PRÜFUNGSAUSARBEITUNG

6. TERMIN

[1] (a) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. $n_k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$). Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

(eine) <u>Teilfolge</u> von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist die <u>allg. Potenzfkt</u> definiert als

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x)).$$

Eine Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt <u>glm. stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D \text{ mit } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(b) <u>ZWS</u>: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ (bzw. $f(b) < 0 < f(a)$). Dann existiert eine Nullstelle $x_0 \in [a,b]$ (d.h. $\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = 0$).

<u>Beweis</u>: Sei f wie in der Behauptung. Wir konstruieren mittels Intervallhalbierung eine Folge abg. Intervalle $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit den 3 Eigenschaften

(1) $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$

(2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$

(3) $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$

Wir gehen induktiv vor und definieren

$n=0$: $a_0 := a$, $b_0 := b$

$n \mapsto n+1$: Seien $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$ bereits so konstruiert, dass (1)–(3) gelten. Wir definieren

$$m := \frac{b_n - a_n}{2}$$

und machen eine Fallunterscheidung:

Falls $f(m) \geq 0$, dann setze $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := m$

Falls $f(m) < 0$, dann setze $a_{n+1} := m$, $b_{n+1} := b_n$

Dann gelten offensichtlich (1)–(3).

$$\xRightarrow[\text{Schachtelungsp.}]{\text{Intervall-}(*)} \quad \exists!\, x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n] \text{ und } \begin{array}{l} a_n \to x_0 \\ b_n \to x_0 \end{array}$$

Weil f stetig ist gilt

$$\begin{array}{l} f(a_n) \to f(x_0) \\ f(b_n) \to f(x_0) \end{array} \quad (**)$$

(3) + Sandwich-Lemma

Wegen (3) gilt also

$$f(x_0) = \lim f(a_n) \leq 0 \leq \lim f(b_n) = f(x_0)$$

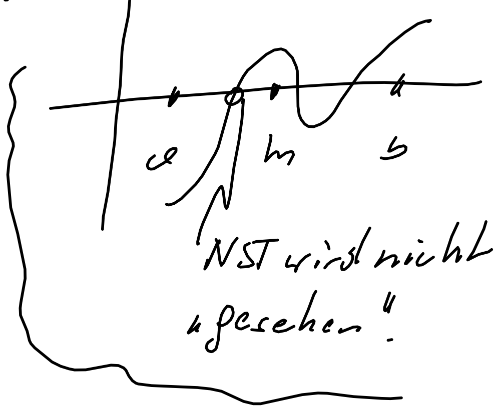
$$\Longrightarrow \underline{f(x_0) = 0} \qquad \square$$

(c) Die Vollständigkeit wird in Form des Intervallschachtelungsprinzips verwendet; siehe $(*)$.

Die Stetigkeit wird verwendet um mittels (3) zu zeigen, dass die mittels Vollständigkeit gefundene „Kandidatenstelle" x_0 wirklich eine Nullstelle ist. Genauso wird aufgrund der Stetigkeit in (**) geschlossen

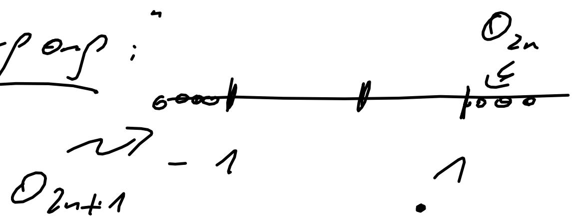
$$\lim a_n = x_0 = \lim b_n \Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0) = \lim f(b_n)$$

Die mittels Intervallschachtelung gefundene „Vorzeichenwechselstelle" x_0 ist zwar eindeutig. Die Intervallhalbierung könnte aber Nullstellen „übersehen"/„überspringen"; daher ist die NST <u>nicht</u> eindeutig.

