Nun zum Beweis: Sei also $\varepsilon>0$. Wähle $\delta=\varepsilon/|a|$ (>0?) dann gilt $\forall x\in\mathbb{R}$ mit $|x_0-x|<\delta$

$$|f(x_0)-f(x)|=|a||x-x_0|<|a|\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon.$$

(iii) Die Exponentialfunktion ist stetig (in jedem $x_0\in\mathbb{R}$)

Sei $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig und sei $\varepsilon>0$. Es gilt

$$|\exp(x)-\exp(x_0)|=|\underbrace{\exp(x-x_0+x_0)}_{\exp(x-x_0)\cdot\exp(x_0)\ ([1],\,4.38)}-\exp(x_0)|$$

$$\overset{[1]\,4.40(i)}{=}\exp(x_0)|\exp(x_0-x)-1| \quad (*)$$

Wir müssen also $|\exp(x-x_0)-1|$ für x nahe x_0 abschätzen, also $|\exp(y)-1|$ für y nahe 0; das erledigt aber [1] 4.42 mit $N=0$ für uns

$$\exp(y)=\sum_{n=0}^{0}\frac{y^n}{n!}+R_1(y)=1+R_1(y) \implies$$

$$|\exp(y)-1|=|R_1(y)|\le 2|y| \text{ falls } |y|<1 \quad (**)$$

Sei also $\delta:=\min\{1,\varepsilon/(2\exp(x_0))\}$. Dann gilt $\forall\,|x-x_0|<\delta$

$$|\exp(x)-\exp(x_0)|\overset{(*)}{=}\exp(x_0)|\exp(x-x_0)-1|$$

$$\overset{(**)}{\le}\exp(x_0)\,2\,|x-x_0|$$

$$<2\exp(x_0)\,\delta\le\varepsilon.$$

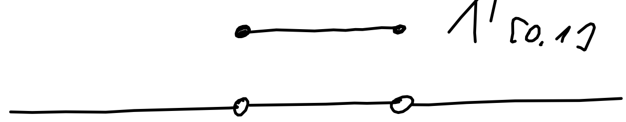
weil Anstieg $a=\pm 1$ vgl. (ii)

(iv) Der Betrag ist stetig (in jedem $x_0\in\mathbb{R}$) Sei $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$; setze $\delta=\varepsilon$, dann gilt $\forall\,|x-x_0|<\delta$ (verkehrte Δ-Ugl)

$$||x|-|x_0||\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

(v) Sprünge sind nicht stetig. **Erzbeispiel unstetiger Fkt**

Sei $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

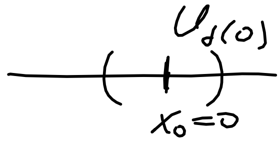


Dann ist f unstetig bei $x_0 = 0$: $f(0) = 1$ aber beliebig nahe „links" von $x_0 = 0$ gilt $f = 0$; das muß schiefgehen...

[und ebenso bei $x_0 = 1$; überall sonst ist χ als konstante Fkt stetig!]

Sei also $\underline{\varepsilon = 1/2}$, dann gilt $\underline{\forall \delta > 0}$ (egal wie klein!)

$$\underline{\exists x \in U_\delta(0)},\ x < 0$$



und somit $\left|\underline{f(x) - f(x_0)}\right| = |0 - 1| = 1 \underline{>} 1/2 = \underline{\varepsilon}$.

1.9. BEM (Stetige und unstetige Fkt)

(i) Wie wir es in 1.8(v) getan haben muß für einen Beweis der Unstetigkeit einer Fkt f an einer Stelle $x_0 \in D$ nur ein „$\underline{\text{Versager-}\varepsilon}$" angegeben werden (vgl [1] 2.9.(ii)). Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (1.1)

$$\neg\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$

$$= \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D\ \ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon$$

Es gibt zumindest eine Versager-Toleranz $\varepsilon > 0$

sodass egal wie klein das Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ gewählt ist

es immer noch (zumindest) ein $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ gibt

sodass $f(x)$ nicht im Toleranzintervall $U_\varepsilon(f(x_0))$ liegt

(ii) Wie schon in 1.7(ii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung (1.1)

<u>zuerst</u> <u>die Toleranz</u> ε vorgegeben wird

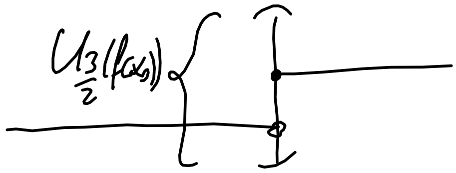
und erst <u>dann das Sicherheitsintervall</u> gefunden werden muß.

