Prüfungsausarbeitung

7. TERMIN

[1] (a) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt <u>konvergent</u>, falls die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ konvergiert.

Die Logarithmusfunktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Umkehrfkt der Exponentialfkt $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. [Diese ist stetig, streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$; daher ermöglicht der Umkehrsatz diese Def.]

$f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt <u>glm. stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \tilde{x} \in D,\ |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

(b) <u>Sandwich-Lemma</u>: Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n größer einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$ und es gelte $a_n \to a$, $c_n \to a$. Dann ist b_n konvergent und $b_n \to a$.

<u>Beweis</u>. <u>Sei $\varepsilon > 0$</u>; weil $a_n \to a$, $c_n \to a$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$, $|c_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_0$. (*)

<u>Sei $N := \max\{n_0, N_0\}$</u> dann gilt lt. Voraussetzung und wegen (*)

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

und daher (subtrahiere a)

$$-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Das bedeutet aber $\underline{|b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N}$ also $b_n \to a$. □

$\boxed{1}$ (c) Satz: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$, $E \supseteq f(D)$ und $h: E \to \mathbb{R}$. Falls f stetig in $a \in D$ ist und h stetig in $f(a) \in E$, dann ist auch $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis. Wir verwenden die Folgenstetigkeit.
Sei $x_n \to a$ eine Folge in D; zz: $h \circ f(x_n) \to h \circ f(a)$.
Weil f stetig in a ist gilt $f(x_n) \to f(a)$.
Weil h stetig in $f(a)$ ist gilt für die gegen $f(a)$ konvergierende Folge $y_n := f(x_n)$

$$h(y_n) = h(f(x_n)) \to f(a).$$

□

$\boxed{2}$ (a)

$$a_n = \frac{6n^3 + n^2 - 9}{15 + 3n^3} = \frac{6 + \overset{\to 0}{1/n} - \overset{\to 0}{9/n^3}}{3 + \underset{\to 0}{15/n^3}} \to \underline{\underline{2}}$$

$$b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \sqrt{n}\, \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{1 + \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}_{\to 1}} \to \underline{\underline{-1/2}}$$

12] (b) f ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als Produkt von Komposition von stetigen Fkt

[$1/x$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \cos(1/x)$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

x^3 stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow x^3\cos(1/x)$ —"—]

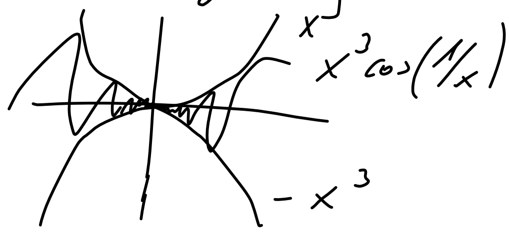
Bleibt die Stetigkeit in $x=0$ zu prüfen.
Wir verwenden die Folgenstetigkeit. Sei dazu x_n eine Nullfolge dann gilt

$$f(x_n) = x_n^3 \cos(1/x_n) \qquad |\cos(y)| \leq 1$$

$$|f(x_n)| \leq |x_n|^3 \to 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Also $f(x_n) \to 0$ und somit f stetig auf $\mathbb{R}$.

(c) $$\sum \frac{(-1)^n}{(n+2)(n+3)}$$



- konvergiert nach Leibniz, denn die Reihe ist alternierend, $a_n = 1/(n+2)(n+3) \to 0$ und a_n ist mon fallend, denn

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\cancel{(n+3)}(n+4)}{(n+2)\cancel{(n+3)}} > 1$$

- konvergiert absolut wegen Majorantenkriterium, denn

$$a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty.$$

[Hat man weiteren Plot gezeigt, sieht man, dass der erste Plot eigentlich unnötig war...]