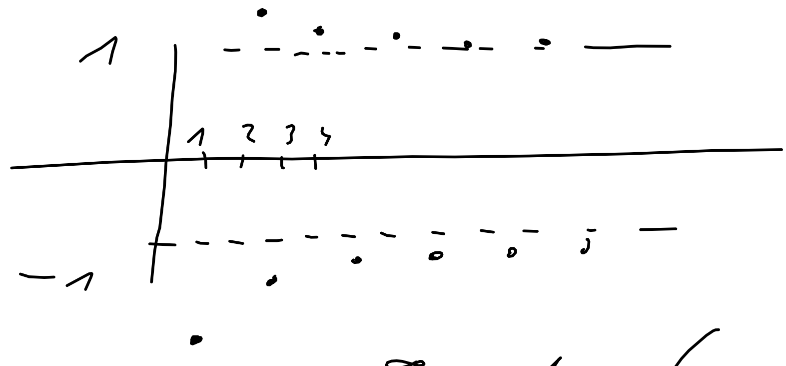


$\boxed{2}$ (a) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

als „Spaziergang":



als Graph

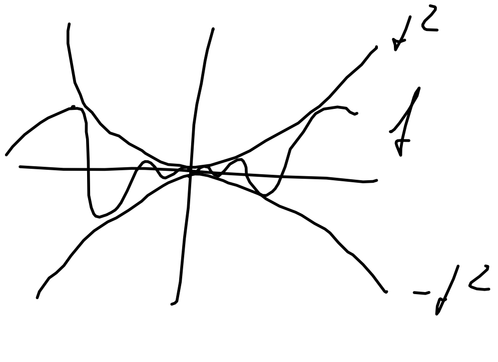


(b) konv aber nicht abs konv: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (alt. harm. R.)

abs konv: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

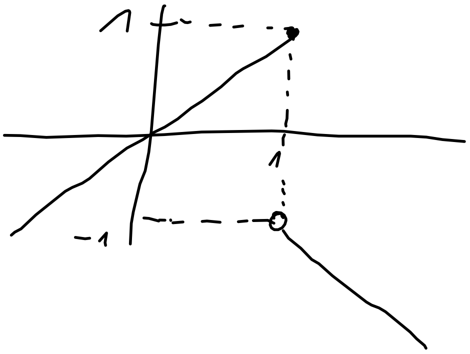
abs konv aber nicht konv: $\nexists$, denn abs konv $\Rightarrow$ konv

(c)



f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lt. Baukasten (Produkt von der Zusammensetzung stetiger Fkt) f ist auch stetig in $t_0=0$, denn

$$|f(t)| \le t^2 \to 0 \quad (t \to 0)$$



g ist als Polynom stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
aber unstetig in $X_0=1$, denn
$\lim\limits_{x\nearrow 1} g(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} x = 1$ aber
$\lim\limits_{x\searrow 1} g(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} -x = -1$

[oder sei $\varepsilon < 2$ dann $\nexists\, \delta > 0$ mit $|g(x) - g(1)| = |g(x) - 1| < \varepsilon$
$\forall x \in U_\delta(1)$ denn $g(x) < -1 \quad \forall x > 1$]

(d)
$$a_n = 2\,\frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\to 1} + 1} \longrightarrow \frac{2}{2} = \underline{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{7}{b_n}\right) \qquad b, b_0 > 0$$

b_n n.u.b.; genauer $b_n \ge \sqrt{7}$ $(\forall n \ge 1)$, denn

$$b_{n+1}^2 - 7 = \tfrac{1}{4}(b_n + 7/b_n)^2 - 7$$

$$= \tfrac{1}{4}(b_n^2 + 14 + 49/b_n^2) - 7 = \tfrac{1}{4}\left(b_n^2 - 14 + \frac{49}{b_n^2}\right)$$

$$= 1/4\,(b_n - 7/b_n)^2 \ge 0 \quad \Longrightarrow b_{n+1}^2 \ge 7 \quad \forall n$$

$b_n \downarrow$, denn

$$b_n - b_{n+1} = b_n - \tfrac{1}{2} b_n - \frac{7}{2b_n} = \frac{1}{2b_n}(b_n^2 - 7) \ge 0 \; \forall n$$

Konv. Prinzip $\Longrightarrow$ f. mon + beschr. Folgen

$\exists\, b = \lim b_n$ | Wir berechnen b

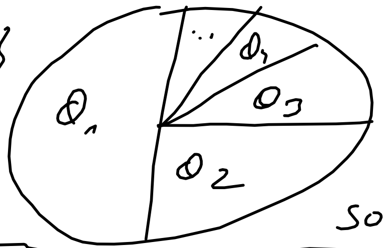
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{7}{b_n}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{7}{b}\right) \Rightarrow b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

$\boxed{3}$ (a) Für die Konvergenz einer Reihe $\sum a_n$ ist es entscheidend, dass die Glieder a_n schnell (genug) gegen 0 gehen. Ein instruktives Bsp mit pos Gliedern ist das „Tortenbsp." $a_n = 1/2^n$ $(n \geq 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$



Wenn man immer die Hälfte der noch vorhandenen Torte isst, so hat man insges. genau eine Torte gegessen.