Kehrt man dies <u>fälschlicherweise</u> um zu

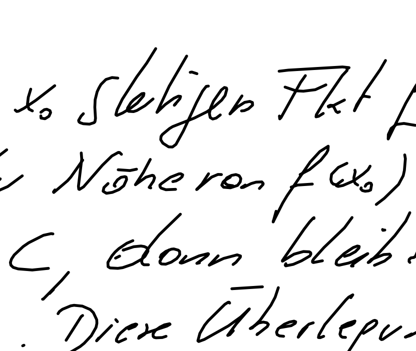
$$(*) \qquad \forall \delta>0 \ \exists \varepsilon>0 \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

dann wäre z.B. der Sprung in 1.8(v) stetig. Tatsächlich brauche ich nur $\varepsilon>1$ zu wählen:

Ergibt sich auch, falls in (1.1) im hinteren Teil ε mit δ vertauscht wird?



(iii) Die Funktionswerte $f(x)$ einer bei x_0 stetigen Fkt f bleiben also für x nahe bei x_0 in der Nähe von $f(x_0)$. Anders ausgedrückt falls $f(x_0) \neq c$, dann bleibt $f(x)$ nahe bei x_0 auch weg von c. Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden – oft sehr brauchbaren – Lemma für $c=0$; der allgemeine Fall folgt sofort durch Verschieben des Graphen.



Umgebung von x_0 auf der $f \neq 0$ (weil $> f(x_0)/2$

1.10 LEMMA (Nichtverschwinden auf Umg.)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und sei $f(x_0) \neq 0$. Dann $\exists \delta>0$ sodass auch

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \text{ gilt dass } f(x) \neq 0.$$

<u>Beweis</u>: $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$

$$(1.1) \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

Daher gilt $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ (verkehrte Δ-Ugl)

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)|$$

Trick

$$> |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$$

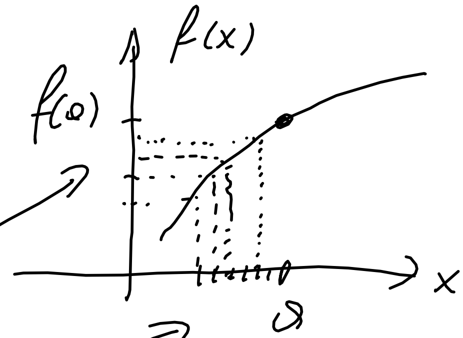
□

1.11 MOTIVATION (Stetigkeit und Folgen)

Die intuitive Idee der Stetigkeit von f in einem Pkt $a \in D$ läßt sich wie folgt umformulieren

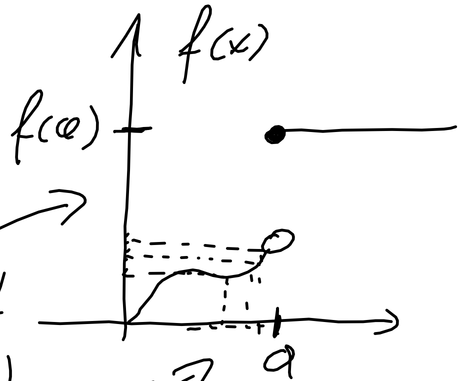
> Egal wie sich x an a annähert, es nähert sich $f(x)$ an $f(a)$ an