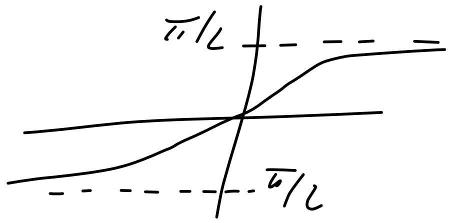
13 (d) abs konv aber nicht konv : $\nexists$

konv aber nicht abs konv mit pos. Gliedern : $\nexists$

[wenn $a_n \geq 0 \Rightarrow \sum |a_n| = \sum a_n$]

stetig aber nicht glm stetig: $f(x) = 1/x$ auf $(0,1)$

str. mon nach oben beschr.: $f(x) = \arctan(x)$



13 (e) Vollständigkeit

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist eine wesentliche Eigenschaft, die der gesamten Analysis zugrunde liegt. Anschaulich besagt sie, dass „$\mathbb{R}$ keine Löcher" hat – das im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ [$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$].

Eine präzise Formulierung liefert die Supremumseigenschaft (Ordnungsvollständigkeit)

{ Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. }

Äquivalente Formulierungen sind etwa

- der Satz von Bolzano-Weierstraß (Jede beschr. Folge hat einen HW)
- das Cauchy-Prinzip (Jede CF konvergiert)
- das Intervallschachtelungsprinzip (Der Durchschnitt einer Folge sich zusammenziehender, geschachtelter abg. Intervalle enthält genau einen Pkt.)

- Jede abs. konv. Reihe konvergiert.

Die Vollständigkeit erlaubt es in vielen Situationen auf die Existenz eines Objekts zu schließen, obwohl dieses nicht explizit berechnet werden kann („Existenzmaschine“). Ein prominentes Bsp dafür ist der Zwischenwertsatz.

[3] (b) <u>Winkelfkt</u>

Die Winkelfkt sind (im Zuge <u>dieser</u> VO) über die komplexe Exp-Fkt $\exp(z) = \sum z^k/k!$ $(z \in \mathbb{C})$ definiert; genauer

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix})$$

Damit ergibt sich sofort die Eulersche Formel

$$\underline{e}^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i\operatorname{Im}(e^{ix}) = \underline{\cos(x) + i\sin(x)}$$

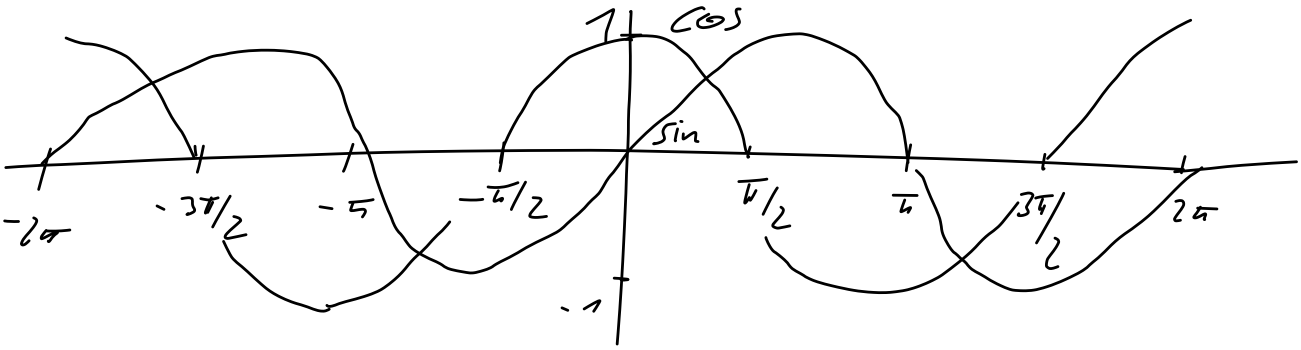
Daraus kann man nun mittels

$$i^n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0\ (4) \\ i & n \equiv 1\ (4) \\ -1 & n \equiv 2\ (4) \\ -i & n \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

leicht die Reihendarstellung gewinnen

$$\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}}_{= \cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{= \sin(x)}$$

Die Graphen der UF haben folgende Form



$\boxed{14}$ (a) Richtig, denn der Limes ist immer auch ein HW und es gibt generalisierten Limes.

(b) <u>Falsch</u>. Eine stetige Fkt auf einem kp. Intervall nimmt Max & Min an und ist daher insbes. <u>beschränkt</u>.