(2014-02-25)

Prüfungsaufarbeitung | 8. TERMIN

[1] (a) Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>beschränkt</u>, falls
$\exists C>0 : |a_n| \leq C \ \forall n\in\mathbb{N}$

Ein Pkt $a\in\mathbb{R}$ heißt <u>Häufungspkt</u> der Menge $A\subseteq\mathbb{R}$, falls jede ε-Umgebung von a unendlich viele Pkte aus A enthält
[$\forall\varepsilon>0$: $U_\varepsilon(a)\cap A$ hat unendl. viele Pkte].

Für $x\in\mathbb{R}, x>0, \alpha\in\mathbb{R}$ ist die <u>allg Potenz</u> definiert als
$$x^\alpha = e^{\alpha\log(x)}.$$

(b) <u>zz</u>: Sei $(a_n)_n$ CF $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert

<u>1. Schritt</u>: (a_n) ist beschränkt: Wähle $\varepsilon=1$ in der Def von CF $\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N} : |a_n-a_m|\leq 1 \ \forall m,n\geq N$.
Setze $m=N \Rightarrow |a_n|-|a_N| \leq |a_n-a_N| \leq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$
Daher gilt mit $C:=\max\{|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N|+1\}$
$$|a_n|\leq C \ \forall n\in\mathbb{N}$$

<u>Schritt 2</u>: BW $\Rightarrow \exists$ HW a von (a_n)

<u>Schritt 3</u>: $a_n\to a$: Sei $\varepsilon>0$
(a_n) CF $\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: |a_n-a_m|<\varepsilon/2 \ \forall m,n\geq N$
a HW $\Rightarrow \exists k\geq N : |a-a_k|<\varepsilon/2$
$\Rightarrow \forall n\geq N : |a_n-a| \leq |a_n-a_k|+|a_k-a| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. [1]

[1] (c) Sei $\sum a_n$ eine reelle Reihe mit fast allen $a_n \neq 0$.
Die Reihe ist

- <u>abs konv</u>, falls $\exists \Theta \in (0,1)\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta \quad \forall n \geq N$$

- <u>divergent</u>, falls $\exists N \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \ \forall n \geq N$

[2] (a) Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ heißt

- <u>stetig auf D</u>, falls $\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in D$ mit $|y-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

- <u>glm stetig auf D</u>, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Stetigkeit in einem Pkt x bedeutet, dass für alle y nahe bei x auch die Fktionswerte $f(y)$ nahe bei $f(x)$ liegen in der präzisen Bedeutung von

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall y \in D\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Ist f stetig $\forall x \in D$ heißt f stetig in D. Dabei muss i.a. bei fixem $\varepsilon > 0$ das δ abhängig von x gewählt werden.
Das ist nun bei der glm Stetigkeit anders, denn die Def besagt, dass bei gegebenem $\varepsilon > 0$ das δ unab-

hängig vom Pkt x gewählt werden kann. [Es hängt nur vom ε ab! — Reihenfolge der Quantoren]

Daher ist die glm. Stetigkeit der stärkere Begriff, d.h. es gilt

$$f \text{ glm. stetig auf } D \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ stetig auf } D$$

Gegenbsp. $f(x) = 1/x$ auf $(0,\infty)$

[Es gilt jedoch "$\Longleftarrow$" auf kp Intervallen.]

$\boxed{2}$ (b) (Konvergent vs. abs. Konvergent) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- konvergiert, falls die Folge der Partialsummen

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n \quad \text{konvergiert}$$

- konvergiert absolut, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Es gilt $\sum a_n$ abs konv $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ konvergent

[Cauchyprinzip f. Reihen aus Vollständigkeit

Gegenbsp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konv. aber nicht abs. konv.

$\boxed{2}$ (c) (Umkehrsatz) Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und str. mon wachsend [fallend]. Dann gilt

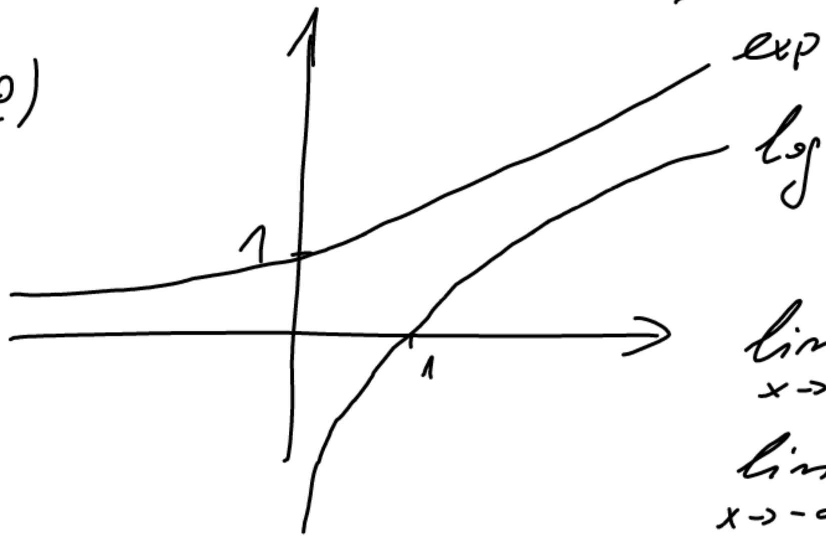
(i) $f(I)$ ist ein Intervall

(ii) $f: I \to f(I)$ ist bijektiv

(iii) $f^{-1}: f(I) \to I$ ist stetig & str. mon. wachsend [fallend]

Die Stetigkeit wird nur für (i) verwendet.

$\boxed{3}$ (a)



$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} \log(x)$

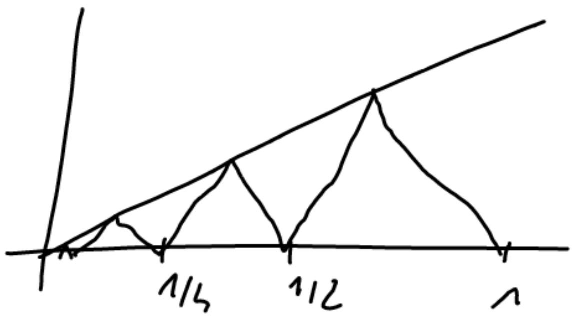
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\downarrow 0} \log(x) = -\infty$

(b) beschr. aber nicht konv.: $(-1)^n$

nach oben & unten unbeschr.: $a_{2n} = n, \; a_{2n+1} = -n$

ein HW aber n.o. unbeschr.: $a_{2n} = 1, \; a_{2n+1} = n$

(c) Die Aussage erzeugt das richtige Verständnis bzgl. Sprüngen versagt aber in bezug auf Oszillationen. Dort ist sie nämlich falsch: Es gibt stetige Fkt, deren Graph auf einem endl. Intervall keine endl. Länge hat, z.B.:



f ist stetig auf $(0,1]$, weil gebrochen linear und stetig in $x=0$, denn $|f(x)| \leq |x| \to 0$ für $x \downarrow 0$.

Allerdings gilt für die Länge des Graphen von 1 bis 1/n ($n \geq 2$):

$$l\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2\sum_{k=2}^{n} 1/k \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ QT: $\left|\frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!}\right| = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} =$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \leq \frac{1}{2} < 1$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$ (Bernoulli) $\Rightarrow$ abs konv

$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ QT: $\frac{(n+1)!^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cancel{n^2}\cancel{(n-1)^2}\cdots\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{n^2}\cancel{(n-1)^2}\cdots}$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+\ldots} \longrightarrow 1/4 < 1$$

$\Rightarrow$ abs. konv.

(e) $a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)\cdots 1}{\cancel{n}\; n\; n \cdots n} = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{<1}\cdots\frac{1}{n}$

$$\leq 1/n \to 0$$

$\boxed{4}$ (a) falsch: Gegenbsp $\sum \frac{1}{n} = \infty$

(b) falsch: Stetigkeit wird nicht vorausgesetzt

Gegenbsp.: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$