<u>Graphisch</u>:



f(x) nähert sich f(a)

x nähert sich a



f(x) nähert sich f(a) <u>nicht</u>

x nähert sich a

Diese Idee läßt sich mittels Folgen präzisieren:

$$\forall \text{ Folgen } x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a), \text{ bzw.}$$

$$\forall \text{ Folgen } x_n \to a : \lim(f(x_n)) = f(\lim x_n)$$

und sie funktioniert auch, wie das folgende essentielle Thm lehrt

f vertauscht mit Limiten

1.12 THM (Stetigkeit via Folgen) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Dann gilt

f ist stetig in a $\iff$ Für jede Folge (x_n) in D gilt $x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim x_n = a$. Wir müssen zeigen, dass $\lim(f(x_n)) = f(a)$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$

$$\overset{(1.1)}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(a) \cap D: \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\overset{x_n \to a}{\Longrightarrow} \exists N > 0 \ \forall n \geq N: \ |x_n - a| < \delta \quad (**)$$

Daher $\forall n \geq N \overset{(**)}{\Longrightarrow} |x_n - a| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

Also $\lim(f(x_n)) = f(a)$

"$\Longleftarrow$" Angenommen f ist unstetig bei $a \in D$. Wir konstruieren eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ aber $f(x_n) \not\to f(a)$.

f unstetig bei $a \Longrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in U_\delta(a) \cap D: \ f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$$

Wir fixieren dieses ε und wählen sukzessive $\delta = 1/n$ ($\mathbb{N} \ni n \geq 1$). Damit erhalten wir eine Folge (x_n) in D mit ($n \geq 1$)

- $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$, d.h. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ also $x_n \to a$ aber
- $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, d.h. $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

also $f(x_n) \not\to f(a)$. $\square$

1.13 BEM (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit)

Nicht vorgetragen

(i) Zur Terminologie: Bedingung (1.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren; man spricht daher von Umgebungsstetigkeit. Die r.S. in Thm 1.12 hingegen verwendet Folgen und man spricht von Folgenstetigkeit.

(ii) Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken

f vertauscht mit Limiten $\left[f(\lim x_n) = \lim f(x_n)\right]$.

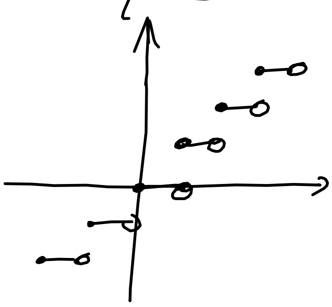
(iii) Thm 1.12 besagt in dieser Terminologie, dass (für Fkt $f: D \to \mathbb{R}$) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind. [Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (aber wichtigen) Mengen ist das nicht der Fall; „$\Rightarrow$" gilt immer, „$\Leftarrow$" ist i.a. falsch!]

(iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und als Unstetigkeitsstellen entlarven.

1.14 BSP (Sprünge)

(i) Die Gaußklammer ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in jedem $a \in \mathbb{Z}$:

$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$



- Sei $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor a \rfloor = a$ und die Folge $x_n = a - \frac{1}{n}$ erfüllt $x_n \to a$ aber $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor = a - 1$ daher

$$\lim_n \left(\lfloor x_n \rfloor\right) = \lim_n a - 1 = a - 1 \neq a = \lfloor a \rfloor = \lfloor \lim x_n \rfloor$$

- Für $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ gilt $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$. Daher gilt für jede Folge $x_n \to a$: $\exists N_0\ \forall n \geq N_0 : \lfloor a \rfloor < x_n < \lfloor a \rfloor + 1$ $\Longrightarrow \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor\ \forall n \geq N_0$ und somit $\lim \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor = \lfloor \lim x_n \rfloor$.

(ii) Die Dirichletfkt $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{R}$

nicht vorgetragen

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon = 1/2$. Wir unterscheiden die Fälle

(1) $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 0$. Wegen der Dichtheit ($\boxed{10}$ 1.11(ii)) von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ können wir in jedem Intervall $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ finden, d.h. $\forall \delta > 0\ \exists q \in \mathbb{Q} : |q - a| < \delta$ aber klarerweise gilt

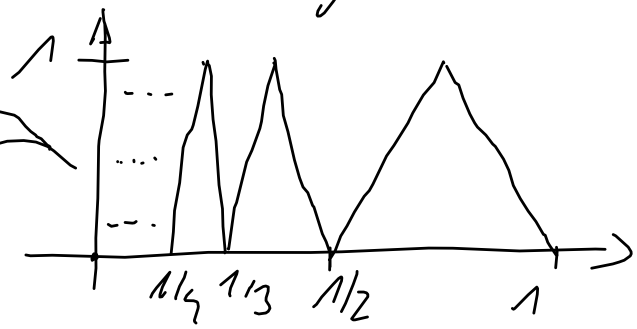
$$|\chi_{\mathbb{Q}}(q) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |1 - 0| = 1 > 1/2 = \varepsilon$$

