Prüfungsausarbeitung:

3. TERMIN
2012-12-14

GRUPPE A

[1] (a) • $f: D \to \mathbb{R}$ heißt glm. stetig, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,x' \in D \text{ mit } |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

• Sei $(a_n)_n$ eine Folge und sei $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. $n_0<n_1<n_2<\dots$) dann heißt die Folge $(a_{n_k})_k$ Teilfolge von $(a_n)_n$.

• $(a_n)_n$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq N\ |a_n-a_m|<\varepsilon$$

(b) SATZ (ZWS): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und sei $f(a)<0<f(b)$. Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f(\xi)=0$.

Beweis. (1) Wir finden mittels Intervallschachtelung einen Kandidaten für die NST:

Wir konstruieren eine Folge von Teilintervallen $([a_n,b_n])_n$ von $[a,b]$ mit den 3 Eigenschaften

(a) $[a_n,b_n]\subseteq[a_{n-1},b_{n-1}]$ $(n\geq 1)$
(b) $b_n-a_n=(b-a)/2^n$ $(n\in\mathbb{N})$
(c) $f(a_n)<0\leq f(b_n)$ $(n\in\mathbb{N})$

Induktion nach n:

<u>n=0</u>: Setze $a_0 = a$, $b_0 = b$. dann sind (a)–(c) erfüllt

<u>n−1→n</u>: Angenommen wir hätten $[a_0, b_0], \ldots, [a_{n-1}, b_{n-1}]$ mit (a)–(c) konstruiert.

Setze $m = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ und unterscheide 2 Fälle

- falls $f(m) < 0$, setze $a_n = m$, $b_n = b_{n-1}$
- falls $f(m) \geq 0$, setze $a_n = a_{n-1}$, $b_n = m$

Lt Konstruktion gelten dann (a)–(c).

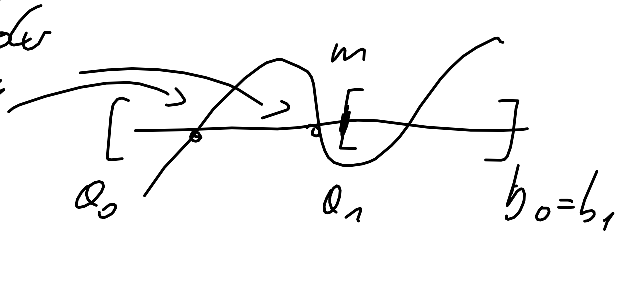
$\xRightarrow[\text{Prinzip}]{\text{Intervallsch.}} \exists! \, \xi \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$

(2) f stetig $\Rightarrow f(a_n) \to f(\xi) \leftarrow f(b_n)$

(3) $(c) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(a_n) < 0 \Rightarrow f(\xi) \leq 0 \\ f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\xi) = 0$ ▯

$\boxed{1}$ (c)
- Die Vollst. ist essentielle Voraussetzung des Intervallsch.-Prinzips.
- Die Stetigkeit von f ist essentiell in (2), d.h. damit $f(\xi)$ sowohl $\lim f(a_n)$ als auch $\lim f(b_n)$ ist, was ja dann in (3) auf die Eig von ξ führt NST zu sein.

- Nein ist sie nicht. Zwar liefert das Intervallschachtelungsprinzip ein eindeutiges $\xi = \bigcap [a_n, b_n]$ aber das Verfahren zu Konstruktion der $[a_n, b_n]$ könnte NST „überspringen"



[2] (a) Lemma: Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ für fast alle n und $a_n \to a$, $c_n \to a$. Dann gilt auch $b_n \to a$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

$$a_n \to a \implies \exists N_1 : \forall n \ge N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$$
$$c_n \to a \implies \exists N_2 : \forall n \ge N_2 : |c_n - a| < \varepsilon$$

$\implies \forall n \ge \max\{N_1, N_2\} =: N$

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$$

$\implies \forall n \ge N$:

$$-\varepsilon \le b_n - a \le \varepsilon$$

$\implies \forall n \ge N : |b_n - a| < \varepsilon \implies b_n \to a.$ $\square$

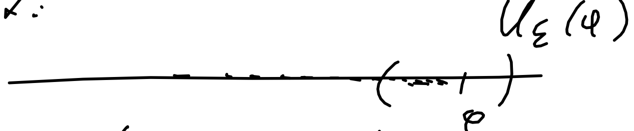
(b) $1 \le 1 + \frac{1}{n} \le 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

$$\overset{\sqrt{\ }\text{ monoton}}{\implies} 1 \le \sqrt{1 + 1/n} \le 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$

$$\underset{\text{Lemma}}{\overset{\text{Sandwich}}{\implies}} \sqrt{1 + 1/n} \longrightarrow 1$$

