Prüfungsausarbeitung $\boxed{\text{1. TERMIN}}$ (18. Juni 2012)

GRUPPE A

$\boxed{1}$ Def, Sätze & Beweise

(a) Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls

$$\exists C>0 \quad |a_n| \le C \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ein Punkt $a\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspkt der Menge $A\subseteq\mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon>0: \quad U_\varepsilon(a)\cap A \text{ hat unendlich viele Pkte.}$$

[oder: jede ε-Umgebung von A enthält unendl. viele Pkte aus A.]

Die allg. Potenz x^α $(x\in\mathbb{R}, x>0, \alpha\in\mathbb{R})$ ist definiert als

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

$\boxed{1}$ (b) zz $(a_n)_n$ CF (in $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ $(a_n)_n$ konvergiert

(1) (a_n) ist beschränkt.

Wähle $\varepsilon=1$ in der Def CF $\Longrightarrow$ $\exists N\in\mathbb{N}: |a_n-a_m|<1 \ \forall m,n\ge N$

Mit $m=N$ folgt

$$|a_n|-|a_N| \le |a_n-a_N| < 1 \quad \forall n\ge N$$

Daher gilt mit $C:=\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{N-1}|,|a_N|+1\}$

$$|a_n|\le C \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(2) Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists a$ HW von $(a_n)_n$

(3) $a_n \to a$.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{(a_n)\ CF}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}\ |a_n - a_m| < \varepsilon/2\ \forall m,n \geq N$

$\overset{a\ HW}{\Longrightarrow} \exists k \geq N\ |a - a_k| < \varepsilon/2$

Daher insgesamt $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_k| + |a_k - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \square$$

$\boxed{1}$ (c) QT: Eine (reelle) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (mit $a_n \neq 0$ für fast alle n) ist

- absolut konvergent, falls $\exists \theta \in (0,1)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \quad \forall n \geq N.$$

- divergent, falls $\exists N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\ \forall n \geq N.$$

$\boxed{2}$ Grundideen (a) Vollständigkeit

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist eine wesentliche Eigenschaft, die der gesamten Analysis zugrunde liegt. Anschaulich besagt sie, dass „$\mathbb{R}$ keine Löcher hat"; im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ [$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$].

Eine präzise Formulierung der Vollständigkeit bietet die Supremumseigenschaft (auch Ordnungsvollständigkeit)

Jede nicht-leere nach oben beschr. Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum

Äquivalente Formulierungen sind etwa

- der Satz v. Bolzano-Weierstraß (Jede beschr. Folge hat einen HW)
- das Cauchy-Prinzip (Jede CF konvergiert)
- das Intervallschachtelungsprinzip (Der Durchschnitt einer Folge von sich zusammenziehenden, geschachtelten kompakten Intervallen enthält genau einen Pkt.)
- Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Die Vollständigkeit erlaubt es in vielen Situationen auf die Existenz eines Objekts zu schließen, obwohl dieses nicht explizit berechnet werden kann („Existenzmaschine"). Ein prominentes Bsp dafür ist der Zwischenwertsatz.

$\boxed{2}$ (b) Stetigkeit. Eine Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \underset{|x - x_0| < \delta}{x \in D \text{ mit}} \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Anschaulich bedeutet das, dass sich bei kleinen Änderungen der Argumente x nahe x_0 die Funktionswerte ebenfalls nur wenig ändern. Diese Eigenschaft ist in vielen Anwendungen essentiell.

Etwas genauer kann man sie so beschreiben: Zu jeder beliebig (klein!) vorgegebenen „ε-Toleranz" um $f(x_0)$ gibt es ein „δ-Sicherheitsintervall" um x_0, sodass alle $x \in D$, die δ-nahe bei x_0 liegen Funktionswerte $f(x)$ haben, die ε-nahe bei $f(x_0)$ liegen; d.h. $f(U_\delta \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$

Achtung: Hier ist die Reihenfolge der Quantoren $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ essentiell!

Typische Unstetigkeiten sind Sprünge oder „wilde Oszillationen".

Die anschauliche Formulierung „Stetige Fkt sind solche, deren Graphen man ohne Absetzen zeichnen kann" ist problematisch. Sie vermittelt zwar die richtige Vorstellung im Fall von Sprüngen, nicht aber von Oszillationen (Es gibt zB stetige Funktionen auf $(0,1]$, deren Graphen man nicht „zeichnen" kann, weil seine Länge nicht endlich ist.

$\boxed{3}$ Vermischtes

(a) zz: (a_n) konvergiert $\Longrightarrow$ $\exists!$ Grenzwert

Angenommen $a_n \to a$ und $a_n \to b$; wir zeigen $a=b$:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$\overset{a_n \to a}{\Longrightarrow} \exists N_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq N_1$

$\overset{a_n \to b}{\Longrightarrow} \exists N_2 : |a_n - b| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq N_2$

Daher $\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

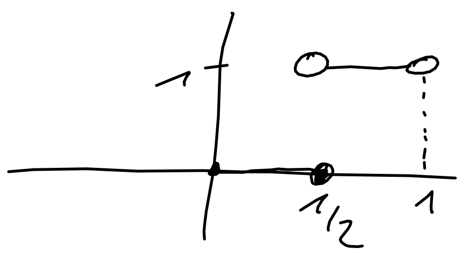
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war gilt $|a-b| = 0 \Longrightarrow a = b$ $\square$

(b) stetige & unstetige Fkt auf $[0,1)$

$f(x) := x$ stetig (als Polynom sogar auf ganz $\mathbb{R}$)

[$= c$ stetig (als konst. Fkt — " —)]

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



$\boxed{3}$ (c) Grenzwerte

(i) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n}\,\frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\longrightarrow -\frac{1}{2}$ $(n\to\infty)$

(ii) $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2\longrightarrow \underline{4}\ (x\to 2)$

$\boxed{3}$ (d) Konvergenz von Reihen

(i) QT: $\frac{(n+1)^2\, 2^n}{2^{n+1}\, n^2}=\frac{1}{2}\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\Big)^2\longrightarrow \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$ $(n\to\infty)$

daher abs konv. nach QT

(ii) $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ Leibniz: $a_n=\frac{1}{2n+1}>0$, mon fallend und Nullfolge

$\Longrightarrow$ (bedingte) Konvergenz

Die Reihe konvergiert nicht absolut, denn

$\frac{1}{2n+1}\underset{1\le n}{\geq}\frac{1}{2n+n}=\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{n}$ und $\sum\frac{1}{n}$ divergiert

$\boxed{4}$ Richtig oder falsch?

(a) Falsch; Gegenbsp oben [oder (alternierende) harm. Reihe]

(b) Richtig; Polynome sind mittels der (stetigkeitserhaltenden) Grundoperationen $+,\cdot$ aus stetigen „Bausteinen" zusammengesetzt

$p(x)=a_m x^m+..+a_0=\underset{\text{konst Fkt}}{a_m}\cdot\overbrace{id\cdot\ldots\cdot id}^{m\text{-mal}}+\ldots$

Gruppe B

1 Def, Sätze & Beweise

(a) Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: |a_n-a_m|<\varepsilon\ \forall m,n\geq N$.

Ein Pkt $a\in\mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von $A\subseteq\mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon>0\ U_\varepsilon(a)\cap A\neq\emptyset$.

[oder: jede ε-Umg. von a enthält einen Pkt aus A.]

Die reelle Exponentialfunktion ist definiert als

$$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \exp(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

1 (b) siehe Gruppe A, 1 (b)

1 (c) WT: Eine (reelle) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist

- absolut konvergent, falls $\exists\, \Theta\in(0,1)\ \exists N\in\mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|}\leq\Theta\quad\forall n\geq N.$$

- divergent, falls $\exists N\in\mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geq 1\quad\forall n\geq N$$

2 (a) Reihen, siehe Gr A, 3 (d)

$\boxed{2}$ (b) zz: $b_n \le a_n$ beide konv $\Rightarrow \lim b_n \le \lim a_n$

(1) setze $c = a_n - b_n \Rightarrow c_n \ge 0 \ \forall n$

$\exists c := \lim a_n - \lim b_n$

und es genügt zz $c \ge 0$

(2) Indirekt ang. $c < 0$; setze $\varepsilon = -c \ (>0!)$

$\xRightarrow{c_n \to c} \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N$

$\varepsilon > |c_n - c| = |c_n + \varepsilon| = c_n + \varepsilon \Rightarrow 0 > c_n$ ↯]

$\boxed{2}$ (c) Folgen

$a_n = -n$ ist durch 0 n.o.b. und $a_n \to -\infty$

$a_n = (-1)^n$ ist beschränkt (durch 1) und divergent

$\boxed{2}$ (d) Grenzwerte siehe GrA $\boxed{3}$ (c)

$\boxed{3}$ Grundideen siehe GrA, $\boxed{2}$

$\boxed{4}$ Richtig oder falsch?

(a) Richtig, lässt sich leicht mittels Folgenstetigkeit sehen

[$D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow$

$g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x)) = g \circ f(x)$]

(b) Falsch: Gegenbsp siehe oben [oder harm. Reihe]