(2) $a \in \mathbb{Q}$: Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 1$. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ($\boxed{10}$ 1.11(ii)) gilt völlig analog zu Fall (1): $\forall \delta > 0\ \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ |r - a| < \delta$ und daher $|\chi_{\mathbb{Q}}(r) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |0 - 1| = 1 > 1/2 = \varepsilon$.

1.15 WARNUNG (Zur Stetigkeit)

(i) Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit

Auch „wilde Oszillation" führt zur Unstetigkeit, denn sei z.B. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$ und sonst durch die unten dargestellten immer schmäler werdenden „Zacken".



$\forall x_0 > 0$ gilt: f stetig in x_0 (vgl. 1.8(ii) und 1.8(iv))

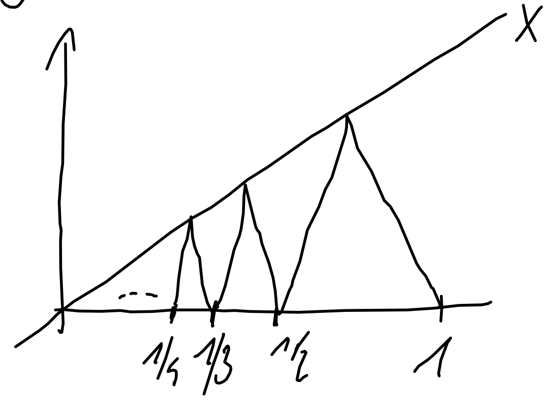
Könnte man schon explizit aufschreiben, bringt aber keine bessere Einsicht

Dann gibt es für jedes $c \in [0,1]$ eine Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $f(x_n) = c$ $\forall n$. Daher ist f in 0 nicht stetig, obwohl f dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

(ii) Folgende „Merkregel," die auch in Schulbüchern zu finden ist, ist sehr problematisch:

? Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn man sie ohne Absetzen zeichnen kann. ?

Erstens ist nicht klar, was das heißen soll. Zweitens ist etwa folgende Modifikation von f aus (i) stetig auf $[0,1]$.



Die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ folgt, da $\forall x: f(x) \leq x$ und daher $\forall x_n \to 0$: $0 \leq f(x_n) \leq x_n \to 0$

Beim Zeichnen ergibt sich aber das Problem, dass die Länge des Graphen nicht endlich ist, also wirklich alle Bleistifte dieser Welt verbraucht worden sind, bevor $x_0 = 0$ erreicht wird. Genauer gilt für die Länge des Graphen von $x = 1$ (nach links) bis $x = 1/n$

$$\ell\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \quad \text{divergent nach 4.7(ii)}$$

Die Länge von $\frac{1}{k-1}$ bis $\frac{1}{k}$ ist sicher größer als 2x die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion, also $2 \cdot 1/k$

(iii) Es gibt Monster. So anschaulich die Def der Stetigkeit auch sein mag — es gibt völlig unanschauliche „Monster-Funktionen" mit sehr eigenartigem Stetigkeitsverhalten. So gibt es z.B. eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die in allen irrationalen Pkten stetig ist in allen rationalen Pkten aber unstetig.

nicht vorgetragen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{falls } x=p/q\in\mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Dann gilt

(1) f ist unstetig in allen $x_0\in\mathbb{Q}$: Sei $x_0=p/q\in\mathbb{Q}$, dann setze $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{1}{q}$. Weil $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ dicht liegt ($\boxed{10}$ 1.11(iii)) gilt $\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $|x-x_0|<\delta$ aber $|f(x)-f(x_0)|=|0-\frac{1}{q}|=\frac{1}{q}>\frac{1}{2}\frac{1}{q}=\varepsilon$

(2) f ist stetig in allen $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: Sei $\varepsilon>0$ gewählt.