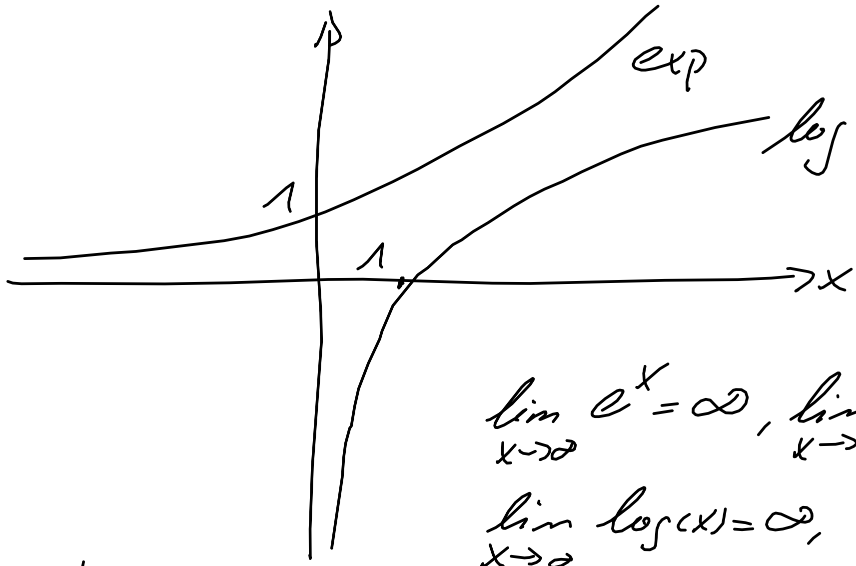
$$\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \longrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(c) $\lim a_n = a$ bedeutet, dass für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ die Folgenglieder schließlich ε-nahe bei a liegen; d.h. die Folge kommt a schließlich beliebig nahe. Anders gesagt:



Fast alle (d.h. alle bis auf endl. viele) a_n liegen in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von a.

3 (a)



$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

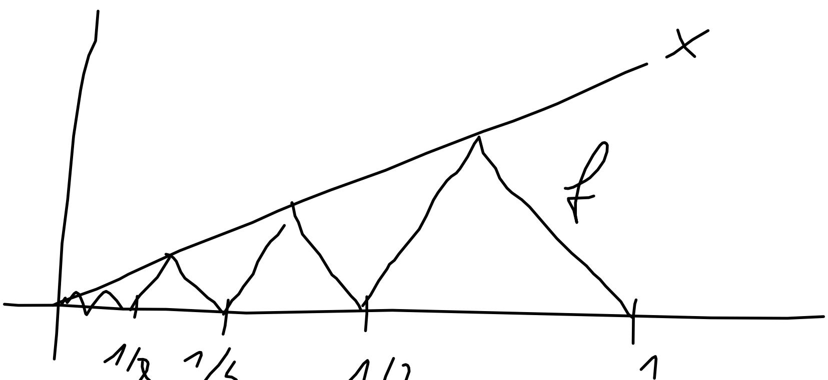
$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} \log(x) = -\infty$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ abs konv $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (alt. harm. Reihe) konvergiert nach Leibniz ist aber nicht abs konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harm. Reihe) divergiert.

(c) Die Aussage erfasst das richtige Verständnis im Hinblick auf Sprünge (ein Prototyp von Unstetigkeit) versagt aber im Hinblick auf Oszillationen (2. Prototyp).

In diesem Kontext ist sie auch falsch, da es stetige Funktionen gibt, deren Graph auf einem endl. Intervall keine endliche Länge hat, die also auch bei jeglicher Auslegung der schwammigen Formulierung nicht durchgezeichnet werden können. Eine solche Fkt ist etwa



f ist stetig auf $(0,1)$ weil gebrochen linear und auch stetig in $x=0$, da $|f(x)| \le |x| \to 0$ $(x \to 0)$.
Allerdings gilt für die Länge des Graphen von 1 bis $1/n$ $(n \ge 2)$: $\ell(1/n) \ge 2 \sum_{k=2}^{n} 1/k \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$

(d) siehe Gruppe B $\boxed{1}$ (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad QT: \quad \frac{(n+1)!^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cancel{n^2 (n-1)^2 \cdots 2 \cdot 1}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}\; \cancel{n^2 (n-1)^2 \cdots}}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4n^2 + \cdots} \to \frac{1}{4} < 1 \Longrightarrow \underline{\underline{\text{abs konv}}}$$

$\boxed{4}$ (a) Falsch,
zB ist $f(x) = 1/x$ auf $(0,1)$ nach oben unbeschränkt

(b) Richtig,

$f: D \to \mathbb{R}$ glm stetig

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in D\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in D\ |x - x'| < \delta$
$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$:\Longleftrightarrow f$ stetig auf D

Bew: Im Falle der Stetigkeit darf bei vorgegebenem ε das δ vom Pkt abhängen, was eine schwächere Bedingung als die glm. Stetigkeit ist, wo δ vom Pkt unabhängig sein muß.

GRUPPE B

[1] (a) QUOTIENTENTEST: Sei $a_n \neq 0$ für fast allen

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(i) ist absolut konvergent falls $\exists \theta: 0<\theta<1$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \theta$ für fast allen

(ii) ist divergent, falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast allen n

Beweis: (i) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \theta$ für fast allen n d.h.

$\exists N \; \forall n \geq N \quad |a_{n+1}| < \theta |a_n| < \theta^2 |a_{n-1}| < \ldots < \theta^{n-N} |a_N|$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^{n-N} |a_N| = |a_N| \, \theta^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$ konv $(\theta < 1)$

$\xRightarrow{\text{Majorantenkrit}} \sum |a_n|$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ abs konv.

(ii) Sei N so groß, dass $a_N \neq 0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \; \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| > |a_{n-1}| > \ldots > |a_N| > 0 \quad \forall n \geq N$

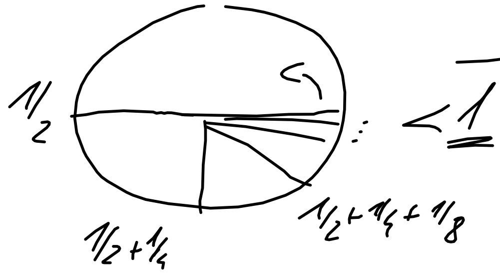
$\Rightarrow a_n \not\to 0 \xRightarrow{\text{Null-Test}} \sum a_n$ divergiert. $\square$

(b) siehe Gruppe A 3(d)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ QT: $\left|\frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} n!}\right| = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2}_{\text{Bernoulli}} \qquad = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \leq \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ abs konv. $\square$

1 (c) Das ist möglich, falls die a_n schnell genug gegen 0 gehen. Veranschaulichen kann man das am „Tortenbeispiel“ $1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



: < 1 weil immer die Hälfte des auf 1 verbleibenden Rests addiert wird.

2 (a)

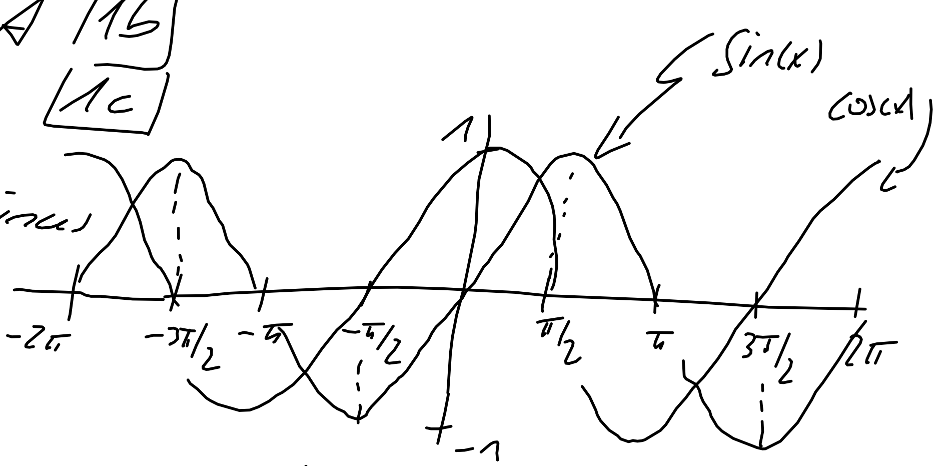
- $(a_n) \to \infty :\Leftrightarrow \forall K>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \quad a_n > K \quad \forall n \geq N$
- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert
- $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls
  $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

f heißt stetig auf D, falls f stetig in allen Pkten $x_0 \in D$.

2b siehe Gruppe A **1b**

2c — " — **1c**

3 (a) Sinus & Cosinus



3b
- beschr & div $a_n = (-1)^n$
- unbeschr aber nicht bestimmt div: $a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- div & nach o/u unbeschr. $a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$

$\boxed{3}$ (c) siehe Gruppe A $\boxed{3}$(c)

$\boxed{3}$ (d) $(-1)^n \underbrace{\frac{n+4}{n^2+\cdots}}_{\to 0 \text{ [höhere Potenz im Nenner]}} \longrightarrow 0$

$\boxed{4}$ (a) Falsch, denn $a_n = -1/n < 0 \quad \forall n \geq 1$

aber $-1/n \to 0 \quad (n \to \infty)$

Es gilt aber $a_n < 0 \ \forall n \Rightarrow \lim a_n \underline{\leq} 0$

(b) Richtig, denn für $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ gilt

f stetig in $a \iff \forall (x_n)_n \in D$ mit $x_n \to a$

$\Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

„Umgebungsstetigkeit ist Folgenstetigkeit“ $\iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

lt. Def