(b) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) \neq 0$

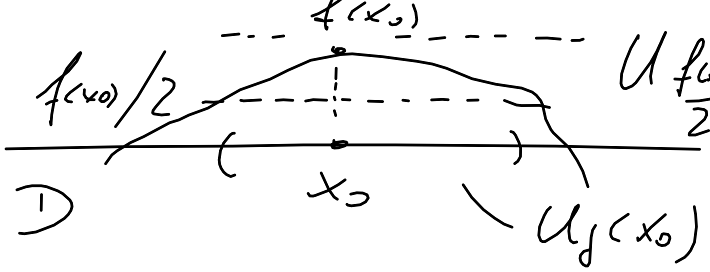
$$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x \in D \cap U_\delta(x_0) : f(x) \neq 0$$

Beweis. oBdA sei $f(x_0) > 0 \Longrightarrow \varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$ [sonst $\varepsilon = \frac{-f(x_0)}{2}$]

f stetig in $x_0 \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 \ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow |f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x_0) - f(x)|$$
$$> f(x_0) - \varepsilon = f(x_0)/2 > 0 \qquad \square$$

verkehrte Δ-Ugl



$U_{\frac{f(x_0)}{2}}(f(x_0))$

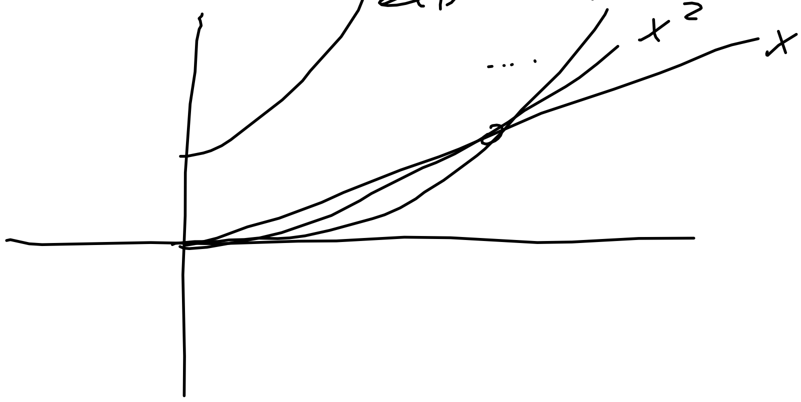
$U_\delta(x_0)$ ... hier ist $f > f(x_0)/2 > 0$

$\boxed{3}$ (c) zz $\lim_{x\to\infty} e^x/x^k = \infty \quad \forall k\in\mathbb{N}$

OBdA $x>0$; $\dfrac{e^x}{x^k} = \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!}{x^k} \geq \dfrac{x^{k+1}}{x^k(k+1)!} \geq \dfrac{x}{(k+1)!} \to \infty \quad (x\to\infty)$

alle anderen Terme im Zähler weggelassen

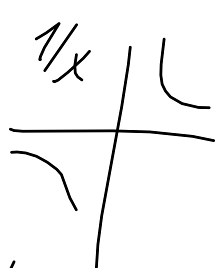
Anschaulich bedeutet das Resultat, dass exp schneller wächst als jede Potenz, falls $x\to\infty$



$\boxed{4}$ (a) RICHTIG, denn „$\Rightarrow$" stimmt immer (konv $\Rightarrow$ beschr.)

und für „$\Leftarrow$" gilt S_n monoton wachsend ($a_n>0$) und beschr $\Rightarrow$ S_n konv $\Rightarrow \sum a_n < \infty$

(b) FALSCH, denn $\lim_{x\nearrow 0} 1/x = -\infty$, $\lim_{x\searrow 0} 1/x = \infty$



daher $\nexists\ \tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig mit $\tilde{f}\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = f$

weil es müsste $\lim_{x\to 0}\tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$ endlich sein.