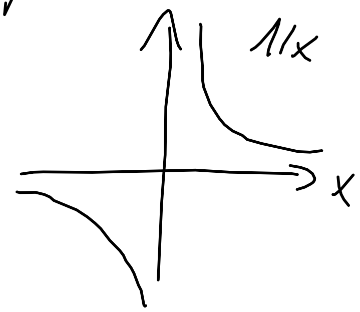
Von allen Zahlen $\mathbb{Q}\ni p/q$ mit $q\le 1/\varepsilon$ liegen in jedem Intervall nur endlich viele und keines davon ist gleich x_0 ($\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$!).

$\Longrightarrow$ $\exists$ ein p_0/q_0, das x_0 am nächsten liegt.

Definiere $\delta=|x_0-p_0/q_0|$. Nun gilt $\forall x$ mit $|x-x_0|<\delta$, dass $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, denn falls

- $x\notin\mathbb{Q} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$
- $x\in\mathbb{Q} \Longrightarrow x=p'/q'$ (gekürzt) mit $q'>1/\varepsilon$ [denn in $U_\delta(x_0)$ liegt nach Wahl von δ keine Zahl p'/q' mit $q'\le 1/\varepsilon$] $\Longrightarrow f(x)=1/q'<\varepsilon$ und daher $|f(x)-f(x_0)|=|0-1/q'|=1/q'<\varepsilon$.

(iv) <u>Offensichtlicher Unfug</u>: Wir betrachten die Fkt
$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$ (1.2(ix))



Ist f im Punkt $x_0=0$ stetig?

Diese Frage ist Unfug, weil $x_0=0\notin D$, daher ist f in x_0 garnicht definiert und die Frage nach der Stetigkeit kann garnicht gestellt werden. Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass alle rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Defbereich stetig sind.

1.16 MOTIVATION (Grundoperationen und Stetigkeit)

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der Grundoperationen für Funktionen aus 1.3 bedienen ($\pm, \lambda\cdot, \cdot, -$) und zeigen dass diese aus stetigen Fkt wiederum stetige Fkt machen. Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine sehr elegante Methode zum <u>Basteln</u> vieler neuer <u>stetiger</u> Fkt.

1.17 PROP (Grundop. f. stetige Fkt.)

Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) Falls $f,g: D\to\mathbb{R}$ stetig in $a\in D$ sind, dann sind auch

$$f\pm g: D\to\mathbb{R},\quad \lambda f: D\to\mathbb{R},\quad f\cdot g: D\to\mathbb{R}$$

stetig in a. Falls $a\in D' := \{x\in D: g(x)\neq 0\}$, dann ist auch

$$\frac{f}{g}: D'\to\mathbb{R}$$

stetig in a.

(ii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ und $h: E \to \mathbb{R}$. Falls f stetig in $a \in D$ und h stetig in $b := f(a) \in E$ dann ist auch die Zusammensetzung

$$h \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \left[D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq E \xrightarrow{h} \mathbb{R} \right]$$

stetig in a.

Beweis (i) Wir beweisen nur die Aussage für die Summe; die anderen Fälle sind ähnlich [UE]

Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to a$. Wir zeigen $(f+g)(x_n) \longrightarrow (f+g)(a)$, woraus mit 1.12 die Stetigkeit von $f+g$ in a folgt.

$$(f+g)(x_n) \overset{1.3(i)}{=} f(x_n) + g(x_n) \underset{[1]\ 2.23}{\overset{f,g \text{ stetig}}{\longrightarrow}} f(a) + g(a) \overset{1.3(i)}{=} (f+g)(a) \qquad (n \to \infty)$$

(ii) Wir verwenden so wie oben 1.12. Sei also (x_n) Folge in D, $x_n \to a$.

$$f \text{ stetig in } a \overset{1.12}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(a) = b$$
$$\Rightarrow (y_n) := (f(x_n)) \text{ ist Folge in } E \text{ mit } y_n \to b$$
$$h \text{ stetig in } b \overset{1.12}{\Longrightarrow} h(y_n) \longrightarrow h(b)$$

Also insgesamt

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \to h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$$

$\square$

1.18 KOR (Stetigkeit v. Polynomen & rat. Fkt)

Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Beweis: [vgl. Motivation 1.16]

Polynome sind endliche Summen endlicher Produkte konstanter Fkt mit id [1.4(ii)]. Alle „Bausteine" sind stetig [1.8(i), 1.8(ii) mit $a=1$], daher folgt aus 1.17(i) [+, ·] die Stetigkeit von Polynomen in jedem Pkt ihres Definitionsbereichs.

