Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ gibt $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$
- und Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$

sodass $\varphi(x) = c_k$ für $x \in (t_{k-1}, t_k)$ $(1 \le k \le n)$

[φ hat auf den offenen Teilintervallen (t_{k-1}, t_k) den Wert c_k; die endlich vielen Werte $\varphi(t_k)$ $(0 \le k \le n)$ können beliebig sein.]



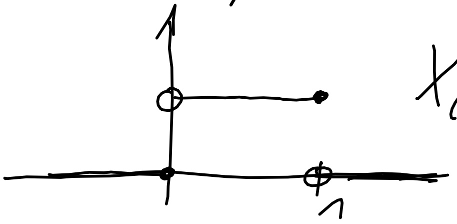
Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer $[(x)]$ und die Sprungfunktion H auf $[-1,1]$ mit $t_0=-1$, $t_1=0$, $t_2=1$, $c_1=0$, $c_2=1$ und $H(0) := 1/2$



Das ist Willkür...

(xi) <u>Charakteristische Funktion einer Menge</u>. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

dann definieren wir $\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$\chi_{[0,1]}$

So einfach das klingt, für hässliche M kann das ganz schön unanschaulich werden, z.B. $M = \mathbb{Q}$ ⇐ Dirichlet-Fkt

$$G(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{(p,1) : p \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r,0) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

1.3 FAKTENSAMMLUNG (Grundoperationen mit Funktionen)

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben kompliziertere Funktionen aus einfachen Bausteinen zu basteln – diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue aber wesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in $\mathbb{R}$ (Zielraum der Fkt) verwendet werden um Operationen für die Fkt <u>selbst</u> zu definieren – letzteres Konzept werden wir bald als wesentliches Werkzeug schätzen lernen.

Seien also $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Die Funktionen

$$f \pm g : D \to \mathbb{R}, \quad \lambda f : D \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

sind in Termen der punktweisen Operationen in $\mathbb{R}$ definiert, d.h.

$\{\forall x \in D\}$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ detto

neues + zwischen Fkt

+ in $\mathbb{R}$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Schreibweise oft $f+g(x)$ statt $(f+g)(x)$ etc....

[<u>Nebenbemerkung</u>: Die Menge $F(D) := \{f : D \to \mathbb{R}\}$ ist mit $+, \lambda\cdot$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum]

(ii) Sei $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$. Die <u>Quotientenfunktion</u> von f und g ist definiert durch

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}; \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(D) \subseteq E$ und $h : E \to \mathbb{R}$.

das Bild von D unter f $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ [EMA, 4.3.11]

Dann können wir die <u>Verknüpfung</u> (Zusammensetzung, Komposition) von f mit h definieren als ([EMA. 4.3.23])

$$h \circ f : D \to \mathbb{R}; \quad h \circ f(x) = h(f(x))$$

hier muß $f(x) \in E$ sein, sonst kann h nicht zupacken

<u>1.4 BSP (Ops f. Fkt)</u>

(i) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\varphi(x) = x^2$ gilt

$\varphi(x) = id \cdot id(x)$ $[id(x) = x]$

(ii) Allgemeiner lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ also}$$

konst. Fkt

$$p = a_m \cdot (\underbrace{id \cdot id \cdot \ldots \cdot id}_{m\text{-mal}}) + \dots + a_1 \cdot id + a_0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$$

konst. Fkt 1

(iii) Mit q wie in (i) gilt $\sqrt{}\circ q = |\;|$, denn

$$(\sqrt{}\circ q)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.5 Motivation (Stetigkeit)

(i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

> Eine kleine Änderung der Stelle soll(te) nur eine kleine Änderung der Funktionswerte zur Folge haben.

natürliche, implizite Vorstellung

Genauer: falls x nahe x_0 liegt, dann sollte $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ liegen.

(ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in den Anwendungen wichtig. Am Bsp des Fahrradfahrens [[10] 0.3]:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden, wenn ich nur ein bißchen schneller fahre

[Zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe [Behrends, p. 199].]

Andererseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft klar nicht erfüllt ist: Die Farbe der Ampel als Fkt der Zeit. Genauer, sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ rot ist.} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Zeitpunkt t_0, an dem die Ampel umschaltet: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Zeit nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

(iii) Wir beginnen nun die intuitive Idee der Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ zu formalisieren:

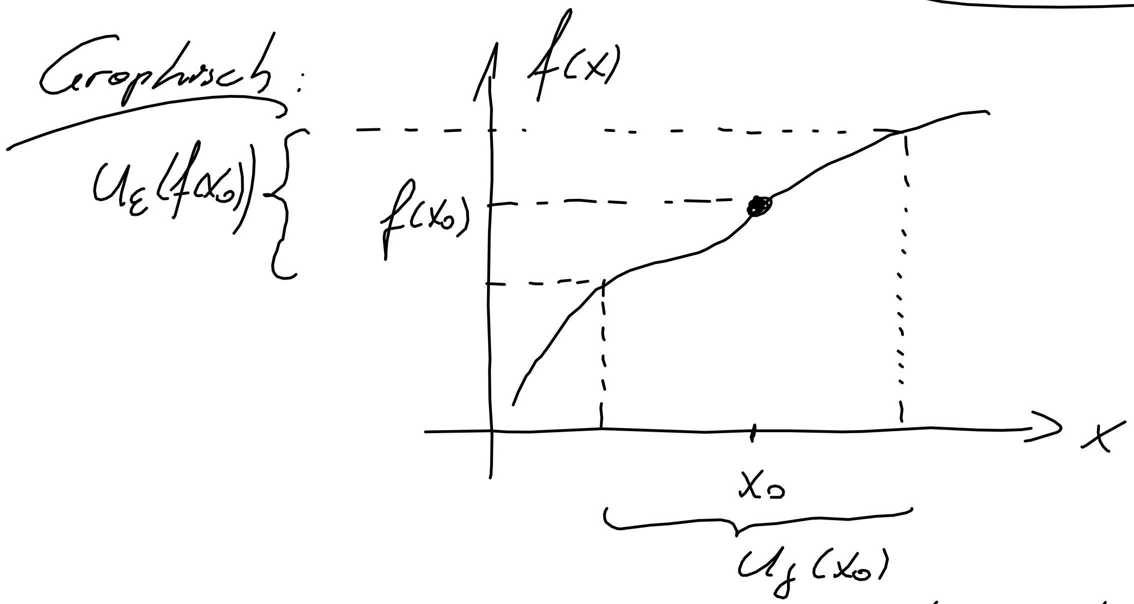
Es scheint wünschenswert zuerst eine „Toleranzgrenze" für die Funktionswerte vorzugeben also eine beliebige ε-Umgebung von $f(x_0)$ und dann zu fordern, dass es ein „Sicherheitsintervall" $U_\delta(x_0)$ um x_0 geben soll, sodass

$$|x-x_0|<\delta \text{ ergibt, dass } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

x im Sicherheitsintervall um x_0

$f(x)$ innerhalb der Toleranzgrenze um $f(x_0)$

Graphisch:



Der Witz der Formulierung ist: für jede (noch so kleine) Toleranz ε gibt es ein δ-Sicherheitsintervall; offiziell

1.6. DEF (Stetigkeit)

mindestens so wichtig wie Grenzwert def

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x_0 \in D$ eine Stelle im Definitionsbereich.

(i) f heißt stetig in x_0, falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \quad (1.1)$$

(ii) f heißt stetig (auf D), falls f stetig in jedem $x_0 \in D$ ist.

1.7 BEM (Zur Stetigkeit)

(i) Offensichtliche Umformulierungen der Stetigkeit im Pkt x_0 sind

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

Bild von $U_\delta(x_0) \cap D$ unter f

(ii) Will ich konkret für $x_0 \in D$ zeigen, dass f dort stetig ist, dann muß ich

für jede noch so kleine Toleranz ε um $f(x_0)$

ein entsprechendes Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ finden (können) $[\delta(\varepsilon)]$

sodass $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ ergibt.

Im allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls δ von der (zuvor festgelegten) Toleranz ε abhängen, also

$$\delta(\varepsilon).$$

GROSSE FETTE WARNUNG: Niemals darf umgekehrt ε von δ abhängen (vgl [1] 2.9)

$$\cancel{\varepsilon(\delta)}$$

1.8 BSP (stetige Funktionen)

(i) Konstante Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defbereichs)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$
$f(x) = c$ für ein fixes $c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $\forall x_0 \in D \; \forall x \in D \; |f(x) - f(x_0)| = 0$,
also (1.1) $\forall \varepsilon > 0$ mit $\delta > 0$ beliebig

sodass, dass δ unabhängig von ε und x_0 gewählt werden kann

(ii) Lineare Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defber.)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$

Vorüberlegung: falls $a = 0$ liegt die konst. Fkt $f(x) = 0$ vor und diese ist nach (i) stetig

Sei also $a \neq 0$. Wir müssen $|f(x) - f(x_0)|$ abschätzen & es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |a|\,|x - x_0|$$

Wir müssen also δ nur $\varepsilon/|a|$ wählen.

sodass, dass δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann

Nun zum Beweis: Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon / |a|$ (>0?) dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| = |a|\,|x - x_0| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon .$$

(iii) Die Exponentialfunktion ist stetig (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\underbrace{\exp(x - x_0 + x_0)}_{\exp(x-x_0)\cdot\exp(x_0)\ ([1],\ 4.38)} - \exp(x_0)|$$

$$\overset{[1]\,4.40(ii)}{=} \exp(x_0)\,|\exp(x_0 - x) - 1| \quad (*)$$

Wir müssen also $|\exp(x - x_0) - 1|$ für x nahe x_0 abschätzen, also $|\exp(y) - 1|$ für kleine y; das erledigt aber [1] 4.42 mit $N = 0$ für uns

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{0} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \implies$$

$$|\exp(y) - 1| = |R_1(y)| \leq 2|y| \quad \text{falls } |y| < 1 \quad (**)$$

Sei also $\delta := \min\{1, \varepsilon/(2\exp(x_0))\}$. Dann gilt $\forall |x - x_0| < \delta$

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \overset{(*)}{=} \exp(x_0)\,|\exp(x - x_0) - 1|$$

$$\overset{(**)}{\leq} \exp(x_0)\, 2\, |x - x_0|$$

$$< 2\exp(x_0)\,\delta \leq \varepsilon .$$

weil Anstieg $a = \pm 1$ vgl. (ii)

(iv) Der Betrag ist stetig (in jedem $x \in \mathbb{R}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$; setze $\delta = \varepsilon$, dann gilt $\forall |x - x_0| < \delta$ (verkehrte Δ-Ugl)

$$\big|\,|x| - |x_0|\,\big| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon .$$