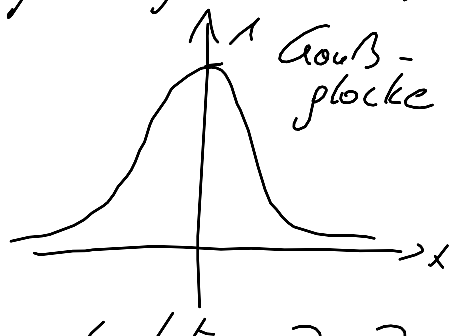
Rationale Fkt sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, wo der Nenner nicht verschwindet [1.2(ix)]. Polynome sind nach obigem stetig auf ihrem Defbereich also nach 1.17(i) [/] auch rat. Funktionen in jedem Pkt ihres Defbereichs. □

<u>1.19 BSP</u> (Stetige Fkt aus 1.17)

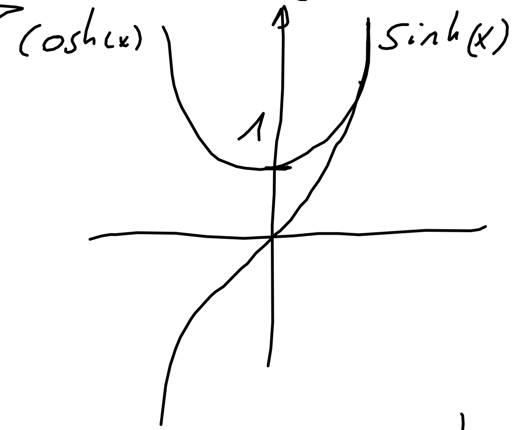
(i) $p(x) = -x^2$ ist als Polynom stetig auf ganz $\mathbb{R}$ [1.18]. exp ist stetig auf $\mathbb{R}$ [1.8(iii)]. Also gilt wegen 1.17(iii)

$$\exp\circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(-x^2)$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$



(ii) Der <u>hyperbolische Sinus</u> & <u>Cosinus</u> sind stetig $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)$$

[Diese Fkt parametrisieren die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ $\begin{pmatrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{pmatrix}$ in Analogie zum Kreis $x^2+y^2=1$ $\begin{pmatrix} x=\cos(t) \\ y=\sin(t)\end{pmatrix}$. [UE]]

1.20 MOTIVATION (Grenzwerte von Fkt)

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffs führen.

Genauer wollen wir eine Fkt f entlang beliebiger konvergenter Folgen (x_n) in D auswerten also $f(x_n)$ betrachten. (Diese Idee liegt sehr nahe zur Folgenstetigkeit, vgl. 1.11, 1.12).
Als technischer Punkt ergibt sich, dass eine Folge $(x_n)_n$ in D, die (als Folge in $\mathbb{R}$) konvergiert ihren Limes nicht notwendigerweise in D haben muß, z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in (0,1] \quad \text{aber } \lim \frac{1}{n} = 0 \notin (0,1].$$

Grenzwerte von Folgen in D, die (in $\mathbb{R}$) konvergieren sind dann genau die Berührpunkte (vgl. [1] 3.27) von D [[1] Prop 3.30(i)].

Die grundlegende Def ist daher.

1.21 DEF (Grenzwert einer Fkt)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei a ein Berührpkt von D. Wir schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \text{falls für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt, dass } f(x_n) \to c$$

$c \in \mathbb{R}$ oder auch $\pm\infty$

1.22 BEOBACHTUNG (Zum Grenzwert von Fkt)

(i) Wie in 1.20 wiederholt gibt es wegen [1] 3.30(i) für jeden Berührpkt a von D mindestens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ [i.a. wird es aber viele solcher Folgen geben ...]

(ii) Wie oben gesagt, muß a nicht in D liegen. Falls dem aber so ist, so ist $x_n = a \ \forall n$ (also die konstante Folge $x_n = a$) eine gemäß Def 1.21 erlaubte Folge. Falls dann $\lim_{x\to a} f(x)$ überhaupt existiert, muß er schon $f(a)$ sein [denn $\lim_{x_n=a} f(x_n) = \lim f(a) = f(a)$]

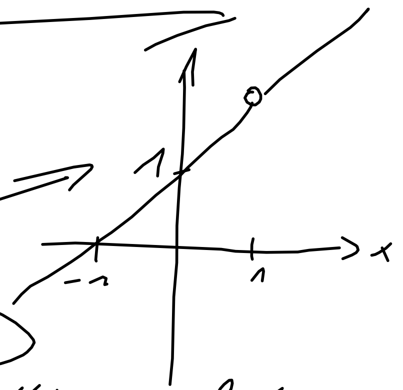
1.23 BSP (Limes rationaler Fkt)

(i) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Es gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

denn sei $x_n \in D \Rightarrow x_n \neq 1 \ \forall n$ und daher

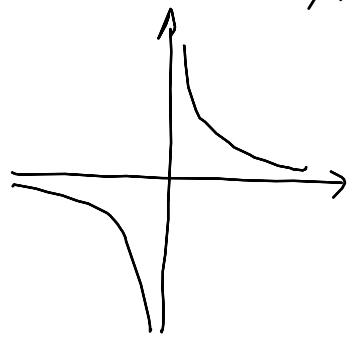
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Ist ja nur eine verkappte lineare Fkt



(ii) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1/x$



$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ weil zB $f(1/n) \to \infty$, $f(-1/n) \to -\infty$

Wir sollten also unseren Begriffsapparat erweitern:

(1) Wir brauchen einen Begriff, der auch „einseitiges" Annähern erlaubt, also Folgen $x_n \to 0$, $x_n > 0$ bzw $x_n \to 0$ $x_n < 0$

(2) Wir sollten auch Grenzwerte für f längs Folgen $x_n \to +\infty$, $x_n \to -\infty$ zulassen.

Also formalisieren wir wie folgt

1.24 DEF (Einseitige & uneigentliche Grenzwerte v. Fkt)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Sei a ein Berührpunkt von $D \cap (a, \infty)$. Wir schreiben

$\lim_{x\searrow a} f(x) = c$ oder $\lim_{x\to a+} f(x) = c$ entsprechend

c ist der <u>rechtsseitige Grenzwert von</u> f gegen a, falls

für alle Folgen (x_n) in D, $x_n > a$, $x_n \to a$: $\lim_{x_n\to a} f(x_n) = c$ gilt

(ii) Analog dazu definieren wir den linksseitigen Limes

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

(iii) Falls D nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge (x_n) in D mit $x_n\to\infty$ gilt, dass $\lim_{x_n\to\infty}(f(x_n)) = c$ dann schreiben wir

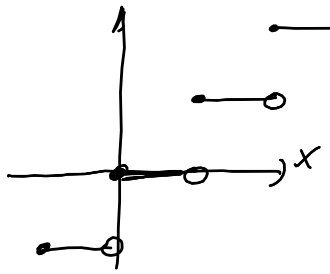
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

(iv) Analog definieren wir $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ für nach unten unbeschränkte Definitionsbereiche D.

<u>1.25 Bsp</u> (Nochmals Grenzwerte von Fkt)

$0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$

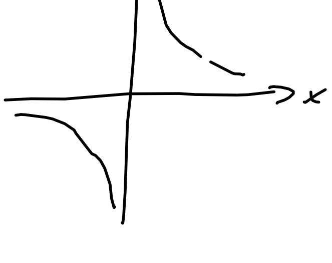
(i) $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\lim_{x\to 1+} \lfloor x \rfloor = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1-} \lfloor x \rfloor = 0$

$1 < x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$

(ii) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1/x$



$0 > x_n \to 0$

[1] 2.47(ii) $\Longrightarrow f(x_n) = 1/x_n \to -\infty$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

detto [1] 2.47(ii)

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\forall K > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n| > K \Rightarrow 1/|x_n| < 1/K$

(iii) Sei $m \geq 1$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p(x)} = 0}$$

Tatsächlich gilt:

$$p(x) = x^m\left(1 + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^m}\right) \geq x^m\left(1 - \frac{|a_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^m}\right)$$

Sei $x \geq M := 2m \cdot \max(1, |a_{m-1}|, \dots, |a_0|)$ dann gilt

$$p(x) \geq x^m\left(1 - m\frac{1}{2m}\right) = \frac{x^m}{2} \qquad (*)$$

Sei nun (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty \Rightarrow x_n \geq M \;\forall n \geq N$ und somit

$$p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

also $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

Um die 2. Behauptung zu zeigen bemerke dass $(*)$ impliziert, dass $p(x) \geq 1/2 \;\forall x \geq M$, daher ist $1/p(x)$ für alle $x \geq M$ definiert und das Resultat folgt aus [1] 2.47(ii).

in 1.20 angekündigt

1.26 Prop (Grenzwert & Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann gilt

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

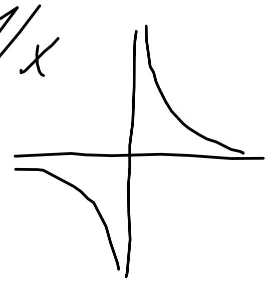
Beweis [ganz einfach die Begriffe zusammensetzen & 1.12]

$$f \text{ stetig in } a \overset{1.12}{\iff} \begin{array}{l}\forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \\ \text{gilt } f(x_n) \to f(a)\end{array} \overset{1.20}{\iff} \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$\square$

1.27 BEM (Nochmals $1/x$ – für Ehrenrettung von 1.15 (ii))

Wir betrachten nochmals $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$



In 1.15 (ii) haben wir bemerkt, dass es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von f in $x_0=0\notin D$ zu fragen.

Tatsächlich hat es aber etwas mit dem „unstetigen Aussehen" von $1/x$ bei $x_0=0$ auf sich, und zwar:

$$\boxed{f(x)=1/x \text{ kann nicht stetig von } \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ auf ganz } \mathbb{R} \text{ fortgesetzt werden.}}$$

Das bedeutet $\nexists\ \tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften

- $\tilde f(x)=f(x)\quad \forall x\neq 0$
- $\tilde f$ stetig auf $\mathbb{R}$

Denn angenommen es gäbe so ein $\tilde f$, so müsste wegen 1.26 $\lim\limits_{x\to 0}\tilde f(x)$ existieren (und gleich $\tilde f(0)$ sein). Dieser Limes existiert aber nicht, da [vgl. 1.25 (ii)] es Nullfolgen (x_n), (y_n) in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty}\tilde f(x_n)\overset{x_n\neq 0}{=}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty \qquad \text{aber}$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde f(y_n)\overset{y_n\neq 0}{=}\lim_{n} f(y_n)=-\infty.$$

[Siehe auch weitere [UE]-Aufgaben dazu]

§2 SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

Nach den eher praktischen Ausführungen zum Schluß des §1 lernen wir nun die wesentlichen theoretischen Aussagen über stetige Funktionen (auf abg. beschr. Intervallen) kennen

- den Zwischenwertsatz
- die Annahme von Minimum & Maximum
- die gleichmäßige Stetigkeit
- Umkehrsatz f. stetige, streng mon. Fkt.

2.1. MOTIVATION (Die Sonderrolle abg. beschr. Intervalle)

Bisher haben wir stetige Fkt auf beliebigen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den abgeschlossenen & beschränkten Intervallen $[a,b]$ eine Sonderrolle zukommt; solche Intervalle heißen auch KOMPAKT.

Ein einfacher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Fkt auf $[0,1]$ im Gegensatz zu solchen auf $(0,1)$ betrachten: Etwa nimmt $f(x) = 1/x$ auf $(0,1)$ beliebig große pos Werte an [1.25(iii)]. Für eine stetige Fkt auf $[0,1]$ ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar und wir werden zeigen, dass tatsächlich

jede stetige Fkt auf $[0,1]$ nur beschränkte Werte annehmen kann

beschränkte Fkt

Wir beginnen mit einer anschaulich klaren Aussage, die aber – wieder einmal – essentiell die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet.