Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
Universität Wien

Sommersemester 2012

3 WStd / 5 ECTS

(Korrigierte Version
2013-02-07)

0 EINLEITUNG

In dieser Einleitung machen wir einige inhaltliche & methodische Vorbemerkungen (§0) und legen dann (§1) den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

§0 WAS WILL UND WAS SOLL DIE ANALYSIS

— EINE ERSTE BEGRIFFSBESTIMMUNG

in diesem Skript hat jeder Absatz eine Nummer

0.1. MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN. Zu Beginn jedes Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- LINEARE ALGEBRA & GEOMETRIE
- ANALYSIS

Lösen linearer Gleichungssysteme & der daraus entwickelte abstrakte Begriffsapparat

Grenzwerte, Differential- und Integralrechnung

Die Themen der Analysis sind also schon durchaus aus der Schulmathematik geläufig; sie wird an der Uni allerdings axiomatisch abstrakt aufgebaut daher ist zu Beginn eher das WIE als das WAS ein Problem

[Für viele Studierende ist die 1. Analysis-VO die relativ schwierigste VO des gesamten Studiums.]

0.2 Analysis – eine erste Inhaltsbestimmung

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die <u>Differential-</u> und <u>Integralrechnung</u> (in einer & in mehreren Variablen).

Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das <u>Änderungsverhalten</u> von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Funktion <u>im Kleinen</u> zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion <u>im Großen</u> lernen?

für kleine Änderungen der unabhängigen Variablen

Gesamtverlauf der Fkt

0.3 Bsp (Fahrradfahren)

(Wann, wie) kann aus der Kenntnis der <u>Momentangeschwindigkeit</u> (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der <u>Gesamtverlauf der Fahrt</u> (zurückgelegte Strecke; die Fkt im Großen) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden diese Größen durch den Tachometer bzw Tageskilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese <u>Begriffe wirklich</u> und wie kann obige Frage <u>systematisch</u> beantwortet werden?

Das führt uns auf:

0.4 DER ANALYTISCHE BEGRIFFSAPPARAT

Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den

GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen Erscheinungsformen – Er ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- & Integralrechnung zugrunde!

0.5 UND WOZU DAS GANZE?

Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken scheinende) Materie mit der echten Welt zu tun? SEHR VIEL!

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Lagrange, Laplace, ...) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt & Gesellschaft in den letzten $3\frac{1}{2}$ Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. [Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik sowie die Schrift und nimmt m.E. ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein...]

0.6 JA SCHÖN – ABER WIE? ZUR METHODIK

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist – und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich – dass die Analysis [wie jedes math. Gebiet] nach der axiomatischen Methode gelehrt wird. – WARUM?

abstraktes Vorgehen nach dem Definition–Satz–Beweis–Schema

(1) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

(2) Sie macht das Erlernen eines Gebiets leichter!

Das ist kein Witz: Statt in „druidischer Weise" von einem Meister im geheimnisvollen Handwerke des intuitiv richtigen Hantierens mit „unendlich kleinen Größen" unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt definiert. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert. Diese werden durch logische Schlußfolgerungen bewiesen.

JA, ABER ... natürlich bereitet diese Herangehensweise den AnfängerInnen große Schwierigkeiten!

Es ist eine große Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der Phantasie & Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache.

Daher ist es auch eines der Ziele dieser VO diese methodische Herausforderung zu bewältigen ... Insofern nimmt die EidA auch den methodischen roten Faden aus der EMA auf und spinnt ihn weiter ...

0.7. Axiomatik in der Analysis

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir im nächsten §. Dabei nehmen wir den inhaltlichen Faden aus der ETA auf und knüpfen daraus den Teppich der Analysis.

0.8 Bevor es wirklich losgeht – eine letzte, auch persönliche Vorbem.

Zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen & die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen & wird nicht ganz ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können).

Ebenso die Kraft der Anwendungen (auf die wir in diese Vo leider wenig eingehen können): Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie, etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft...

§1 Zusammenfassung: Die Reellen und Komplexen Zahlen

1.1 Motivation: In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen.

[Wir wählen diesen Ausgangspunkt: die reellen (und damit auch die komplexen) Zahlen können aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe [ETA, Erweiterungsstoff im Kap. 6]). Die so konstruierten Mengen $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen. Daher spielt es für alles Weitere keine Rolle wo wir beginnen. Wichtig ist nur, dass wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.]

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile aus der ETA, sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf die ETA arbeiten.

Wir werden den Satz v. Dedekind [ETA, Thm 6.4.4.] zur Definition erheben [ETA, p. 310 unten] also $\mathbb{R}$ als (den bis auf Isomorphie eindeutigen) ordnungsvollständigen geordneten Körper definieren, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen.

1.2 $\mathbb{R}$ als Körper

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist ein Körper [EMA, Def 4.5.1], d.h. es gilt

(Axiome der Addition)

(A1) Assoziativgesetz: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(A2) Kommutativgesetz: $x+y = y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(A3) Existenz der Null: $\exists 0 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}$
additives Neutrales
$$x+0=x$$

(A4) Existenz von additiv Inversen: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}:$
$$x+(-x)=0$$

(Axiome der Multiplikation)

(M1) Assoziativität: $(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(M2) Kommutativität: $xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(M3) Existenz der Eins: $\exists 1 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}:$
multiplikativ Neutrales
$$x \cdot 1 = x$$

(M4) Existenz von mult. Inversen: $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}:$
$$x x^{-1} = 1$$

(Distributivgesetz) regelt die Verträglichkeit von $+,\cdot$

(D) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \quad x(y+z) = xy + xz$

1.3 BEM (Folgerungen aus den Körperaxiomen)

(i) Das additiv neutrale 0 und multiplikativ neutrale Element 1 sind eindeutig bestimmt [EMA, Prop 5.2.16].

(ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen $-x$ bzw x^{-1} eindeutig bestimmt [EMA, Prop. 5.2.33].

(iii) Es gibt keine Nullteiler, d.h $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \neq y$ $\Longrightarrow xy \neq 0$ [EMA, Bem 4.5.9]

(iv) Endliche Summen und Produkte reelle Zahlen erfüllen (erweiterte Versionen) von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz ["Klammerrechnung" zB $(x+y)(u-w) = ux + uy - xw - yw$] und wir verwenden die Summen- und Produktschreibweise $\sum$, $\prod$ [EMA, Kap 2.3].

1.4. Die komplexen Zahlen

(i) Per definitionem [EMA, Def 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reelle Zahlen [$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$], d.h. wir schreiben $z = (x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Auf $\mathbb{C}$ sind eine Addition und eine Multiplikation definiert $(z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2))$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(ii) Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper [EMA, Thm. 6.5.2] wobei $0 := (0,0)$ das Nullelement und $1 := (1,0)$ das Einselement sind.
D.h. für $\mathbb{C}$ gelten alle Punkte aus 1.2. mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ [klar weil 1.2 listet ja nur allgemein die Eigenschaften von Körpern]

(iii) Für $z = (x,y)$ verwenden wir auch die Schreibweise

Realteil von z Imaginärteil von z

$$z = x + iy, \quad x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

wobei $i = (0,1)$ die imaginäre Einheit genannt wird [EMA, Defs. 6.5.5, 6.5.6.]. i hat die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\underline{i^2} = (0,1)^2 \overset{(1.1)}{=} (-1,0) = -1 + i0 = \underline{-1}$$

(iv) $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper [EMA, Def. 5.4.13] von $\mathbb{C}$ [EMA, p.333] wobei $\mathbb{R}$ mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x,0) = x + i0 \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}$ eingebettet ist. (Siehe die graue Box in [EMA, p.333].) Insbesondere können wir $0 \in \mathbb{R}$ mit $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ identifizieren und $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$.

(v) $\mathbb{C}$ besitzt mit der komplexen Konjugation eine wichtige Struktur. Genauer haben wir die Abb [EMA, Def 6.5.8]

$$\begin{aligned} \bar{\ } : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\longmapsto \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$.

Sie ist ein Körperautomorphismus ([EMA, S.4.20(ii)] d.h. Körper isom. auf sich selbst) von $\mathbb{C}$, wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h.

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Man sagt die Komplexkonjugation ist eine Involution.

1.5 $\mathbb{R}$ als geordneter Körper

(Hier weichen wir etwas von [Hö] ab; die Zugänge sind aber äquivalent!)

(i) Auf der Menge $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert (die sog. natürliche Ordnung). Wir verwenden die Schreibweisen:

d.h. eine reflexive ($x \leq x$), transitive ($x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$) und antisymmetrische ($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$) Relation; siehe [EMA, Def 4.2.24(i)]

$$x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y :\Leftrightarrow y < x$$

(ii) $\leq$ ist eine Totalordnung [EMA, Def 4.2.24(iii)], d.h. es gilt die Trichotomie

(O1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

[Genauer sagt [EMA, Def 2.2.24(iii)]: es gilt mindestens eine der Aussagen $x \leq y$, $y \leq x$. Es gilt aber (4.2.24(iii)) $\Leftrightarrow$ (O1):

"$\Leftarrow$" ist klar

"$\Rightarrow$": per def gilt mind. eine der 3 Aussagen. Wir zeigen, dass niemals 2 oder alle 3 gelten können

- $x < y \wedge x = y$ ist per def nicht möglich [$x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$]
- $x > y \wedge x = y$ dito
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \overset{\text{antisym.}}{\Rightarrow} x = y$ was nicht möglich ist; siehe oben $\square$]

(iii) $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ ist ein geordneter Körper [EMA, Def 6.3.1], d.h. es gelten $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

Verträglichkeit von $\leq$ mit $+,\cdot$

(O2) $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$

(O3) $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow xy>0$

(iv) In $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ gelten die Rechenregeln [EMA, Prop 6.3.2] $(x,y,z\in\mathbb{R})$

$x\leq y \Longleftrightarrow y-x\geq 0$

$x\leq 0 \Longleftrightarrow -x\geq 0$

$x\leq y \wedge z\geq 0 \Rightarrow xz\leq yz$

$x\leq y \wedge z<0 \Rightarrow xz\geq yz$

$x\neq 0 \Rightarrow x^2>0$

$0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}$

1.6. Wiederholung (Intervalle) Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ verwendet man um wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu definieren – die Intervalle [EMA p. 153]. Seien $a<b\in\mathbb{R}$

$(a,b)\equiv\,]a,b[\,:=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ … offenes, beschränktes I.

$(-\infty,b)\equiv\,]-\infty,b[\,:=\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$ … offene, halbbeschränkte I.

$(a,\infty)\equiv\,]a,\infty[\,:=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$

$(a,b]\equiv\,]a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$ … halboffene, beschr. I.

$[a,b)\equiv[a,b[\,:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$

$(-\infty,b]\equiv\,]-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq b\}$ … abgeschlossene, halb-beschr. I

$[a,\infty)\equiv[a,\infty[\,:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\}$

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ … abgeschlossenes beschr. I.

Schließlich schreiben wir $(-\infty,\infty)\equiv\,]-\infty,\infty[\,=\mathbb{R}$

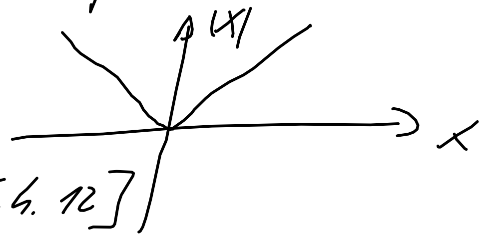
1.7. DER ABSOLUTBETRAG.

Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die „Abstandsmessung"; auf $\mathbb{R}$ bewerkstelligt das der Betrag [EMA, Def 6.4.11]

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion $|\;| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat den Graphen



und die folgenden Eigenschaften [EMA, Prop. 6.4.12]

(N1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
und $|x| = 0 \iff x = 0$ (positiv definit)

(N2) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Multiplikativität)

(N3) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Δ-Ungleichung)

Weiters gilt [EMA, p. 318] ($x, y \in \mathbb{R}$)

(i) $|-x| = |x|$ (Spiegelungssymmetrie)

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

(iii) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$, $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (verkehrte Δ-Ungl; UE $\boxed{0}$, 4)

(iv) $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

[$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases}$; das ist wohldefiniert wegen (O1)]

[detto] (UE $\boxed{0}$, 3)

1.8. (ÜBER) ABZÄHLBARKEIT [EMA, Kap. 4.4]

Eine Menge M heißt abzählbar, falls es eine Bijektion $F: M \to \mathbb{N}$ gibt.

Abzählbare Mengen sind: $\mathbb{N}$ (klar!), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, man sagt überabzählbar

Cantorsches Diagonalverfahren [EMA, p. 174]

[Es ist schon $(0,1)$ überabzählbar, [EMA, p.176]]

1.9. ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT → REP

Eine totalgeordnete Menge M heißt ordnungsvollständig, falls $\forall E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$, E nach oben (unten) beschränkt

(V) $\Longrightarrow$ E hat ein Supremum (Infimum) [EMA, Def 6.4.1 + Prop. 6.4.2]

kleinste obere Schranke – ein wichtiger Begriff → REP

[EMA, Def 4.2.32] $\alpha = \sup E$:⟺ (1) α ist obere Schranke von E ($\alpha \geq e \ \forall e \in E$)
(2) $\beta < \alpha \Rightarrow \beta$ ist nicht obere Schranke von E

Aufgabe der Woche

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht ordnungsvollständig – daher eignen sie sich nicht als Grundlage der Analysis!

[EMA, Bsp 6.4.3]

1.10. DEFINITION VON $\mathbb{R}$

Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt, die im Dedekindschen Satz [1.10; EMA Thm 6.4.4] vorkommen.

Er lautet: Es gibt bis auf Isomorphie (geordnete Körper) genau einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Teilkörper enthält.

Wir definieren nun $\mathbb{R}$ als genau jenen Körper.

$\mathbb{R}$ hat nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

- die Körperaxiome (algebraische Eigenschaften) (A1) – (A3), (M1) – (M3), (D)
- die Ordnungsaxiome (O1) – (O3)
- Ordnungsvollständigkeit (V)

„in $\mathbb{R}$ gelten die 4 Grundrechnungsarten"

„wir haben das übliche $\leq$"

„$\mathbb{R}$ hat im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ keine Löcher"

Zum Schluss des Abschnitts halten wir einige wichtige Folgerungen aus (V) fest

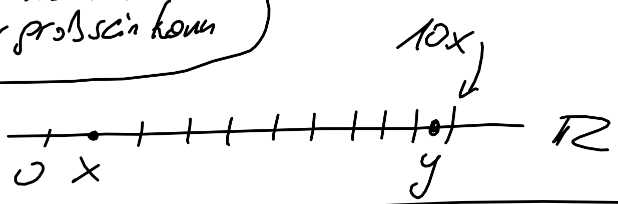
1.11. KONSEQUENZEN AUS DER ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT

(i) Die Archimedische Eigenschaft [EMA, Prop 6.4.5(i)] [REP]

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: nx > y$

Der Witz ist, dass x sehr klein und y sehr groß sein kann

n-faches Abtragen von x übertrifft y



(ii) Dichtheit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ [EMA, Prop 6.4.5(ii)]

Seien $x < y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < r < y$

Der Witz ist es, dass x sehr nahe bei y sein kann

$\mathbb{R}$ „Zwischen je zwei reellen Zahlen, egal wie nahe sie beieinander liegen, gibt es immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl"

(iii) Existenz & Eindeutigkeit von Wurzeln

Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$\Longrightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = a$ [EMA, Prop. 6.4.2]

Wir schreiben $x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und nennen x die n-te Wurzel aus a

1 Folgen und Reihen – Konvergenz

In diesem Kapitel legen wir den Grundstein der Analysis: den Konvergenzbegriff für Folgen. Wir werden also definieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiters werden wir Folgen als Werkzeug verwenden um den zentralen Begriff der (Ordnungs-) Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen als Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entlarven und unser diesbezügliches Wissen verwenden um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit konvergenten Reihen wird sich im Weiteren als ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder M, einer bel. Menge) – offizielle Def. später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie der EITA und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft – damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

§1 $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einige Konsequenzen aus der Archimedischen Eigenschaft

1.1. Wiederholung. (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$)

In [EMA, 6.1.1] wurde $\mathbb{N}$ als Menge definiert, die die Peano-Axiome erfüllt und in [EMA 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt. Es ist also $\mathbb{N}$ jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der Nachfolgerabbildung S die Axiome

(PA1) $0 \in \mathbb{N}$

(PA2) $\forall n \in \mathbb{N}: S(n) \in \mathbb{N}$ (d.h. $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$)

(PA3) $\nexists n \in \mathbb{N}: S(n) = 0$ (d.h. 0 ist kein Nachfolger)

(PA4) S ist injektiv, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N}: S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$

(PA5) Induktionsprinzip: Falls $M \subseteq \mathbb{N}$ und (PA1), (PA2) für M gelten [man sagt M ist induktiv: $0 \in M$ und $m \in M \Rightarrow S(m) \in M$] dann gilt schon $M = \mathbb{N}$

(PA5) sagt, dass vollst. Induktion funktioniert ...

1.2. Bem (Wohlordnung von $\mathbb{N}$)

Klarerweise ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (Details siehe [EMA, Kap 6, Ergänzungsstoff]). Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ besitzt $\mathbb{N}$ die Eigenschaft der Wohlordnung:

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ hat ein Min

Beweis: (i) Falls A endlich ist, dann gibt es klarerweise ein Minimum (es kann nach endlich vielen „Vergleichsschritten" gefunden werden).

(ii) Falls A unendlich ist wählen wir ein beliebiges $a \in A$ und zerlegen A in 2 Teilmengen:

$$B := \{x \in A : x \leq a\} \qquad C := A \setminus B$$

Nun gilt $A = B \cup C$ und B ist endlich $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \min B$

Außerdem gilt lt. Konstruktion $\forall b \in B \, \forall c \in C: b < c$

$\Longrightarrow \min B = \min A$. $\square$

Als nächstes halten wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft fest

Der Witz an "$\forall \varepsilon > 0$" ist, dass ε beliebig nahe bei 0 sein kann

1.3. THM (Die Macht von $1/n$)

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1: \; 1/n < \varepsilon$

(ii) Sei $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$. Falls $r < 1/n \;\; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ dann gilt schon $r = 0$

„$\frac{1}{n}$ wird beliebig klein"

„Zwischen $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ und 0 ist kein Platz"

Beweis:

(i) [Archimedes 0.1.11(i): $x = \varepsilon, y = 1$] $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n\varepsilon > 1$

$\Rightarrow \varepsilon > 1/n$

(ii) Sei $r \geq 0$. Falls $r > 0 \underset{(r=\varepsilon)}{\overset{(i)}{\Longrightarrow}} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 1: 1/m < r$

$\lightning$ zur Voraussetzung

Also gilt $r = 0$. $\square$

1.4. LEMMA (Bernoulli-Ungleichung) Sei $-1 \leq x \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis: Induktion

$n=0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$ ✓

Ind. Voraussetzung und $1+x \geq 0$?

$n \to n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$$= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

$\square$

1.5. PROP (Wachstum von Potenzen)

Für $b>1$ wird b^n größer als jede vorgegebene Zahl

Sei $b \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $b>1$, dann gilt

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: b^n > K.$$

(ii) Falls $0<b<1$, dann gilt

Für $0<b<1$ wird b^n kleiner als jede Postzahl

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: b^n < \varepsilon.$$

Beweis:

(i) Setze $x = b-1 \Rightarrow x>0$ und wir können die Bernoulli-Ungl verwenden

$$\overset{1.4}{\Longrightarrow} b^m = (1+x)^m \geq 1+mx \quad (*) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

Der Witz ist, dass K sehr groß sein kann

Sei $K \in \mathbb{R} \underset{x>0}{\overset{\text{Arch}}{\Longrightarrow}} \exists n \in \mathbb{N}: nx > K-1 \quad (**)$

Wünsche $m=n$ in $(*)$. Dann gilt $\underline{b^n} \overset{(*)}{\geq} 1+nx \overset{(**)}{>} 1+K-1 = \underline{K}$

(ii) Folgt aus (i); benutze setze $b_1 = 1/b \Rightarrow b_1 > 1$

$$\xrightarrow[{[b=b_1,\ K=1/\varepsilon]}]{(i)} \exists n \in \mathbb{N} : b_1^n > K$$

Also insgesamt $\underline{b}^n = \dfrac{1}{b_1^n} \underline{< \ \varepsilon}$. $\square$

Zum Abschluss des § betrachten wir geometrische Summen – ein ganz <u>wichtiges</u> <u>Werkzeug</u>

<u>1.6. GEOMETRISCHE SUMMEN</u> Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \end{aligned}}$$

(i) Für $x = 1$ erhalten wir

$$\underline{s_n(1)} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underline{n+1}$$

(ii) Um $s_n(x)$ für $x \neq 1$ zu berechnen schreiben wir

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$x\, s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \quad x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} \qquad -$$

$$\underbrace{s_n(x) - x\, s_n(x)}_{(1-x)\, s_n(x)} = 1 - x^{n+1} \Longrightarrow \boxed{s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (\ast) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})}$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von $S_n(x)$ für n groß (und $x \neq 1$). Dazu schreiben wir (*) um zu

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } n} - \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{\text{Interessanter Term}} \quad (**)$$

(iv) Für $|x|<1$ besagt 1.5(ii), dass der interessante Term betragsmäßig beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \underset{[1.1.4(ii),\, b=|x|]}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |x|^N < \varepsilon_1 \quad (***)$$

Klarerweise gilt (***) auch für alle $n \geq N$ und daher

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \underset{|x|<1}{=} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon_1}{1-x} \quad \forall n \geq N \quad (****)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig [klein; Witz?], setze $\varepsilon_1 = \varepsilon(1-x)$. Dann gilt $\forall n \geq N$

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \overset{(**)}{=} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \overset{(****)}{<} \frac{\varepsilon_1}{1-x} = \varepsilon .$$

Zusammengefaßt ist also $S_n(x)$ für $|x|<1$ und n groß sehr nahe an $1/1-x$, und zwar im folgenden präzisen Sinn:

Zu jeder vorgegebenen "Toleranzgrenze" ε können wir einen Index N finden, sodass der Fehler

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right|$$

kleiner als die Toleranz ε ist, falls $n \geq N$.

Anzahl von Berechnungsschritten

Diese Formalisierung stößt uns geradezu mit der Nase auf den kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg ...

§2 FOLGEN UND GRENZWERTE

Jetzt geht es los – und zwar mit der offiziellen

<u>2.1. DEF</u> (Folge) Sei M eine Menge. Eine <u>Folge in M</u> ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M$$

Gilt $M = \mathbb{R}$ bzw $M = \mathbb{C}$, so nennen wir a eine reelle bzw. komplexe Folge. [Zunächst wird fast immer $M = \mathbb{R}$ sein.]

<u>2.2. SCHREIBWEISE</u>. Nachdem eine Folge als eine spezielle Funktion definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl [EMA, 4.3]) hier gültig.

mit komischem Def bereich

Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige spezielle Schreibweisen eingebürgert:

(i) Statt $a(1), a(2)$, usw schreiben wir a_1, a_2, usw.

(ii) Für die ganze Folge schreiben wir statt a oft auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder kürzer } (a_n)_n \text{ oder nur } (a_n)$$

(iii) Hin und wieder werden Folgen auftreten, die erst bei $n=1$ oder noch später beginnen – das bringen wir durch die Schreibweise $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder etwa $(a_n)_{n=17}^{\infty}$ zum Ausdruck.

Ja aber: dürfen die das? Soll heißen: Sind das dann überhaupt Folgen im Sinne der Def?

Ja schon, denn sei $n_0\in\mathbb{N}$ und $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ eine Folge, die erst bei n_0 beginnt. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+n_0}$ eine „echte" Folge und es zahlt sich nicht aus, zwischen (a_n) und (b_n) zu unterscheiden.

2.3 BSP (Ganz einfache Folgen)

(i) Für alle $n\in\mathbb{N}$ setze $a_n = 2n$. Das ergibt die reelle Folge
$$(a_n)_n = (2n)_n = (0,2,4,6,8,\ldots)$$

(ii) Sei $c\in\mathbb{R}$. Mit $b_n = c\ \forall n\in\mathbb{N}$ erhalten wir eine sog. <u>konstante</u> (reelle) Folge
$$(b_n)_n = (c)_n = (c,c,\ldots).$$

Dafür hätten wir den Begriff aber nicht gebraucht...

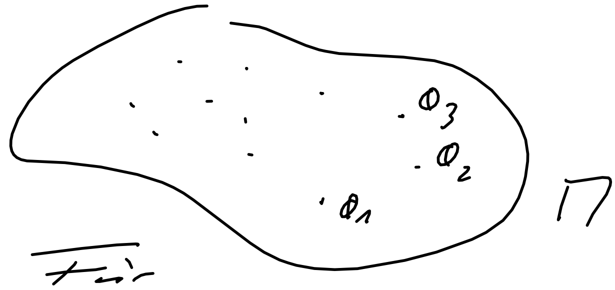
(iii) Mit $c_n = 1/n$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ erhalten wir

$$(c_n) = (1/n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

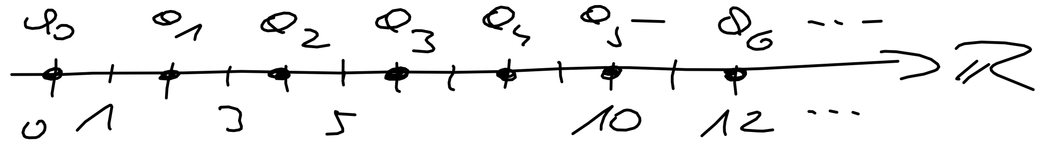
2.4. Veranschaulichung von Folgen. Es gibt 2 Wege Folgen in prägnanter Weise zu veranschaulichen.

(i) Spaziergang in M:

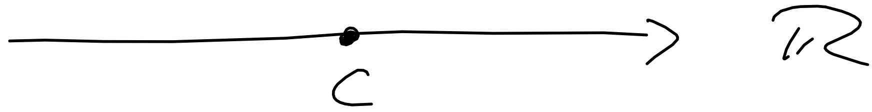
Man trägt die Werte a_n der Reihe nach in M ein. Für die Bsp in 2.3 ergibt das



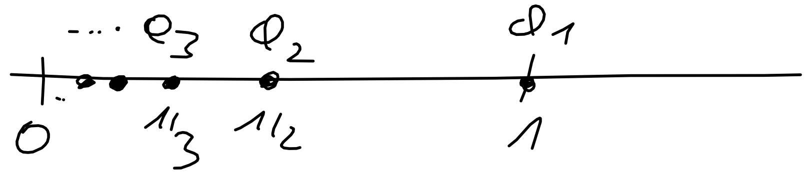
(a_n)



(b_n)

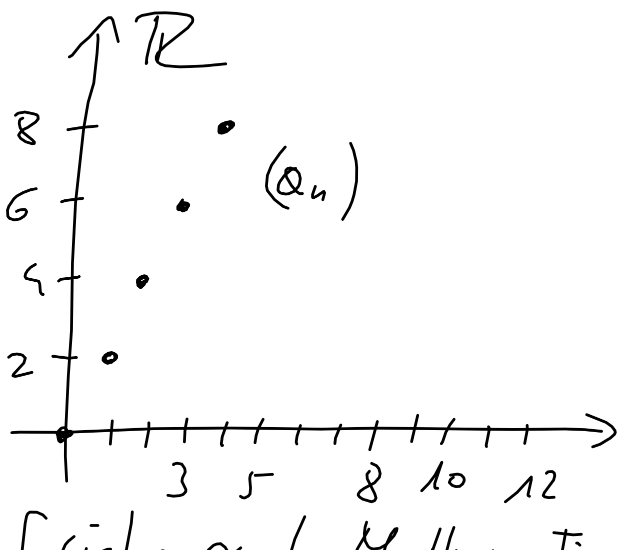


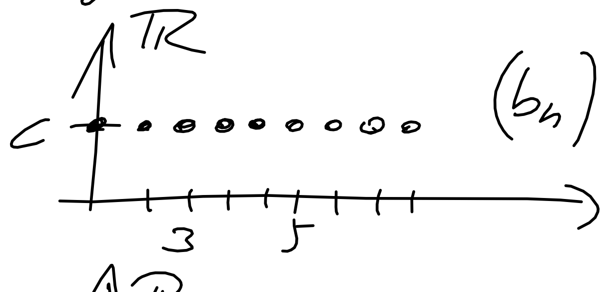
(c_n)

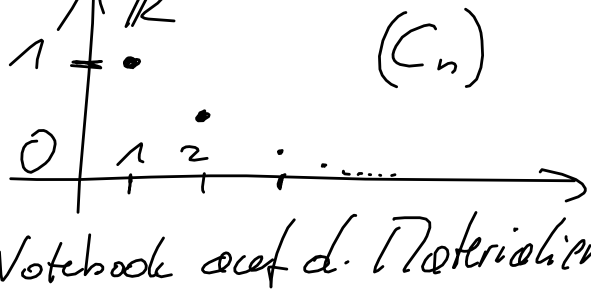


(ii) (Für reelle Folgen) Graph der Folge

Für die Bsp. aus 2.3. ergibt sich so







[siehe auch Mathematica-Notebook auf d. Materialienseite]

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii).

2.5 BSP (Einige wichtige Folgen)

Die Vorzeichenmaschine

(i) $a_n = (-1)^n$, $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

(ii) $b_n = \frac{n}{n+1}$, $(b_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$

(iii) $c_n = n/2^n$, $(c_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots\right)$

(iv) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert gemäß

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

f_n ist Summe seiner beiden Vorgänger

Es gilt also

$$(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$

(v) Geometrische Folge: Sei $x \in \mathbb{R}$, setze $d_n = x^n$, $(d_n) = (1, x, x^2, \dots)$

(vi) Geometrische Reihe (siehe 1.6. – war ja als wichtig angedroht!)

Sei wieder $x \in \mathbb{R}$ und definiere

$$s_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} d_k .$$

Wie in (v)

Dann gilt $(s_n) = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+\dots+x^3, \dots)$

[Darstellung gemäß 2.4 $\longrightarrow$ UE]

[Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Def ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Angelpunkt.]

2.6 DEF (Grenzwert) Sei (a_n) eine reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$.

Die Folge (a_n) konvergiert gegen a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \qquad (2.1)$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) und wir schreiben

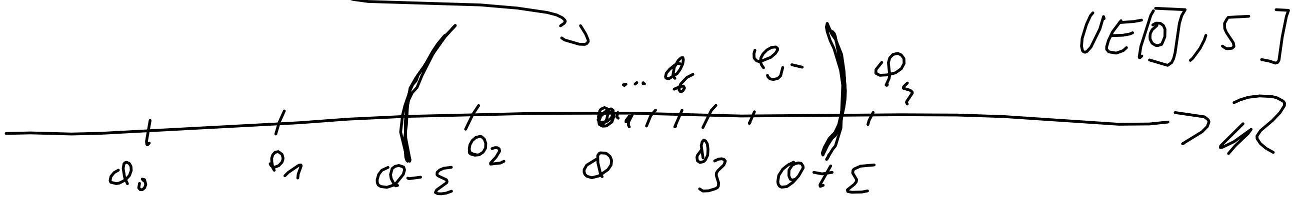
Sprich: a_n geht gegen a

$a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ bzw. kürzer $a = \lim a_n$ und

$a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$ bzw. kürzer $a_n \to a \ (n \to \infty)$.

2.7 GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG & SPRECHWEISEN

Für $\varepsilon > 0$ versteht man unter der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von $a \in \mathbb{R}$ alle Zahlen in $\mathbb{R}$, die von a Abstand kleiner als ε haben, also das offene Intervall $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$ [siehe auch UE $\boxed{0}$, 5]



Die Konvergenzbedingung (2.1) sagt nun: Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex N, sodass alle späteren Folgenglieder a_n $(n \geq N)$ in der ε-Umgebung des Grenzwerts a liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \forall n \geq N.$$

Andere Sprechweisen für die Konvergenzbedingung (2.1) sind

- die Folgenglieder a_n liegen schließlich in jeder (noch so kleinen?) ε-Umgebung des Grenzwerts a.

soll heißen ab einem bestimmten N, d.h. $\forall n \geq N$

bzw

- in jeder (noch so kleinen?) ε-Umgebung des Limes a liegen fast alle Folgenglieder a_n liegen.

soll heißen: alle bis auf endlich viele; nämlich bis auf $a_1, a_2, \ldots$
$\ldots a_{N-1}$

[Weitere gültige & ungültige Formulierungen in der UE]

Wir machen noch die folgenden Sprechweisen offiziell

2.8 DEF (Divergent, Nullfolge)

(i) Ist eine Folge (a_n) nicht konvergent (dh $\nexists a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$) dann heißt (a_n) divergent.

(ii) Gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, dann heißt (a_n) Nullfolge.

2.9 BEHANDLUNG VON BSP (Alles schön & gut, aber wie zeige ich konkret $a_n \to a$?)

(i) Will ich konkret für gegebenes (a_n), a zeigen, dass $a_n \to a$, dann muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N gefunden werden

i.a. schwerer für kleine ε

der darf ruhig von ε abhängen und wird es i.a. auch tun; oft schreibt man deshalb $N(\varepsilon)$

sodass die Abschätzung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle a_n nach a_N gilt.

GROSSE FETTE WARNUNG: Niemals darf umgekehrt ε von N abhängen vgl. [ETIA, 3.2.3.3]

$\cancel{\varepsilon(N)}$

(ii) Will ich hingegen zeigen, dass $a_n \not\to a$, so muß (nur) ein Versager-ε gefunden werden, sodass die a_n beliebig spät aus der ε-Umgebung raushüpfen. Das ergibt sich nämlich aus der Verneinung der Konvergenzbedingung

$$\neg\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon\right) =$$

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Es gibt zumindest ein Versager ε

sodass egal wie spät

es immer noch ein n gibt

sodass a_n nicht in $U_\varepsilon(a)$ liegt

(iii) Bei konkreten Bsp ist es also förderlich zuerst eine Vermutung über Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuweisen, also entweder (i) zu jedem $\varepsilon>0$ einen Index $N(\varepsilon)$ zu finden, ab dem alles gut ist, oder

(ii) ein Versager-ε zu finden für das auch beliebig späte Folgenglieder a_n aus der ε-Umgebung abhauen.

Bevor wir jetzt endlich mit konkreten Bsp anfangen noch eine einfache aber wichtige

2.10 BEOBACHTUNG (Der Folgenanfang ist egal)

Aus der Def 2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge (a_n) ändern, wenn endlich viele Folgenglieder verändert oder ganz weggelassen werden

[d.h. $\exists M\in\mathbb{N}$ sodass $\forall n\geq M$ die a_n gleich bleiben – es wird also nur am Folgenanfang herumgebastelt]

2.11. BSP

banales Bsp!

So banal, dass N von ε unabhängig wählbar

(i) Konstante Folgen konvergieren.

Sei $c\in\mathbb{R}$ beliebig und $b_n=c$ $\forall n$ [2.3(ii)] dann gilt $\lim b_n=c$.

Denn sei $\varepsilon>0$ beliebig, wähle $N=0$, dann gilt

$|b_n-c|=0<\varepsilon$ $\forall n\geq N$.

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge ← das Erzbeispiel anschaulich klar vgl. 2.3(iii)

Sei $\varepsilon > 0 \xRightarrow{1.3(i)} \exists N \in \mathbb{N}: 1/N < \varepsilon$

eigentl. Archimedes

$\Longrightarrow \forall n \geq N: \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

[Bemerke 1.3(i) ist nichts anderes als die Feststellung Archimedes $\Rightarrow 1/n \to 0$; es gilt aber auch "$\Leftarrow$" siehe VE]

(iii) Die Vorzeichenmaschine divergiert. (anschaulich klar, oder?)

Sei $(a_n) = (-1)^n$, dann gibt es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$.

Wir beweisen das indirekt. [Für einen Beweis direkt aus der Def mit Versager-ε's $\leadsto$ VE]

Ang $\exists a \in \mathbb{R}: a_n \to a$.

Setze $\varepsilon = 1/2 \xRightarrow{2.6} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N \quad (*)$

Zusätzlich bemerke $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(-1-1)| = 2$

Damit ergibt sich $\forall n \geq N$ ← fieser Trick!

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n|$$

Δ-Ungl $\leadsto$ $\leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \overset{(*)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad ↯$

(iv) $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ [Diese Konvergenz kann nach 2.5(ii) bzw VE vermutet werden]

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$ [vgl. (ii)]

Wie das Amen im Gebet

Dann gilt $\forall n \geq N$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

(v) $\underline{\lim \frac{n}{2^n} = 0}$ [Vermutung wiederum nach 2.5(iii) bzw UE]

Wir verwenden folgendes

LEMMA $\forall n \geq 4: n^2 \leq 2^n$ [Beweis UE $\boxed{0}$ 1(ii)]

Es gilt also $\frac{n}{2^n} \leq 1/n \quad \forall n \geq 4.$ (*) (ok wegen (ii))

Sei nun $\underline{\varepsilon > 0}$ und wähle N so dass $N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right)$ (**)

Dann gilt $\underline{\forall n \geq N}$

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \overset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2.12 MOTIVATION (Naja – zum Teil ganz schön trickreich...)

Wir haben gesehen, dass beim Bearbeiten von konkreten Bsp einiges an Kreativität und auch Übung nötig ist... Bevor wir weitere wichtige Bsp angehen erweitern wir unseren Begriffsapparat – was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

2.14 DEF (Beschränkte Folge) Sei (a_n) eine reelle Folge.

(a_n) heißt nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt, falls $\exists K \in \mathbb{R}$:

$$a_n \left\{\begin{matrix}\leq K\\ \geq K\end{matrix}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) heißt beschränkt, falls (a_n) nach oben und unten beschränkt ist.

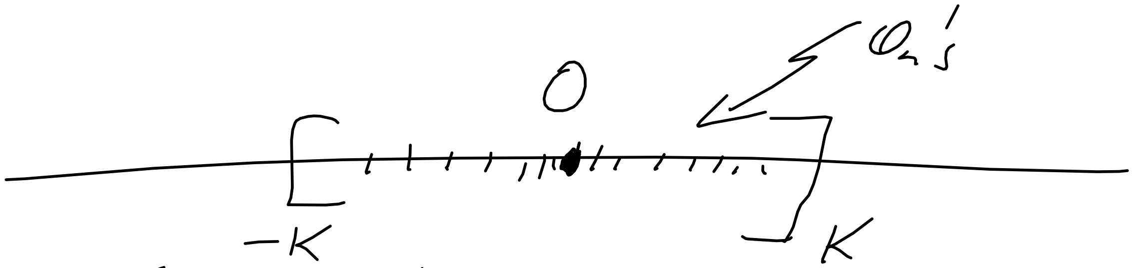
2.15 BEOBACHTUNG (Beschränkte Folgen sind eingesperrt)

Def 2.14 besagt,

$$(a_n) \text{ beschränkt} \iff \exists K>0: |a_n| \le K \ \forall n \in \mathbb{N}$$

[wähle das Max der K's in 2.14 für oben bzw unten]

Geometrisch bedeutet das, dass alle a_n im Intervall $[-K, K]$ liegen (also dort eingesperrt sind)



2.16 Bsp (Un)-beschränkte Folgen

(i) $a_n = n$ ist nach unten durch 0 beschränkt
[$a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$]
aber nicht nach oben

d.h. K kann 0 gewählt werden

[Folgt direkt aus dem Archimed. Axiom:
$\forall K > 0$ gilt $\exists n \in \mathbb{N}: n > K$ [$x=1, y=K$]]

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist beschränkt.

nach unten beschr.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ ist durch 0 n.u.b [$0 < 1/n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0}$ 1.5(iv)]
und durch 1 n.o.b [$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \le 1 \ \forall 1 \le n \in \mathbb{N}$]

Die Tatsache, dass die konvergente Folge $(1/n)$ beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein allg. Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

2.17 SATZ: (Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt)

Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt

Beweis. Sei $a = \lim a_n \overset{2.6}{\underset{\varepsilon=1}{\Longrightarrow}} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq N$

Schon wieder das...

$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nun setze $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1\}$.
Dann gilt $|a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. □

2.18 WARNUNG (beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergent)

Die Umkehrung von 2.17. ist FALSCH. Ein Gegenbsp ist etwa die Vorzeichenmaschine $a_n = (-1)^n$:
$|a_n| \leq 1 \ \forall n$ aber a_n divergent nach 2.11(iii)

Wir arbeiten nun unsere Beispielliste aus 2.5 weiter ab.

2.19 BSP

(i) Die Fibonaccifolge ist divergent.

$f_0 = 0, f_1 = 1$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Wir zeigen, dass (f_n) unbeschränkt ist $\overset{2.18}{\Longrightarrow} (f_n)$ divergent.

Genauer behaupten wir: $\boxed{f_n \geq n \quad \forall n \geq 5}$

Beweis mittels Induktion:

$n=5$: $f_5 = 5$ (vgl 2.5(iv))

$n \Rightarrow n+1$: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \underset{(IV)}{\geq} n + (n-1) \overset{n\geq 6}{\geq} n + (2-1) = n+1$ □

(ii) Für ein (beliebiges aber fixiertes) $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die geometrische Folge $a_n = x^n$

Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von x ab

FALL (1): $\boxed{|x|>1 \Rightarrow x^n \text{ divergent}}$

Wachstum von Potenzen

$$|x|>1 \overset{1.5(i)}{\Longrightarrow} \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: |x|^n > K$$
$[b=|x|]$

$$\Longrightarrow x^n \text{ unbeschränkt} \overset{2.17}{\Longrightarrow} x^n \text{ divergent}$$

FALL (2): $|x|=1$ also $x=1 \Rightarrow a_n = 1\ \forall n \overset{2.11(i)}{\Longrightarrow} a_n \to 1$

oder $x=-1 \Rightarrow a_n = (-1)^n \Rightarrow$ div
2.11(iii)

FALL (3): $\boxed{|x|<1 \Rightarrow x^n \to 0\ (n\to\infty)}$

der interessante Fall

das war leicht

Falls $x=0 \Rightarrow x^n = 0\ \forall n \geq 1 \overset{2.11(i)}{\Longrightarrow} a_n \to 0$

Bleibt nur der Fall $0<|x|<1$. Sei $\varepsilon>0$

$\overset{1.5(ii)}{\Longrightarrow}$ $\exists N \in \mathbb{N}: |x|^N < \varepsilon$ und damit $\forall n \geq N$
$[b=|x|]$

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon .$$

2.20 HOPPALA (Der Grenzwert?)

Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge geredet. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa 2 oder 3? Zum Glück gilt...

[vgl. die Anmerkung in [EMA, graue Box, p. 118]]

2.21. SATZ (Eindeutigkeit des Limes)

Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes

Beweis. [Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe 2 verschiedene Limiten und folgern daraus einen Widerspruch.]

Ang: $\exists\, a \neq b$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b \Rightarrow \frac{|a-b|}{3} =: \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$$

$\overset{a\neq b}{\Longrightarrow} 1 < 2/3$ ↯

□

2.22 MOTIVATION (Weitere theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz)

Ganz im Sinne von 2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limiten weitere Hilfestellungen bitter nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können um Grenzwerte komplizierterer Folgen zu berechnen

2.23 SATZ (Summen & Produkte konvergenter Folgen)
Seien (a_n) und (b_n) konvergente (reelle) Folgen.
Dann konvergieren auch $(a_n+b_n)_n$ und $(a_n \cdot b_n)_n$
und es gilt

$$\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$
$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

Die Summe konvergenter Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte; dito fürs Π

Beweis. Sei $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$

Summe: Wir müssen zeigen, dass $a_n+b_n \to a+b$.
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2 > 0$ und daher
$$\exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ |a-a_n| < \varepsilon/2, \text{ und}$$
$$\exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ |b-b_n| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$$
$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)|$$
$$\leq |a_n-a| + |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Produkt: zz: $a_n b_n \to ab$
(a_n) konv $\overset{2.17}{\Longrightarrow}$ (a_n) beschr, genauer: $\exists K_1 > 0 : |a_n| \leq K_1 \ \forall n$

Definiere $K := \max(K_1, |b|) > 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2K > 0$ und wegen $a_n \to a$, $b_n \to b$ gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_1$$
$$\exists M_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_2$$
$$\Rightarrow \forall n \geq M := \max(M_1, M_2)$$
$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b-b_n) + (a_n-a)b|$$

$$\leq |a_n||b_n-b| + |a_n-a||b|$$

Δ-Ungl

$$< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K = \varepsilon$$

□

2.24 BEM (Polierte Beweise) Natürlich ist insbesondere der letzte Beweis POLIERT, in dem Sinn, dass ε und K so gewählt wurden, dass am Schluss $< \varepsilon$ dasteht und nicht etwa $2K\varepsilon$. Letzteres wäre zwar auch okay, aber eben nicht ganz so lässig. [VE]

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der Δ-Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von $\varepsilon/2$-Beweisen [vgl. Summe in 2.23]. Wir werden aber sehr bald auch $\varepsilon/3$-Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der Δ-Ungl. angedeutet.
Statt weiterer „Methodologie" lieber eine (einfache) Folgerung aus 2.23

2.25 KOR: (Linearkombinationen konv. Folgen)
Seien (a_n), (b_n) konvergente (reelle) Folgen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$$

Beweis. Das Korollar folgt aus 2.23 mittels eines Tricks: Wir interpretieren die Folge $(\lambda a_n)_n$ als Produkt zweier Folgen

$$(\lambda a_n)_n = (\lambda)_n \cdot (a_n)_n$$

konstante Folge $(\lambda)_n \to \lambda$ (2.11(i))

$$\overset{2.23}{\Longrightarrow} \lambda a_n \to \lambda \lim a_n$$

Analog folgt $\mu b_n \to \mu \lim b$ und mit dem Summenteil in 2.23 haben wir insgesamt

$$(\lambda a_n)+(\mu b_n) \longrightarrow \lambda \lim a + \mu \lim b \,. \qquad \square$$

2.26 SATZ (Quotienten konvergenter Folgen)

Seien (a_n), (b_n) konvergente (reelle) Folgen mit $\lim b_n =: b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $b_n \neq 0 \; \forall n \geq n_0$, die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergiert und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

$\exists \frac{1}{b_n}$? Ja für n groß genug

Idee: 0 $b/2$ b

Beweis: Sei $a := \lim a_n$

(1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass $b_n \neq 0$ für große n:

$b \neq 0 \Rightarrow |b|/2 \; (=: \varepsilon') > 0$

$\overset{(b_n \to b)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0: \frac{|b|}{2} > |b_n - b| \geq |b| - |b_n| \Longrightarrow |b_n| > |b|/2 > 0 \quad (*)$

umgekehrte Δ-Ungl

(2) Wir zeigen $(1/b_n)_{n \geq n_0} \longrightarrow 1/b$.

Achtung: Schon wieder poliert

Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \varepsilon'' := |b|^2 \varepsilon / 2 > 0$

$\overset{[b_n \to b]}{\Longrightarrow} \exists N_1 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad (**)$

$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_1)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| \overset{(*)(**)}{<} \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(3) Aus Satz 2.23 folgt sofort $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $\square$

2.27 BSP (Im Sinne von 2.22)

$$\lim \frac{3n^2 + 13n}{n^2 + 2} = \lim \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \underset{\wedge}{\overset{[2.26]}{=\!=}} 3$$

Trick: dividiere Zähler und Nenner durch die jeweils höchste n-Potenz

$$3 + \frac{13}{n} = 3 + 13\frac{1}{n} \xrightarrow[{[2.25, 2.26]}]{} 3 + 13 \cdot 0 = 3$$

$$1 + \frac{2}{n^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[{[2.23, 2.25, 2.26]}]{} 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

2.28 SATZ (Größenvergleich konvergenter Folgen)

Seien $(a_n), (b_n)$ (reelle) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n (d.h. $\exists n_0 : a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$) dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n$$

Idee: 0 c_n ~~(c)~~ kann nicht Lim. sein

Beweis:

- Setze $c_n := b_n - a_n \Longrightarrow c_n \geq 0$ für fast alle n

$$\overset{2.25}{\Longrightarrow} \exists c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$$

Daher genügt es zz, dass $c \geq 0$

- Indirekt ang. $c < 0$. Setze $-c := \varepsilon > 0 \overset{2.6}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

$$\varepsilon > |c_n - c| = |c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| \underset{\wedge}{=} c_n + \varepsilon$$

$[c_n \geq 0, \varepsilon > 0]$

$\Longrightarrow 0 > c_n \ \forall n \geq N$ ↯ WID

$\square$

2.29 SATZ (Sandwich-Lemma) Seien (a_n), (b_n), (c_n) (reelle) Folgen und $\exists n_0$ $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \ge n_0$

und $a_n \to a$, $c_n \to a$. Dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt $b_n \to a$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \implies \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N_0 \begin{cases} |a_n - a| < \varepsilon \\ |c_n - a| < \varepsilon \end{cases}$

$$\implies a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \ge N := \max\{n_0, N_0\}$$

$$\overset{(-a)}{\implies} \quad -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \qquad \forall n \ge N$$

$$\implies |b_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \ge N \implies b_n \to a. \qquad \square$$

2.30 Bsp (Wieder im Sinne von 2.22; mit einem Bonus)

Sei $(n \ge 1)$ $b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$

Es gilt $n+1 \le k \le 2n \implies n < k \implies \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}$

und daher

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n\text{-mal}} = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\underset{[a_n = 0,\ c_n = \frac{1}{n}]}{\overset{\text{Sandwich-L}}{\implies}} \quad \boxed{b_n \to 0}$$

2.31 WARNUNG (Kein 2.28 für $<$ statt $\le$) (a_n), (b_n) konv;

$$a_n < b_n \ (\text{sogar}) \ \forall n \ \overset{2.30}{\not\Longrightarrow} \ \lim a_n < \lim b_n$$

$$\overset{2.28}{\implies} \lim a_n \le \lim b_n$$

das ist der Bonus von 2.30

2.32 MOTIVATION (Unendliche Reihen-Formulierung)

Einige der bisher untersuchten Folgen waren als Summen gegeben (z.B. 2.5(vi) = die geometrische Reihe, 2.30). Genauer, sei $(a_n)_n$ eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Def unten) durch Summieren

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vage – um ihn genauer zu fassen betrachten wir die sog. Partialsummen

$$s_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$$

und fassen $(s_m)_m$ als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen – nämlich als die Folge der Partialsummen – auffassen und so alles, was wir über Folgen schon herausgefunden haben verwenden. Nun offiziell.

2.33 DEF (Reihe) Sei (a_n) eine Folge.

(i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die m. Partialsumme

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$$

(ii) Die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe mit Gliedern a_n und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \left(\text{oder kurz } \sum a_n\right) \text{ bezeichnet.}$$

(iii) Konvergiert (s_m), so sagen wir auch die Reihe konvergiert. Wir bezeichnen $\lim s_m$ ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (kurz $\sum a_n$) nennen ihn Summe der Reihe.

2.34 BEM (Zur Notation) Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\left(\sum a_n\right)$ steht also für 2 Dinge

(i) die Reihe selbst, also die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen

(ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Ganz analog zu Folgen betrachten wir auch Reihen $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ für ein beliebiges $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

2.35 BSP: Sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \geq 1)$. Die korrespondierende Reihe ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Bemerke, dass $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$. $\left[\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 - n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\right]$

Daher gilt für die Partialsummen

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \ldots$$

wie in 2.22

$$\ldots + \left(\frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1}\right) + \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m}\right) = \frac{m}{m+1} \to 1$$

Bsp zu 2.11(iv)

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{m\to\infty} s_m = 1$$

2.36 HOPPALA (Reality check)

Wie können wir intuitiv verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Zahlen nicht unendlich ergibt, also konvergiert – so wie in Bsp 2.35 passiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1 \qquad ?$$

Natürlich werden die a_n immer kleiner; es gilt sogar

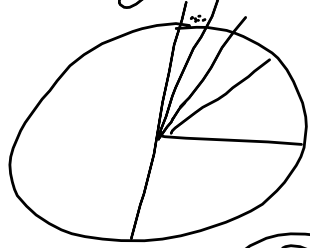
$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0$ $\left[0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} \to 0 \right.$ dann Sandwich-Lemma]

Aber warum (bzw. wann) reicht das?

Für eine intuitive Antwort betrachten wir eine Torte. Zunächst essen wir die halbe Torte, dann (sparsamerweise) von der verbliebenen Hälfte die Hälfte usw. Es ergibt sich die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann – wir hatten ja nur eine Torte ;-P Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Bsp sehen werden.



2.37 BSP (Die geometrische Reihe) ⟵ DAS Erzbsp

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Wir betrachten $\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right.$

Praktischerweise haben wir in 1.6 schon die Partialsummen s_m ausgerechnet:

$$s_m(x) = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \qquad (*)$$

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 2.19(ii) (wo wir praktischerweise schon das Konvergenzverhalten der Glieder x^n berechnet haben).

FALL(1): $\boxed{|x|>1 \Rightarrow \sum x^n \text{ divergent}}$

$$S_m \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} x^{m+1} \Rightarrow S_m \text{ unbeschr} \overset{2.17}{\Rightarrow} S_m \text{ div}$$

unbeschränkt nach 2.19(ii)

FALL(2): $\boxed{|x|=1 \Rightarrow \sum x^n \text{ divergent}}$

Sei $x=1 \Rightarrow S_m \overset{(*)}{=} m+1$ unbeschr $\Rightarrow$ div.

Sei $x=-1 \Rightarrow$
$$S_m \overset{(*)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow S_m$ divergent (analog VT-Maschine 2.11(iii))

FALL(3): $|x|<1 \Rightarrow$
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

der wichtige FALL D

Eine der wichtigsten Formeln der VO

$$S_m \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$x^{m+1} \longrightarrow 0$ [2.19(ii)]

$\dfrac{x^{m+1}}{1-x} \longrightarrow 0$ [2.23]

Als Spezialfälle von Fall (3) betrachten wir $x=\pm 1/2$. Wir erhalten

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

vgl. Torte 2.36

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

2.38 BEM (Konvergenz von Reihen) Im Vergleich zu „normalen" Folgen ist es oft schwieriger die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier halten wir nur ein einfaches strukturelles Resultat für Summen (LK) konv. Reihen fest – Produkte sind komplizierter ... später

2.39 PROP (Linearkombinationen konv. Reihen) Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Beweis. Wende Kor 2.25 auf die Partialsummen an. [UE] $\square$

2.40 BSP: (Periodische Dezimalzahlen) Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die periodische Dezimalzahl $x = 0{,}086363\overline{63}$ ← Schreibweise: 63 wiederholt sich immer wieder.

Das bedeutet, dass x folgenden Wert hat

$$x = \frac{8}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$

$$= \frac{8}{100} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \dots = \frac{8}{100} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{63}{10^{4+2k}}$$

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{63}{10^{4+2k}} \overset{[2.39]}{=} \frac{63}{10^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(10^{-2}\right)^k \overset{[2.37]}{=} \frac{63}{10^4}\,\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000}\,\frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{855}{9900} = \boxed{\frac{19}{220}}$$

2.41 MOTIVATION. (Ein genauerer Blick auf divergente Folgen)

Zum Abschluss dieses langen § werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet

- die Vorzeichenmaschine $(-1)^n$ ist divergent aber beschränkt
- $a_n = n$ ist unbeschränkt und (daher) divergent.

Wir führen nun für diese 2. Art – nämlich über alle Schranken hinauswachsend – der Divergenz einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmte" Divergenz.

2.42 DEF (Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz)

(i) Eine (reelle) Folge (a_n) heißt <u>uneigentlich konvergent</u> oder <u>bestimmt divergent gegen $+\infty$</u> (oder kurz ∞), falls

$$\underbrace{\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; a_n > K \quad \forall n \geq N}$$

wächst schließlich über jede Schranke hinaus

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $[a_n \to \infty]$

(ii) Wir sagen a_n <u>konvergiert uneigentlich</u>, oder <u>divergiert bestimmt gegen $-\infty$</u>, falls $(-a_n) \to \infty$ und schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $[a_n \to -\infty]$.

2.43 BEOBACHTUNG (Bestimmte Div. & Schranken)

(i) $a_n \to -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{N}: \; a_n < K \quad \forall n \geq N$

(ii) Bestimmt divergente Folgen sind unbeschränkt, genauer:

$a_n \to \infty \implies (a_n)$ nach oben unbeschränkt

$a_n \to -\infty \implies (a_n)$ —"— unten —"— ——

2.44 BSP (Bestimmt divergente Folgen)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim(-n^2) = -\infty$

(ii) $a_n = (-1)^n n$ ist unbeschränkt daher divergent aber <u>nicht</u> bestimmt divergent, denn $a_{2n} \to \infty$ und $a_{2n+1} \to -\infty$

Also ist die Umkehrung von 2.43(ii) falsch

$$\boxed{\text{bestimmt divergent} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{unbeschränkt}}$$

2.45 PROP (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte)

Seien (a_n), (b_n), (c_n) (reelle) Folgen mit $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n, c_n \to \infty$

Dann gilt

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim(b_n + a_n) = \infty$

(ii) $\lim(b_n + c_n) = \lim(c_n + b_n) = \infty$

(iii) $\lim(a_n - b_n) = \lim(-b_n + a_n) = -\infty$

(iv) falls $a > 0$: $\lim(a_n b_n) = \lim(b_n a_n) = \infty$

(v) $\lim(b_n c_n) = \lim(c_n b_n) = \infty$

Beweis: [UE] $\square$

2.46 WARNUNG.

Es gibt keine analogen Rechenregeln für die Differenz uneigentlich divergenter Folgen bzw das Produkt von uneig. div. Folgen mit Nullfolgen:

- $\lim n = \infty$, $\lim n^2 = \infty$, $\lim(n - n) = 0$, $\lim(n - n^2) = -\infty$
- $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim(n\frac{1}{n}) = 1$, $\lim(n\frac{1}{n^2}) = 0$

2.47 PROP (Kehrwerte best. div. Folgen & Nullfolgen)

Sei $(a_n)_n$ eine (reelle) Folge

(i) $\lim a_n = \infty$ [oder $-\infty$] $\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$

und $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0$

(ii) $\lim a_n = 0$, $a_n > 0 \ \forall n$ [bzw. $a_n < 0 \ \forall n$] $\Longrightarrow \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty$ [bzw. $-\infty$]

Beweis.

(i) • Es genügt $a_n \to +\infty$ zu betrachten [vgl. Def 2.42(iii)]

• Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass wir $\frac{1}{a_n}$ zumindest für große n bilden können. Er folgt unmittelbar aus Def 2.42(i) mit $K=0$:

$$K := 0 \overset{2.42(i)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_n > K = 0 \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerke: $\frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall n \geq n_0$

• Wir zeigen $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$, setze $K = 1/\varepsilon$

$$\overset{2.42(i)}{\Longrightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N}: \ a_n > K = 1/\varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_0): \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \ .$$

(ii) [UE] $\square$

2.48 BSP. $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0 \overset{2.47(ii)}{\Longrightarrow} \lim\left(\frac{2^n}{n}\right) = \infty$

[2.11(v)] $\left[\frac{n}{2^n} > 0 \ \forall n\right]$

2.49 BEM (Bestimmte Divergenz vererbt sich nach oben resp. unten)

Falls $a_n \le b_n$ für fast alle n und $a_n \to \infty$ dann folgt (direkt aus Def 2.46(ii)) $b_n \to \infty$.

Analog für $a_n \le b_n$ und $b_n \to -\infty$.

§3 VOLLSTÄNDIGKEIT VON $\mathbb{R}$, KONVERGENZPRINZIPIEN

3.1. MOTIVATION (Ordnungsvollständigkeit) Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (auch Supremumseigenschaft; $\boxed{0}$,1.9)

(V) Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum)

kleinste obere Schranke

an wesentlichen Stellen verwendet. Z.B folgt die Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. $\boxed{0}$ 1.11 (i)] und diese wiederum impliziert $\frac{1}{n} \to 0$.

In diesem § wollen wir (V) und seinen Konsequenzen weiter nachspüren – (V) ist der rote Faden der sich durch die gesamte Analysis zieht.

Zu diesem Zweck benötigen wir ersteinmal 2 neue Begriffe nämlich Teilfolge und Häufungswert um zu einem ersten Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

3.2 MOTIVATION (Teilfolge) Wir lernen hier ein Verfahren kennen um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln – dieses ist intuitiv sehr einfach zu verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verwirrend).

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge (a_n) erhält man, wenn man einige Glieder von (a_n) auslässt, z. B.

$(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ hat etwa die TF

$(0, 4, 8, 16, \dots)$, $(0, 6, 12, 18, \dots)$, [alle durch 3 teilb.]

$(0, 4, 10, 18, \dots)$ [a_1 ausgelassen, a_3, a_4 ausgelassen, ...]

Wesentlich dabei ist es, dass

- nur Glieder der Ausgangsfolge (a_n) verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keinerlei Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder a_n verwendet werden [lax: Jede Folge ist TF von sich selbst] oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine TF von (a_n) sind z. B.

$(0, 1, 2, 4, 6, \dots)$ oder $(0, 2, 6, 4, \dots)$ Reihenfolge verändert

kommt in (a_n) nicht vor bzw. $(0, 2, 2, 4, 6, \dots)$

kommt doppelt vor

Technisch beschreibt man diesen Prozess indem man aus der Menge der Indizes $0, 1, 2, 3, \dots$ gewisse auswählt also z.B. $1, 3, 5, 7, \dots$ und damit die zugehörigen a_n's, also $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ Dh aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gewisse $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ [hier $n_0 = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 7$] mit $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$. Nun offiziell:

3.3 DEF (Teilfolge) Sei $(a_n)_n$ eine Folge.

Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. eine Folge natürlicher Zahlen) mit der Eigenschaft $n_0<n_1<n_2<\dots$ (d.h. $n_k<n_{k+1}\ \forall k\in\mathbb{N}$) dann heißt die Folge

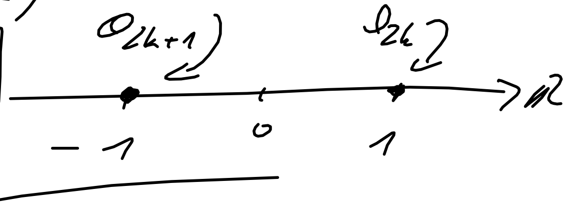
$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge (TF) der Folge (a_n).

3.4 BSP (TF).

(i) $a_n=(-1)^n$ hat zB Teilfolgen $(a_{2k})_k=(1,1,\dots)=(1)_k$ (d.h. $n_k=2k$)
($n_k=2k+1$) und $(a_{2k+1})_k=(-1,-1,-1,\dots)$

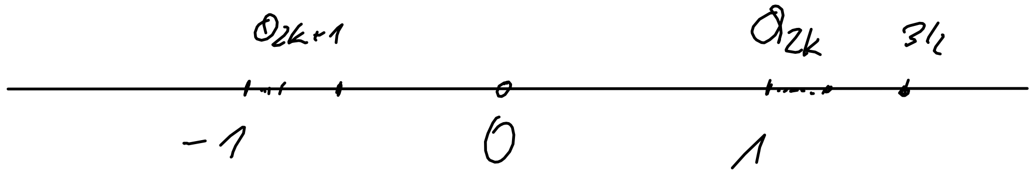
(ii) $b_n=\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}=\left(0,1+\frac{1}{2},-1+\frac{1}{3},\dots\right)$



hat etwa als TF

$$(b_{2k})_k=\left(1+\frac{1}{2k}\right)_{k\geq 1} = \left(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}, \dots\right)$$

$$(b_{2k+1})_k=\left(-1+\frac{1}{2k+1}\right)_{k\geq 0}=\left(-1+1=0, -1+\frac{1}{3}, \dots\right)$$



(iii) $(c_n)_{n\geq 1}=\left(1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},6,\dots\right)=\begin{cases} n & n \text{ gerade}\\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade}\end{cases}$

hat etwa TF $(c_{2k})_{k\geq 1}=(2k)$

$$(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

(iv) i.a. gibt es mehrere Wahlen von $(n_k)_k$ um dieselbe TF zu erzeugen. So ist etwa auch $(a_{4k})=(1)_k$

(v) Keine TF von (a_n) ist $(-1, 0, -1, 0, \ldots)$ [0 kommt in a_n nicht vor]

Keine TF von (b_n) ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ [$1+\frac{1}{3}$ kommt nicht vor]

bzw $\left(-1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{5}\right)$ [Reihenfolge falsch, d.h. $\nexists$ Wahl von n_k mit $n_k < n_{k+1}$]

3.5 MOTIVATION (Häufungswert)

In 3.4 (i) und (ii) haben die Punkte ± 1 eine spezielle Rolle: sie sind jeweils Grenzwerte von Teilfolgen

$[a_{2k} = (1)_n \to 1,\ a_{2k+1} = (-1) \to -1,$

$b_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right) \to 1,\ b_{2k+1} = -1+\frac{1}{2k+1} \to -1]$

Solche Punkte sind interessant & verdienen einen eigenen Namen:

3.6 DEF (Häufungswert einer Folge)

Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a heißt Häufungswert (HW) von (a_n), falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$$

3.7 BSP (HW)

(i) Sei $a = \lim a_n$, dann ist a [faderweise] auch Häufungswert

(ii) Die VZ-Maschine $a_n = (-1)^n$ hat die beiden HW ± 1

(iii) $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ hat ebenso die beiden HW ± 1

(iv) $c_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat ob einzigen HW 0.

3.8 MOTIVATION (Wieviele Folgenglieder sind nahe zum HW?)

Sei $a = \lim a_n$, dann liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) a_n

[vgl. 2.7]

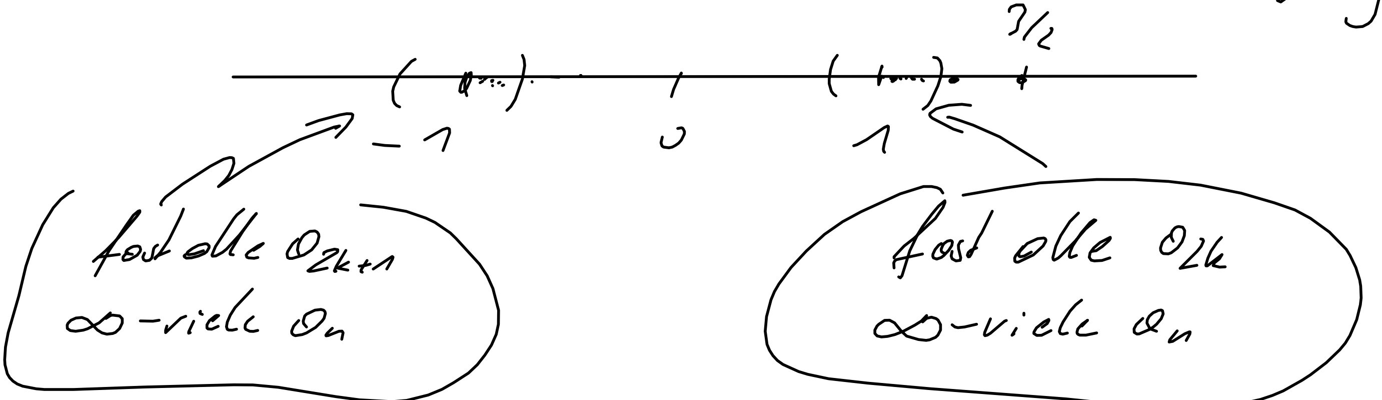
Gilt (nur) a ist HW von (a_n), dann $\exists$ (nur) TF a_{n_k} mit $a_{n_k} \to a$; also liegen alle bis auf endlich viele der a_{n_k} in jedem $U_\varepsilon(a)$ — das sind zumindest unendlich viele der a_n. Diese Eigenschaft ist charakterisierend für HW — wie die nächste PROP lehrt. Vorher noch eine

WARNUNG: In obiger Situation müssen die alle bis auf endlich vielen a_{n_k} nicht schon alle bis auf endlich viele der a_n sein. Mit anderen Worten

lim eindeutig 2.2.1

$$a \text{ HW von } a_n \;\overset{3.7(i)}{\Longleftarrow}\hspace{-1.2em}\not\Longrightarrow\; a = \lim a_n$$

Ein expliziter Gegenbsp ist etwa $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ mit HW ± 1 (3.7(iii)). In jedem $U_\varepsilon(1)$, $U_\varepsilon(-1)$ liegen ∞ viele b_n. Aber für $\varepsilon < 1$ gilt $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(-1) = \emptyset$ und daher können in keine der beiden Mengen fast alle b_n liegen (es blieben für die andere viel zu wenige b_n übrig!)



3.8 PROP (Charakterisierung von HW) Sei (a_n) eine (reelle) Folge, $a \in \mathbb{R}$.

a ist HW von (a_n) $\iff$ Jede ε-Umgebung von a enthält unendlich viele a_n, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m \geq N:\ a_m \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

die Folge kommt immer wieder in $U_\varepsilon(a)$ vorbei.

Beweis: [Da es sich um eine Äquivalenz handelt ....]

„$\Rightarrow$": a HW von (a_n) $\underset{3.6.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TF $(a_{n_k})_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Hinrichtung

Sei $\varepsilon > 0$ $\overset{2.6}{\Longrightarrow}$ $\exists K\ \forall k \geq K\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$

Sei $N \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow \exists k_1 \geq K$ mit $n_{k_1} \geq N$

[Def 3.3: $n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$]

Setze $m = n_{k_1}$ $\Longrightarrow$ $a_m = a_{n_{k_1}} \in U_\varepsilon(a)$

„$\Leftarrow$": Es gelte die Bed. auf der r. S. der Prop, also

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geq N: \quad a_n \in U_\varepsilon(a) \qquad (*)$$

- Wir konstruieren induktiv eine TF $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

$k=1$: Setze $\varepsilon = 1 = N$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\exists n_1 \geq 1: \ a_{n_1} \in U_1(a)$

$k \mapsto k+1$: Sei $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$ schon definiert

Setze $\varepsilon = 1/_{k+1}$, $N = n_k + 1$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\exists n_{k+1} \geq N > n_k: \ a_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$

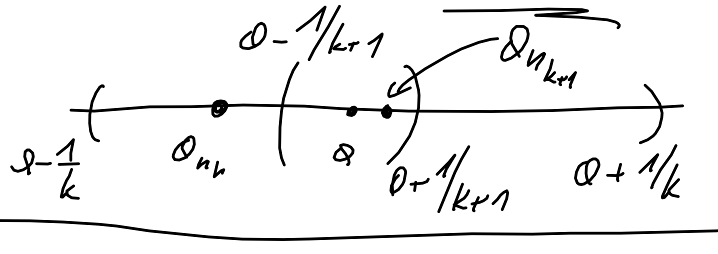
- Wir zeigen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$:

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{K} < \varepsilon$ [1.3(i)]

$\Longrightarrow \forall k \geq K \quad |a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$ $\blacksquare$

Da nach Konstruktion $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

Idee der Konstruktion: Zoomen mit Umgebungen



3.10 MOTIVATION (In Richtung Bolzano-Weierstraß)

Wir wissen schon [2.7, 2.8]: (a_n) beschr $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ (a_n) konvergent

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich die (abzählbar vielen) Folgenglieder in einem beschränkten Intervall tummeln — und dann müssen sich zumindest manche nahe kommen und einen HW bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reeller Folgen ist.

3.11 THM (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert

Beweis. (1) Wir verwenden die Ordnungsvollständigkeit um einen Kandidaten für einen HW zu bekommen. (V) als Existenzmaschine

a_n beschr $\overset{\text{Def 2.14}}{\Longrightarrow}$ $\exists K>0: |a_n| \le K \ \forall n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Menge Idee

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$, denn $K \in A$ [kein a_n erfüllt $a_n > K$]
- A ist n.u.b., denn falls $x < -K \Rightarrow x \notin A$, also ist zB $K-1$ untere Schranke

  alle $a_n \ge -K$

$\overset{(V)}{\Longrightarrow}$ $\exists\ a := \inf A$ Hier passiert es

(2) Wir zeigen, dass a HW der Folge (a_n) ist: Sei $\varepsilon > 0$

- $a + \varepsilon > a$ ist keine untere Schranke für A $[a = \inf A]$

  $\Longrightarrow \exists x \in A: \; a < x < a + \varepsilon$

  $\overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} \; a_n \leq x < a + \varepsilon$ für fast alle n, d.h.

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \quad a_n < a + \varepsilon \qquad (*)$$

- a ist unt. Schr. v. $A \Longrightarrow a - \varepsilon \notin A \overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} a_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele n, d.h.

  $$\forall n_1 \in \mathbb{N} \; \exists m \geq n_1: \; a - \varepsilon < a_m \qquad (**)$$

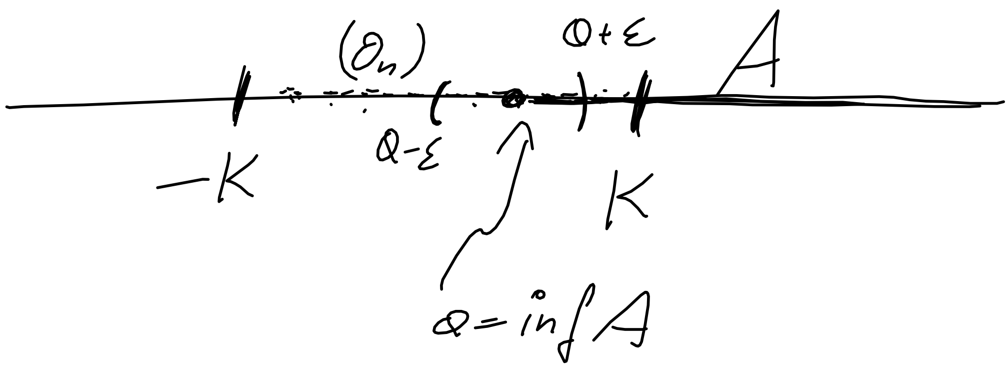
- Kombination von $(*)$ & $(**)$ gibt die Beh.

  Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben, dann wähle $n_1 = \max(n_0, N)$

  $$\left.\begin{array}{l} \overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists m \geq n_1 \geq N: \quad a - \varepsilon < a_m \\ \overset{(*)}{\Longrightarrow} [m \geq n_0] \qquad a_m < a + \varepsilon \end{array}\right\} \; a_m \in U_\varepsilon(a)$$

$\square$

Skizze zur Konstruktion

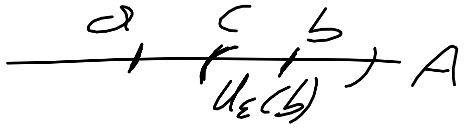


3.12 BEM (a ist der größte HW)

Das im obigen Beweis konstruierte a ist der größte HW von (a_n).

Denn sei $b > a \overset{a = \inf A}{\Longrightarrow} \exists c \in A: \; a < c < b$

Setze $\varepsilon = b - c \; (>0 ?) \Longrightarrow U_\varepsilon(b)$ enthält höchstens endlich viele a_n (Def A)



(für diese gilt ja $a_n > c \in A$)

$\Longrightarrow b$ ist nicht HW von x_n

Analog dazu können wir auch den kleinsten HW von (a_n) konstruieren [dieser könnte gleich dem größten sein...]

Diese speziellen HW verdienen einen eigenen Namen

3.13 DEF (lim inf, lim sup)

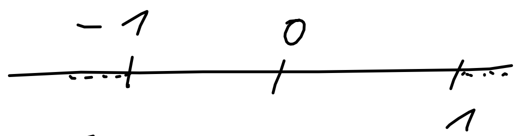
(i) Sei (a_n) eine beschränkte (reelle) Folge. Der größte [kleinste] HW a von (a_n) [$\exists$ wegen BW 3.11] heißt Limes superior [inferior] bzw kürzer limsup [liminf] und wir schreiben

$$a = \limsup a_n \equiv \overline{\lim}\, a_n \quad \left[\liminf a_n \equiv \underline{\lim}\, a_n\right]$$

(ii) Falls (a_n) nicht von oben [unten] beschränkt ist, dann setzen wir $\overline{\lim}\, a_n = \infty \quad \left[\underline{\lim}\, a_n = -\infty\right]$.

3.14 BSP (lim inf/sup)

(i) $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$



$\overline{\lim}\, a_n = 1, \; \underline{\lim}\, a_n = -1$

(ii) $a_n = n$ hat keinen HW und es gilt $\overline{\lim}\, a_n = \infty$

$\nexists\, \underline{\lim}\, a_n$

3.15 MOTIVATION (Konvergenzprinzipien)

Erinnern wir uns an unsere bisherigen Konvergenzbeweise (VO[1] §2 und UE): Bevor es richtig losgehen konnte, haben wir meist einen (guten) Kandidaten für den Limes gebraucht. Das ist in der Praxis natürlich ein großer Nachteil!

Außer bei „einfachen" Folgen: Rechenregeln f. Limiten, Sandwich-Lemma oder unbeschränkten Folgen

Wir werden nun die „Existenzmaschine" Bolzano-Weierstraß so modifizieren, dass sie uns unter passenden Bedingungen nicht nur die Existenz eines HW sondern schon des Limes liefert – ohne einen Kandidaten f. den Grenzwert zu benötigen.

Die mächtigsten dieser Konvergenzprinzipien sind das Cauchy-Prinzip und das Konvergenzprinzip f. monotone, beschränkte Folgen.

Als Bonus werden wir sehen, dass es manchmal relativ leicht ist, den Grenzwert auszurechnen, wenn schon klar ist, dass überhaupt Konvergenz vorliegt.

stellt unsere bisherige Methode auf den Kopf...

Als erstes benötigen wir dazu den Begriff Cauchy-Folge. Das sind Folgen, bei denen sich die Folgenglieder schließlich beliebig nahe kommen. Anschaulich im Bild des „Spaziergangs" in $M = \mathbb{R}$ (vgl. 2.4(i)) versandet die Folge d.h. die Schritte werden immer kleiner...

Genauer

Achtung nicht nur die einzelne Schrittweite

3.16 DEF (Cauchy-Folge) Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge (CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N} \;\forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

3.17 BEM (Bedeutung von CF)

Wir werden gleich sehen dass CF genau die konvergenten Folgen sind – daher erübrigt es sich Bsp antauschen.

Im Sinne von 3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung ob eine Folge (a_n) eine CF ist (im Prinzip) den Limes a nicht kennen muß [a kommt in 2.16 keines vor – das wird mit dem Auftreten von 2 Indices (m & n) erkauft ...].

3.18 THM (Cauchy-Prinzip) Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt

$$(a_n) \text{ konvergiert} \iff (a_n) \text{ ist CF}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$": (die „leichte" Richtung – ein $\varepsilon/2$-Beweis)

Setze $a := \lim a_n$

$\overset{2.6}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$.

Dann gilt $\forall m, n \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$": (Die schwierige Richtung in 3 Schritten) Sei (a_n) CF

(1) (a_n) ist beschränkt

Setze $\varepsilon = 1$ in 3.16 $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < 1 \ \forall m,n \geq N$

Setze $m = N \Longrightarrow |a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| < 1 \ \forall n \geq N$

verkehrte Δ-Ungl

$\Longrightarrow |a_n| \leq |a_N| + 1 \ \forall n \geq N$

Die ersten N Glieder erledigen wir wie im Beweis von 2.11:
Sei $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, dann gilt

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2) Bolzano-Weierstraß $\Longrightarrow \exists a$ HW von (a_n)

(3) $a_n \to a$: [$\varepsilon/2$-Beweis mit Hineinschmuggeln eines a_k nahe dem HW a]

Sei $\varepsilon > 0$.

(a_n) CF $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m,n \geq N$ (*)

a HW $\Longrightarrow \exists k \geq N \ |a_k - a| < \varepsilon/2$ (**)

Das ist die Idee!

Daher gilt $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| = |a_n - a_k + a_k - a|$$

$$\leq |a_n - a_k| + |a_k - a|$$

$$\overset{(*),(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

3.19 BSP (Konvergenz ohne Limes)

Sei (a_k) eine reelle Folge mit $|a_k| \le \theta < 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Reihe $\sum a_k^k$ und zeigen mittels Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz.

(i) Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.

Wie üblich setzen wir $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^k$. Dann gilt für $m < n$

vgl. 2.33

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k^k\right| \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^k \le \sum_{k=m+1}^{n} \theta^k$$

Trick 17

$$= \sum_{k=0}^{n} \theta^k - \sum_{k=0}^{m} \theta^k \overset{1.6}{=} \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{m+1}}{1-\theta}$$

$$= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1-\theta} = \theta^{m+1}\frac{1-\theta^{n-m}}{1-\theta} \underset{\theta \ge 0}{\le} \theta^{m+1}\frac{1}{1-\theta} \quad (*)$$

(ii) (s_n) ist CF: Sei $\varepsilon > 0$.

Wegen $0 \le \theta < 1 \overset{1.5(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: \ 0 \le \theta^{m+1} < \varepsilon(1-\theta) \quad \forall m \ge N$

Daher gilt $\forall n > m \ge N$

$$|s_n - s_m| \overset{(*)}{\le} \theta^{m+1}\frac{1}{1-\theta} < \varepsilon \quad (**)$$

noch nicht fertig!

Ganz analog beweist man $(**)$ für alle $m > n \ge N$.

Schließlich gilt für $m = n \ge N$, dass $s_m - s_n = 0$

Also ist (s_n) insgesamt eine CF

(iii) $3.18 \Longrightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^k$ konvergiert

UND: Wir haben keine Ahnung was der Limes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^k$ ist!

iA kann dieser auch nicht berechnet werden.

3.20 MOTIVATION (Monotone Folgen – Konvergenzprinzip)

Um das in 3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschr. Folgen anzugehen müssen wir zuerst den ersten Begriff exakt fassen.

3.21 DEF (Monotonie von Folgen) Sei (a_n) eine reelle Folge.

(i) (a_n) heißt [streng] monoton wachsend, falls

$$a_n \leq a_{n+1} \quad [a_n < a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

(ii) (a_n) heißt [streng] monoton fallend, falls

$$a_n \geq a_{n+1} \quad [a_n > a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

(iii) Falls $\exists N \in \mathbb{N}$ sodass $(*)$ bzw $(**)$ nur $\forall n \geq N$ gelten so sagen wir (a_n) hat die respektive Eigenschaft ab N.

3.22 BSP (Monotone Folgen)

Die Fibonacci-Folge (f_n) [siehe 2.5(iv)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab $N=2$.

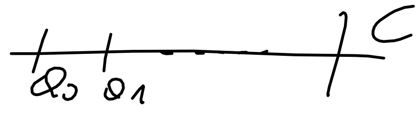
Tatsächlich gilt $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$ und $f_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$ und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \qquad \forall n \geq 2$$

3.23 BEMERKUNG. (Monotonie & Schranken)

(i) Eine mon. wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt, denn sei $a_n \leq C$ dann gilt $\forall n$

$$C \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0$$



(ii) Analog für n.u.b Folgen, die mon. fallen.

(iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen dass die Folgen sogar konvergieren. Vorher noch ein motivierendes

3.24 BSP (Approximation für $\sqrt{3}$)

Sei $x_0 > 0$. Wir definieren rekursiv die Folge (x_n) via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Bemerke $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. [Induktion]

(1) (x_n) ist n.u.b. genauer $\forall n \geq 1$: $3 \leq x_n^2$.

Tatsächlich gilt

$$x_{n+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - 3/x_n\right)^2 \geq 0.$$

(2) (x_n) ist mon fallend ab $N = 1$.

Für $n \geq 1$ gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 3\right) \overset{(1)}{\geq} 0$$

(3) (x_n) konvergiert genauer $\exists x := \lim x_n$

laut dem in 3.23(iii) angekündigten Thm 3.25 (unten) das wir hier schon verwenden.

[Sinn ist es zu sehen, dass uns (3) ermöglicht $\lim x_n$ auszurechnen!]

(4) $\lim x_n = \sqrt{3}$

Zuerst bemerke $0 < \sqrt{3} \le x$ (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (*) zum Limes über:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \end{array}$$

Also gilt $x = \frac{1}{2}(x + 3/x) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$

$$\Rightarrow x^2/2 = 3/2 \Rightarrow \underline{x = \sqrt{3}}.$$

Jetzt aber schleunigst zum Thm mit seinem erfreulich einfachen Beweis

3.25 THM (KP für beschränkte monotone Folgen)

Jede nach oben beschränkte und [ab einem $N \in \mathbb{N}$] monoton wachsende Folge konvergiert.
Analog für n.u.b und mon. fallende Folgen.

Beweis. Sei (a_n) nob & mon wachsend.

(1) Produzieren eines Kandidaten für $\lim a_n$ [(V) als Existenzmaschine]

Intuitives Bild:

die a_n's werden gegen a gedrängt

Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

3.23(i) $\Rightarrow$ a_n beschränkt $\Rightarrow$ A beschränkt
[$A \neq \emptyset$, klar]

$\overset{(V)}{\Longrightarrow} \exists\, a := \sup A$

(2) $\underline{\lim a_n = a}$.

nicht obere Schranke lt. Def sup

Sei $\underline{\varepsilon > 0}$.

$a = \sup A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \; a - \varepsilon < a_N \leq a$

(a_n) mon wachsend $\Rightarrow \underline{\forall n \geq N}: \; a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$

Daher $\forall n \geq N$ $\quad \underline{|a - a_n| < \varepsilon}$.

$\square$

3.26 BEOBACHTUNG ($a_n \to \sup A$)

Obiger Beweis zeigt explizit $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und in diesem Sinne wird das intuitive Bild bestätigt: eine monoton wachsende n.o.b. Folge wird gegen ihr Supremum gequetscht!

Das motiviert auch das Studium von Mengen der Gestalt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw noch allgemeiner die folgenden [später sehr wichtigen] Begriffe für Punktmengen in $\mathbb{R}$.

3.27 DEF (Berührpunkt, Häufungspunkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

(i) $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>Berührpunkt</u> von A, falls

$$\forall \varepsilon > 0: \; U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Jede ε-Umg. von a enthält mind. einen Pkt aus A

(ii) $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von A, falls

$\forall \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(a) \cap A$ enthält unendlich viele Punkte

3.28 BSP (BP & HP)

(i) Jedes $a \in A$ ist BP von A $[a \in U_\varepsilon(a) \cap A \; \forall \varepsilon]$
Jeder HP von A ist auch BP von A

(ii) Nicht jeder Pkt von A ist HP von A, denn $A = \{0\}$ hat garkeine HP.

(iii) Sei $A := [a, b)$ ein Intervall. Jedes $x \in [a, b]$ ist HP (und somit BP) von A
[Bemerke b ist BP von A obwohl $b \notin A$]

(iv) 0 ist HP von $A = \{1/n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$

[Bemerke wiederum $0 \notin A$]

3.29 BEM (HP vs HW) Sei (a_n) reelle Folge

Gilt $\underbrace{a \text{ HW von } (a_n)}_{a \text{ HW der Folge}} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{a \text{ HP von } A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{a \text{ HP der Menge der Folgenglieder}}$

NEIN, denn

Sei $a_n = (1)_n \Rightarrow a = 1$ ist HW von a_n

ABER $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$ hat garkeine HP [3.28(ii)]

[Bemerke: 1 ist immerhin BP von A]

[In der Literatur werden HW von Folgen auch oft als HP bezeichnet. Hier wird bewusst darauf verzichtet, da (mit dieser Bezeichnung) a HP von $a_n \not\Rightarrow$ a HP von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$]

3.30 PROP (Einfache Eig von HP & BP) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

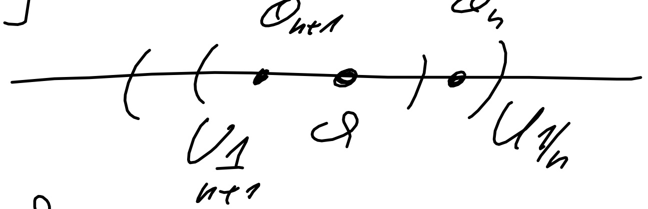
(i) a ist BP von $A \Longleftrightarrow \exists$ Folge (a_n) in A [dh $a_n \in A\ \forall n$] mit $a_n \to a$

(ii) a ist HP von $A \Longleftrightarrow$ a ist BP von $A \setminus \{a\}$

Beweis. (i)

„$\Rightarrow$": Sei a BP von $A \overset{3.27(i)}{\Rightarrow} \forall n \geq 1\ \exists a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$

So erhalten wir induktiv eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$ [$|a_n - a| < 1/n \to 0$]



„$\Leftarrow$": Lt. Voraussetzung $\exists (a_n)$ in A mit $a_n \to a$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ a_n \in U_\varepsilon(a)(\cap A) \Rightarrow U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$

(ii) [UE] $\square$

3.30A. BEM. Nach [O] 1.11(ii) liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ HP von $\mathbb{Q}$ ist.

[$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht $\overset{[O]1.11(ii)}{:\Longleftrightarrow} \forall x < y \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y \overset{\text{induktiv}}{\Longleftrightarrow}$ sogar unendl. viele $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon\ U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}$ unendlich]

3.31 BEM (BP beschränkter Mengen) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Sei (a_n) Folge in $A \overset{BW}{\Longrightarrow} (a_n)$ hat einen HW a

a_n hat TF a_{n_k} und $a_{n_k} \to a$ $\overset{3.30(i)}{\Longrightarrow}$ a ist BP von A

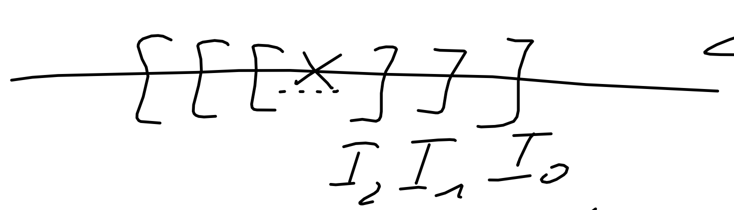
(ii) $(V) \Longrightarrow \exists\, a = \sup A \underset{\sup}{\overset{Def}{\Longrightarrow}} a$ ist BP von A

[Es gilt sogar $\sup A$ ist Limes einer mon wachsenden Folge in A: Wähle $a-1 < a_0 \leq a$ und dann induktiv $\forall n \geq 1$: $a_n \in A$, $a_n \geq a_{n-1}$, $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$.]

3.32 MOTIVATION (Intervallschachtelungsprinzip)

Wir leiten nun aus dem Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenz-Maschine" her, die im Gegensatz zum CP sehr anschaulich ist:

Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, abgeschl. Intervalle sich zusammenzieht, dann wird dabei ein eindeutiger Punkt in $\mathbb{R}$ eingefangen.



Zoomen mit Intervallen

Dieses Prinzip veranschaulicht nocheinmal die Tatsache, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher" hat

Doch zuerst zu den exakten Begriffen.

3.33 DEF (Durchmesser eines abg. Intervalls)

Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$ und $I := [a,b]$. Wir definieren den Durchmesser von I als

$$\operatorname{diam} I := b - a$$

3.34 THM (Intervallschachtelungsprinzip, (IP))

Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eig

(i) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(ii) $\operatorname{diam} I_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$, das in jedem I_n liegt, d.h.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Beweis. (Existenz) Seien $I_n = [a_n, b_n]$ $(n\in\mathbb{N})$

(1) Die Folge (a_n) der linken Randpkte ist eine CF.

Sei $\varepsilon > 0$. (ii) $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \operatorname{diam} I_n < \varepsilon \ \forall n \geq N$ (*)

Seien also $m, n \geq N$. $\overset{(i)}{\Longrightarrow} a_m, a_n \in I_N$

$$\Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \operatorname{diam} I_N \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

(2) $\overset{3.18}{\Longrightarrow} \exists a = \lim a_n$

(3) $\forall n \geq k$ gilt: $\underset{\displaystyle a_k}{\underset{\downarrow}{a_k}} \leq \underset{\displaystyle a}{\underset{\downarrow}{a_n}} \leq b_n \leq \underset{\displaystyle b_k}{\underset{\downarrow}{b_k}}$ $(n \to \infty)$

(in n) konstante Folge

$\overset{2.28}{\Longrightarrow} a_k \leq a \leq b_k \ (\forall k) \Longrightarrow a \in I_k \ (\forall k)$

<u>(Eindeutigkeit)</u>: [folgt sofort aus (Ü)]

Seien $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ dann gilt $\forall n$

$$0 \leq |a-b| \leq \operatorname{diam} I_n \to 0$$

$\Longrightarrow |a-b| = 0 \overset{(N1)}{\Longrightarrow} a = b.$ □

[<u>3.35 BEOBACHTUNG</u>: Es gilt also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$, wobei a eindeutig festgelegt ist durch $a = \lim a_n$ [und analog $a = \lim b_n$] [NICHT VORGETRAGEN]]

<u>3.36 NACHBETRACHTUNG</u> (Der rote Faden)

Diese § war (neben anderen, praktischeren Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit (V) gewidmet.

Genauer haben wir bewiesen:

$$(V) \Longrightarrow (BW) \Longrightarrow (CP) \Longrightarrow (IS)$$

Es gilt aber auch $(IS) \Rightarrow (V)$ [ohne Beweis; siehe [Ho] 3.16 Thm] und daher sind alle 4 Aussagen äquivalent ⊳ (BW), (CP) und (IS) sind also nur andere (z.B. anschaulichere) Manifestationen der Ordnungsvollständigkeit (V) von $\mathbb{R}$.

Daher spricht man oft auch einfach von der <u>Vollständigkeit von $\mathbb{R}$</u>, die durch jede der 4 Aussagen charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen für Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Defs der Vollständigkeit finden [zB. (CP) in Forster, (V) in Deiser und Heuser und noch eine Variante (Konvergenz von Dedekind-Schnitten) in Behrends] aber (immer) auch einen Satz der die Äquivalenzen herstellt — also besagt, dass alle diese Zugänge äquivalent sind.

Zum Abschluss des § nocheinmal & weil es so schön ist

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{ORDNUNGSVOLLST.}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{INTERVALLSCHACHTELUNGSP.}} \arrow[l, Rightarrow] \\
\boxed{\text{BOLZANO-WEIERSTRASS}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{CAUCHY-PRINZIP}} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

§4 Reihen & Konvergenz

4.1. Einleitung & Ausblick.

In diesem letzten § von Kap [1] beschäftigen wir uns ausführlich mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def 2.33). Wie bereits in 2.38 angekündigt ist es für Reihen i.a. schwieriger als für „normale" Folgen Konvergenz nachzuweisen und i.a. noch schwieriger den Grenzwert zu bestimmen – also die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der „normale" Konvergenzbegriff für Reihen zu kurz greift: Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konv. Reihe nicht ebenfalls konvergieren muß – die Konvergenz hängt also von der Reihenfolge der Summation ab!
Dieser wirklich problematische Aspekt läßt sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff Zuflucht nimmt. Die sog. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

sehr lästig?

Das klingt kompliziert; aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit abs. konv. Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir grad zum Schluß dieses § sehen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.

4.2 ERINNERUNG (Reihen – Sein & Schein) [vgl. 2.32–34]
Sei (a_n) eine (reelle) Folge, $m \in \mathbb{N}$.
Wir definieren die m-te Partialsumme der Reihe $\sum a_n$ als

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

und schreiben $\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, falls der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt – Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

oft lästiger als „normale" Folgen

Wir beginnen damit einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Als erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip [Thm 3.18] um auf den Fall von Reihen

4.3 PROP (Cauchy-Prinzip für Reihen) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m\geq N\ \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|<\varepsilon \qquad (4.1)$$

Beweis: $\sum a_k$ konv $\overset{\text{Def 2.33}}{\iff}$ s_m konvergent $\overset{3.18}{\iff}$ s_m CF

$\overset{\text{Def 3.16}}{\iff}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \underbrace{|s_n - s_{m-1}|}<\varepsilon\ \forall n, m-1\geq N$

Weil in 3.16 „$\forall m,n\geq N$" können hier m & n so gewählt werden.

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \square$$

OBdA $n\geq m-1$

4.4 BEM (Änderung endlich vieler Glieder)

(i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern (vgl. 2.10). 4.3. zeigt, dass dies auch für Reihen zutrifft: Bedingung (4.1) wird von der Änderung endlich vieler a_k's nicht berührt.

[exakt: Seien (a_n), (b_n) (reelle) Folgen und $\exists M \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq M$: $a_n = b_n$ und (a_n) erfüllt (4.1), dann auch (b_n): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \ \forall n, m \geq N_1 \ \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

wähle $N := \max\{M, N_1\} \Rightarrow \forall m, n \geq N \ \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$]

(ii) Weiters verändert sich der Limes einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden. Das ist bei Reihen anders. Offensichtlich ändert sich dann der Wert der Reihe, z.B.: $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{2.37}{=} \frac{1}{1-x} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \underset{\substack{\| \\ 1}}{x^0} = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Nun eine weitere wichtige Konsequenz aus 4.3.

4.5 KOR (Die Glieder konv. Reihen sind Nullfolgen)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Longrightarrow a_k \to 0 \ (k \to \infty)}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze in (4.1) $m = n \geq N$

$$\Longrightarrow \varepsilon > \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| = a_n \Longrightarrow a_n \to 0$$

$\square$

4.6. PROP (Beschränktheit der Partialsummen)

Sei $\sum a_n$ eine Reihe nicht-negativer Zahlen (d.h. $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \text{ beschränkt}$$

Beweis. $\Rightarrow$ folgt sofort aus 2.17

$\Leftarrow$ [Auf den ersten Blick überraschend [vgl. 2.18] auf den 2. Blick: Monotonie!]

- s_m ist mon. wachsend, denn $s_{m+1} = s_m + \underbrace{a_{m+1}}_{\geq 0} \geq s_m$
- s_m ist beschr. lt. Voraus.

$\overset{3.25}{\Longrightarrow}$ s_m konv.

[Höchste Zeit für ein Bsp?]

4.7 BSP (konv & div Reihen)

„Dodel-Test" $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ divergiert, weil [4.5 $a_n = (-1)^n \not\to 0$

(ii) Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Erzbeispiel einer div. Reihe

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist $\left[\xRightarrow[a_n = 1/n > 0]{4.6} \sum 1/n \text{ div} \right]$

Wir betrachten S_{2^k} $(k \in \mathbb{N})$ (das ist der Trick!)

$$S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n}$$

$n=1=2^0$ $\quad n=2=2^1$ $\quad n=4=2^2$ $\quad n=8=2^3$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot 1/4 = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot 1/8 = 1/2} + \dots$$

Anzahl der Terme: $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1) = 2^{k-1}$

$$\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1/2}$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ Terme}} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

Also $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \implies S_n$ unbeschränkt.

4.8 GROSSE ~~FETTE~~ WARNUNG!

Bemerke die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, OBWOHL $1/n \to 0$. Daher ist die Umkehrung von 4.5 FALSCH. Es gilt also

$$\left\{ \sum a_n \text{ konv.} \quad \overset{4.5}{\Longrightarrow} \atop \not\Longleftarrow \quad a_n \to 0 \right\}$$

einer der beliebtesten Fehler von AnfängerInnen

4.9 Bsp ($\sum \frac{1}{n^s}$)

(i) Sei $\mathbb{N} \ni k \geq 2$, dann ist $\sum \frac{1}{n^k}$ konvergent

Da alle Glieder $1/n^k \geq 0$ sind müssen wir mit 4.6 nur zeigen, dass s_m beschränkt ist. Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben; wähle $l \in \mathbb{N}$ so dass $m \leq 2^{l+1} - 1$, dann gilt

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}$$

$n = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$ $\qquad$ $n = 2^{2+1} - 1$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)}_{\leq 2 \, 1/2^k} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right)}_{\leq 4 \, 1/4^k = 2^2 \, 1/4^k} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}}_{\leq 2^l \frac{1}{2^{lk}}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{l} 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}$$

geom. Reihe 2.37

obere Schranke von s_m unabh. von m

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (wortwörtlich) auch für $\mathbb{R} \ni k > 1$ – wir haben aber n^k für $k \notin \mathbb{Z}$ im Rahmen der VO noch nicht definiert...

Wiedechimmer, es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist $\begin{cases} \text{div für } s \leq 1 \\ \text{konv für } s > 1 \end{cases}$

(iii) Für alle geraden ganzen k können die Summen sogar explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

wie wir später (Teil 2 des Zyklus) sehen werden

4.10 THM (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei $a_n \geq 0 \ \forall n$. Wir betrachten die sog. alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

oft leichter zu bändigen

Falls gilt, dass

(i) a_n mon. fällt $[a_n \geq a_{n+1} \ \forall n]$

(ii) $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$,

dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent

Partialsummen einer konv. alt. Reihe

Beweis. • Betrachte TF der geraden/ungeraden Partialsummen ($k \in \mathbb{N}$)

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \overset{(i)}{\leq} 0 \implies s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \quad (*)$$

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \overset{(i)}{\geq} 0 \implies s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \quad (**)$$

Außerdem $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad (***)$

Also (s_{2k}) mon. fallend $[(*)]$ & n.u.b. $[s_{2k} \geq s_1, (**)(***)] \overset{3.25}{\implies}$ konv

d.h. $\exists\, s := \lim_{k \to \infty} s_{2k}$

Analog s_{2k+1} mon. wachsend [(**)] & n.o.b [(***)] $\overset{3.25}{\Longrightarrow}$ konv

d.h. $\exists\, S' := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$

- $S = S'$ denn $S - S' = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$

- $s_n \to S$, denn sei $\varepsilon > 0$.

$$s_{2n} \to S \Rightarrow \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ |s_{2n} - S| < \varepsilon$$
$$s_{2n+1} \to S \Rightarrow \exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ |s_{2n+1} - S| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max\{2N_1, 2N_2+1\}: \ |s_n - S| < \varepsilon$$ $\square$

4.11 BSP Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konvergiert}$$

nach 4.10 weil $1/n$ mon. fallende Nullfolge.

4.12 BEM (Zum Leibnitzkriterium)

(i) Bemerke, dass 4.10 eine schwache Form der Umkehrung von 4.5 [$\sum a_n$ konv $\Rightarrow a_n \to 0$] ist [vgl 4.8] denn 4.10 sagt

$$a_n \to 0 \ \& \text{ mon fallend} \Longrightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ konv}$$

[(ii) Der Beweis von 4.10 liefert die folgende Fehlerabschätzung

$$|S - s_m| \leq |s_{m+1} - s_m| = a_{m+1}$$

s_m hüpft ja immer über S hinaus

[NICHT VORGETRAGEN]]

4.13 BEM & WARNUNG (Reihenkonv. ist instabil)

Wie bereits in 4.1. angekündigt hängen Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge ab

(i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen benötigen wir die folgende Notation:

Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine Umordnung von $\sum a_n$

(ii) Umordnung konvergenter Folgen kann den Limes ändern.

Sei z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ die alternierende harm. Reihe

konv. wegen 4.11

Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{1/2}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{=1/6}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{=1/10}-\frac{1}{12}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}_{=1/14}-\frac{1}{16}+\ldots$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\right)$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

(iii) Umordnung konv. Reihen kann sogar zu Divergenz führen!

Wir ordnen nochmals die alt. harm. Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später und später auftreten ($n \geq 2$):

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{>2/8=1/4}-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{>4/16=1/4}-\frac{1}{8}+\dots$$

$9=2^3+1$ $\quad 15=2^{3+1}-1 \quad 8=2\cdot 3+2$

#Terme $= \frac{2^{n+1}-2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} = 2^{n-1}$

$$\dots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq 2^{n-1}/2^{n+1}=1/4}-\frac{1}{2n+2}$$

$$> \frac{n-1}{4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n+2}\right) > \frac{n-1}{4}-\frac{n-1}{6}=\underline{\underline{\frac{n-1}{12}}}$$

der Klammern mit pos. Termen $\leq n-1$ = # der neg. Terme

Also müssen die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt sein $\Rightarrow$ Reihe divergent

(iv) FAZIT: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff der solche Effekte ausschließt.

4.14 DEF (Absolute Konvergenz) Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_n|$ konvergiert

Reihe der Absolutbeträge der Glieder

4.15 BEM (zur abs. Konv.)

(i) Wegen $|a_n| \geq 0$ ergibt 4.6.

$\sum |a_n|$ konv $\Leftrightarrow$ $s_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n|$ beschränkt

(ii) $\boxed{\sum a_n \text{ konv} \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ konv}}$ denn die harm. Reihe ist ein Gegenbsp.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konv. [4.11] aber } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div [4.7(iii)]}$$

Die Umkehrung ist aber richtig ⟵ abs Konv ist also wirklich stärker als bloße Konvergenz

4.16 PROP (abs Konv ⟹ Konv)

Jede absolut konv. Reihe konvergiert

Beweis. [CP für Reihen & Δ-Ungl.]

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit 4.3. für $\sum |a_n|$: $\exists N \; \forall n \geq m \geq N$

$$\varepsilon > \sum_{k=m}^{n} |a_k| \geq \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|$$

4.3 für $\sum a_n$ $\Longrightarrow \sum a_n$ konv

Δ-Ungl. f. endl. Summe von rechts nach links gelesen

$\square$

4.17 THM (Umordnungssatz) — Abs Konv. ist stabil bzgl. Umordnungen

Sei $\sum a_n$ absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung $\sum a_{\tau(n)}$ abs. konvergent und konvergiert gegen denselben Limes.

Beweis. $4.16 \Rightarrow \exists s := \lim \sum a_n$. Sei $\varepsilon > 0$

[Jetzt in 3 Schritten ins Ziel]

(1) Abschätzung für den Reihenrest.

$$\overset{4.3}{\underset{\sum|a_n|}{\Longrightarrow}} \exists N\in\mathbb{N}\ \forall \ell\geq N \quad \sum_{k=N}^{\ell}|a_k|<\varepsilon/2$$

$\ell\to\infty$ ↓ ⟸ 2.28 [vgl. auch 2.31]

$$\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|\leq\varepsilon/2 \quad (*)$$

Daher $\forall m\geq N$

$$\left|\sum_{k=0}^{m}a_k-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\right|=\left|\sum_{k=N}^{m}a_k\right|\leq\sum_{k=N}^{m}|a_k|\leq\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|\leq\varepsilon/2$$

$$\underset{(m\to\infty)}{\overset{2.28}{\Longrightarrow}} \underbrace{\left|S-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\right|\leq\varepsilon/2} \qquad (**)$$

(2) $\underline{\lim\sum a_{\tau(n)}=S.}$

Sei $M\in\mathbb{N}$ so dass $M\geq N$ und sodass $\{\tau(0),\tau(1),\ldots\tau(M)\}\supseteq\{0,1,\ldots,N-1\}$ (Δ)

möglich, weil τ bijektiv

Dann gilt $\forall m\geq M$

$$\left|\sum_{k=0}^{m}a_{\tau(k)}-S\right|\leq\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{m}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\right|}+\left|\sum_{k=0}^{N-1}a_k-S\right|$$

Wegen (Δ) fallen alle a_k mit $0\leq k\leq N-1$ aus der Summe weg. Übrig bleiben gewisse a_k's, über die man nur weiß, dass $k\geq N$ ist. Diese Summe ist sicher durch $\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|$ abschätzbar

$$\leq\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|$$

$$\overset{(*),(**)}{\leq}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a_{\tau(n)}=S}$$

(3) $\underline{\sum a_{\tau(n)}\text{ konv. absolut.}}$ Folgt sofort aus (1) & (2) für die Reihe $\sum b_n$ mit $b_n:=|a_n|$.

$\square$

4.18 MOTIVATION (Absolute Konvergenz: schön, aber wie?) Nachdem wir gesehen haben, dass abs. Konvergenz der richtige Begriff ist, um Reihen gut umgehen zu können – manchmal sagt man für bloss konvergenten R. auch BEDINGT Konv. – stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich einer Reihe an, ob sie absolut konvergiert? Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

4.19 PROP (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium)

(i) Sei $\sum c_n$ konvergent und $c_n \geq 0$. ($\sum c_n$ ist eine konv. Majorante)

$|a_n| \leq c_n$ für fast alle $n \Longrightarrow \sum a_n$ absolut konv.

(ii) Sei $\sum d_n$ divergent und $d_n \geq 0$ ($\sum d_n$ ist div. Minorante)

$a_n \geq d_n$ für fast alle $n \Longrightarrow \sum a_n$ divergent

Beweis. (i) OBdA können wir annehmen, dass $|a_n| \leq c_n \ \forall n$ gilt (der Reihenanfang ist egal; vgl. 4.4(ii))

Wir verwenden 4.6: ($\sum |a_n|$ ist Reihe mit nichtneg. Termen)

$$\forall m \text{ gilt } \quad 0 \leq s_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{m} c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$\Longrightarrow s_m \text{ beschränkt} \overset{4.6}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) Indirekt ang. $\sum a_n$ konvergiert $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \sum d_n$ konvergent $\lightning$ $\square$

4.20 Bsp (Vergleichstest)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergiert, denn $\forall n \geq 1: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div } (4.7(iii)) \overset{4.19}{\underset{(ii)}{\Longrightarrow}} \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ div}$$

(ii) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $|a_n| < 1 \; \forall n$. Sei $q \in (0,1)$, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ ist absolut konvergent, denn

$$|a_n q^n| \leq q^n; \; \sum q^n \text{ konv } [2.37] \overset{4.19}{\underset{(i)}{\Longrightarrow}} \sum a_n q^n \text{ konv.}$$

4.21 Prop (Wurzeltest) Die reelle Reihe $\sum a_n$ ist

THETA

(i) absolut konvergent, falls $\exists \Theta: 0 < \Theta < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \quad \forall n \geq n_0$$

(ii) divergent, falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n

Beweis [sehr einfach...]

(i) $|a_n| \leq \Theta^n$ für fast alle n, $\sum \Theta^n$ konv [2.37]

$$\overset{4.19}{\underset{(i)}{\Longrightarrow}} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow a_n \not\to 0$

$$\overset{4.5}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ divergent.}$$

Dodel-Test

$\square$

4.22 BEM (Zum $\sqrt{}$-Test) (i) In der Praxis tritt oft auf, dass $\exists Q := \lim |a_n|^{1/n}$. Dann gilt

$Q < 1 \implies$ Bedingung in 4.21(i) $[\theta = Q + \varepsilon < 1] \implies \sum a_n$ abs. konv.

$Q > 1 \implies$ Bedingung in 4.21(ii) $\implies \sum a_n$ div

(ii) WARNUNG! Der $\sqrt{}$-Test benötigt wirklich die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \rho < 1 \quad \text{und nicht nur} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \le 1.$$

$|a_n|^{1/n}$ hat endlichen Abstand zu 1 $\rho \ne 1$

$|a_n|^{1/n}$ kann 1 beliebig nahe kommen 1

Es gilt z.B. nämlich $(n>1)$

$1 > (1/n^2)^{1/n} \to 1$ und $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. [4.9(i)]

$1 > (1/n)^{1/n} \to 1$ und $\sum 1/n$ div [4.7(ii)]

4.23 PROP (Quotiententest) Sei $a_n \neq 0$ für fast alle n. Die reelle Reihe $\sum a_n$

(i) konvergiert absolut, falls $\exists \theta: 0 < \theta < 1 \;\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \theta \quad \forall n \ge n_0$$

(ii) divergiert, falls

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 \quad \forall n \ge n_0$$

Beweis. (i) $\forall n \geq n_0$ gilt

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \leq \theta^2 |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

$$\Longrightarrow \sum \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \theta^{1-n_0} \sum \theta^n \text{ konv. } [2.37]$$

$$\overset{4.19(i)}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) Sei $n_1 \geq n_0$ und so dass $a_{n_1} \neq 0 \Longrightarrow |a_n| \geq |a_{n_1}| > 0 \ \forall n \geq n_1$

$$\Longrightarrow a_n \not\to 0 \overset{4.5}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

$\square$

4.24. BEM (zum Quotiententest)

(i) Analog zum WT: Falls $\exists a = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, dann gilt

$$a < 1 \overset{4.23(i)}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ abs. konv.}$$

$$a > 1 \underset{4.23(ii)}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

(ii) WARNUNG! Auch hier ist bei $a = 1$ keine Aussage möglich, denn z.B.

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konv und } (n>1)\ 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div und } (n>1)\ 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

NICHT VORGETRAGEN

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest. Man kann zeigen,

(i) im Quotiententest $\Longrightarrow$ (i) im Wurzeltest

[d.h. falls der QT positiv ausfällt, dann ist auch der WT anwendbar]

Die Umkehrung ist falsch [für Details siehe Barner, Flohr Analysis 1, §5.3]

4.25 Bsp (QT, WT)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ist abs. konv., denn [4.23(i), 4.24(i)]

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1$$

(ii) $\sum a_n$ mit $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist abs konv, denn [4.21(i)]

$$|a_n|^{1/n} \leq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n$$

können $\theta = 1/2$ wählen

Bemerke, für diese Reihe ist der Quotiententest nicht schlüssig, denn

QT bringt hier nichts ☹

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{1.5(ii)} 0, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \xrightarrow[1.5(ii)]{} \infty$$

4.26 MOTIVATION (Dezimaldarstellung & b-adische Entwicklung)

Als erste Anwendung des entwickelten Begriffsapparates für Reihen werden wir nun die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren

(i) Beginnen wir mit $\mathbb{Q}$: Im Alltag sind wir es gewohnt, rationale Zahlen in Dezimaldarstellung zu sehen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt 17,48 EUR. Die entsprechende Bruchzahl $x \in \mathbb{Q}$ errechnet sich gemäß

$$x = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \frac{1748}{100}$$

(ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

(A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und x so als Limes einer (unendlichen) Reihe auffassen – und welche Zahlen x können wir so darstellen (mehr als $\mathbb{Q}$?) ?

(B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen $b \geq 2$ statt 10 ist leicht zu bewerkstelligen.

In diesem Rahmen (offizielle Def kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

4.27 DEF (b-adische Entwicklung)

Sei $\mathbb{N} \ni b \geq 2$ (Basis), $N \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ (Ziffern) $(N \leq n \in \mathbb{Z})$. Die Reihe

$$\pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

heißt b-adische Entwicklung mit Ziffern a_n $(N \leq n \in \mathbb{Z})$

4.28 BSP (b-adische Entwicklungen)

(i) Im Bsp in 4.26 ist $b = 10$, $N = -1$, $a_{-1} = 1$, $a_0 = 7$, $a_1 = 4$, $a_2 = 8$; nochmal

$$17{,}48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^{2} a_n 10^{-n}$$

(ii) $2^7 = 128$ daher hat 128 die Binärdarstellung $(b=2)$

$$128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-7} 1 \cdot 2^n$$

4.29 MOTIVATION (Konkretisierung von (A) in 4.26(ii))

Die Fragen in 4.26(ii) (A) können wie folgt konkretisiert werden

(i) Ist jede b-adische Entwicklung konvergent?

(ii) Kann jedes $x \in \mathbb{R}$ als Limes einer b-adischen Entwicklung dargestellt werden?

(iii) Ist diese Darstellung eindeutig?

4.30 BEM (Uneindeutigkeit b-adischer Entwicklungen)

Die Antwort auf 4.29(iii) ist negativ, wie das folgende Bsp zeigt ($b=10$)

$$0{,}9999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-1})^n$$

$$\stackrel{\text{geo. R.}}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \frac{10}{10-1} = 1 = 1{,}0000\ldots$$

Zum Glück lautet die Antwort auf 4.29(i), (ii): JA

4.31 THM (b-adische Entwicklung reeller Zahlen)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, dann gilt:

(i) Jede b-adische Entwicklung konv. absolut.

(ii) Jede reelle Zahl x ist Summe (d.h. Limes) einer b-adischen Entwicklung (wobei die Ziffern rekursiv konstruiert werden können).

Beweis. (i) [leicht & vorgeholt] $\forall n$ gilt:

$|a_n b^{-n}| \leq (b-1) b^{-n}$ und $(b-1)\sum b^{-n}$ ist konvergente Majorante

$a_n \leq b-1 \; \forall n$ $\xRightarrow{4.19(ii)}$ abs. konv.

NICHT VORGETR.

(ii) [technisch anspruchsvoll ...]

Es genügt den Fall $x \geq 0$ zu betrachten. Wir konstruieren eine b-adische Darstellung für $x \in \mathbb{R}$ beliebig

(1) Konstruktionsvorschrift

[Wohlordnung]

$b \geq 2 \xRightarrow{1.5} \exists m \in \mathbb{N}: b^m > x \Rightarrow \exists m_0 = \min\{m \in \mathbb{N}: x < b^{m+1}\}$

Setze $N = -m_0$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge a_n in $\{0,1,..,b-1\}$ sodass

$$\forall n \geq N \; \exists \xi_n \text{ mit } 0 \leq \xi_n < b^{-n} \text{ und } \quad (*)$$
$$x = \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + \xi_n$$

(2) Das genügt, denn $(*) \Rightarrow \xi_n \to 0$ also

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k}$$

was die Aussage (ii) beweist.

(3) Konstruktion:

Wir gehen induktiv vor und beginnen bei $n = N$

ERINNERUNG: nächst kleinere Ganze [UE, Blatt 1, 6]

$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lfloor y \rfloor := \max\{l \in \mathbb{Z} \mid l \leq y\}$

Es gilt $0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1 \quad (\Delta)$

$n=N$: Def $N \Rightarrow 0 \le x b^N < b$. Wir definieren $a_N \in \{0,1,\dots,b-1\}$ und ξ_N durch

$$a_N := \lfloor x b^N \rfloor, \quad \xi_N := (x b^N - a_N) b^{-N}$$

Dann gilt $x = b^{-N} a_N + \xi_N$ und $0 \overset{(\Delta)}{\le} \xi_N < b^{-N}$

also (*) für $n=N$

$n \mapsto n+1$: Aus (*) für n folgt $0 \le \xi_n b^{n+1} < b$

Wir definieren a_{n+1}, ξ_{n+1} durch

$$a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := \big(\underbrace{\xi_n b^{n+1} - a_{n+1}}_{0 \le \quad < 1 \ (\Delta)}\big) b^{-n-1} \quad (\Delta\Delta)$$

Dann gilt $\xi_n = a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1}$ und daher

$$x \overset{(IV)}{=} \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} a_k b^{-k} + \xi_{n+1}$$

und $\quad 0 \overset{(\Delta\Delta)}{\le} \xi_{n+1} < b^{-n-1}$, also (*) für $n+1$. $\square$

4.32 Kor (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, zum Dritten) vgl. mit 1.11(iii) und 3.30A

Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge in $\mathbb{Q}$

Beweis: $4.31 \Rightarrow \exists$ Dezimaldarstellung für x, d.h.

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

Für jedes m ist die Partialsumme

$$s_m = \sum_{n=N}^{m} a_n \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$$

und $s_m \to x$. $\square$

4.33 BEM. Sei $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ eine b-adische Entwicklung.

Man kann zeigen [Amann, Escher, Analysis 1, II.7]

$x \in \mathbb{Q} \iff$ Die Ziffernfolge a_n ist ab einem $K \in \mathbb{N}$ periodisch, d.h. $\exists K \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq K$

inkludiert den Fall, dass fast alle a_n verschwinden, die Entwicklung also abbricht!

4.34 MOTIVATION (Das Cauchy-Produkt für Reihen)

(i) Um zu einer zweiten – noch viel wichtigere – Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen nämlich der EXPONENTIALFUNKTION müssen wir uns noch um Produkte von Reihen kümmern.

(ii) Um letztere zu motivieren beginnen wir mit einer Überlegung zu Produkten endlicher Summen.

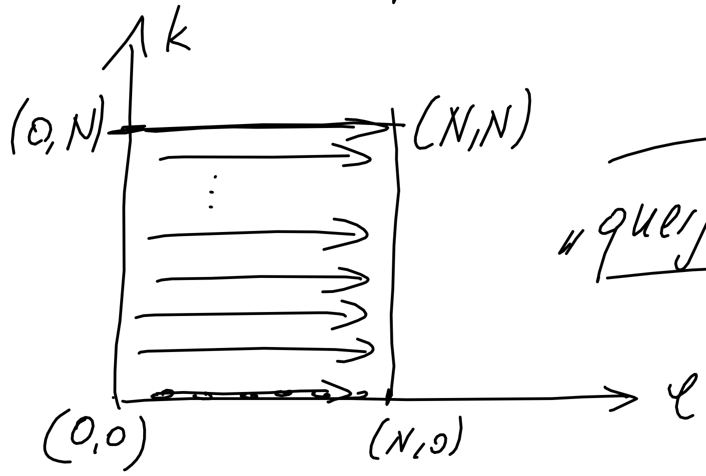
Seien $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} a_k b_l \qquad (*)$$

Für die Untersuchung der Konvergenz $N \to \infty$ solcher Ausdrücke erweist es sich als günstig, die Summations anders zu arrangieren. Am besten wird das in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich:

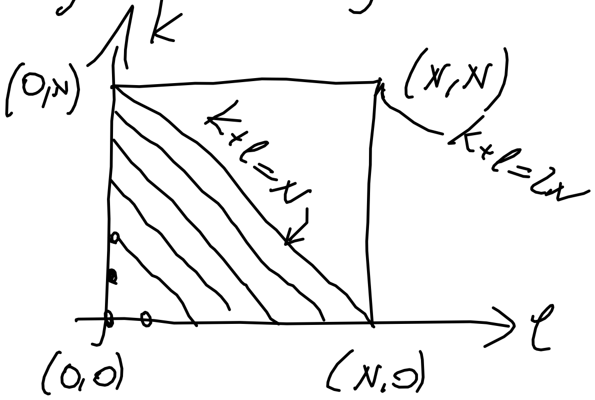
Alles läuft darauf hinaus in welcher Reihenfolge wir die Indexpaare (k,l) in der Doppelsumme in $(*)$ abklappern:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} a_k b_l \;\hat{=}$$

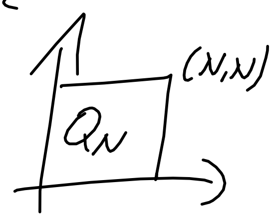


„quergestreift"

Es erweist sich für viele Anwendungen als günstiger längs der Diagonalen zu laufen, zumindest bis wir die längste Diagonale erreichen ...

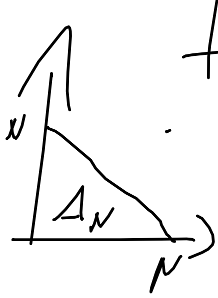


Wir verwenden folgende Abkürzungen für Bereiche des Gitters $\mathbb{N}\times\mathbb{N} =: \mathbb{N}^2$



$$Q_N := \{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\le k,l\le N\}$$

$$\Delta_N := \{(k,l)\in Q_N \mid k+l\le N\}$$



Damit können wir schreiben

$$\underline{A_N\cdot B_N} = \sum_{(k,l)\in Q_N} a_k b_l = \sum_{(k,l)\in\Delta_N} a_k b_l + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_l =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_l$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{\substack{(k,l)\in\Delta_N\\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

laufe längs der Diagonalen

(iii) Wozu das ganze? Wenn $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergieren und wir $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ betrachten, dann müssen wir in obiger Terminologie $\lim(A_N B_N)$ bearbeiten. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist, dass

$$\sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_l \longrightarrow 0$$

und der erste Term also gegen $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ geht.

Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

schöne Formeln

(iv) Ja, und muß man das so machen?

Nein, jede Form des Durchlaufens erzeugt bei abs. konv $\sum a_n, \sum b_n$ eine abs konv. Reihe [Deiser p 116 ff]

4.35 Prop (Cauchy-Produkt f. Reihen)

Seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. [technisch]. Wir verwenden die Notation aus 4.34.

Sei $S_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, dann gilt

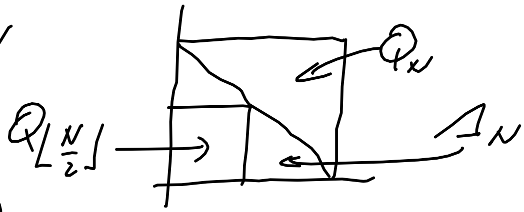
$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l$$

(1) $\lim S_N = \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right)$:

Setze $A_N^* = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$, $B_N^* = \sum_{n=0}^{N} |b_n| \Rightarrow A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l)\in Q_N} |a_k b_l|$

Es gilt $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subseteq \Delta_N \subseteq Q_N$

und damit



$$|A_N B_N - S_N| \leq \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus \Delta_N} |a_k||b_l| \leq \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k||b_l| \qquad (*)$$

$$= A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$$

Nach Vorauss. $(A_N^* B_N^*)_N$ konv $\Rightarrow$ CF

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} = 0$$

Wegen $A_N \cdot B_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right) \overset{(*)}{\Longrightarrow} S_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right)$

(2) $\sum c_n$ konv. absolut:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \underset{(\Delta)\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \xRightarrow{(1)\ \lim \sum |a_n|,\ \sum |b_n|} \text{konv.}$$

$\square$

Jetzt endlich für Exponentialreihe

4.36 BEM (Exponentialreihe)

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ abs. konv.,
denn für $x \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$
und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \xRightarrow{QT} \text{abs. konv.}$$

für $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

(ii) [ACHTUNG: NEUE IDEE!]
Daher können wir eine Funktion definieren

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R},$$

offiziell:

4.37 DEF (EXPONENTIALFUNKTION)

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und $e := \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl!

4.38 MOTIVATION (Funktionalgleichung für exp)

Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen exp-Fkt folgen aus der Funktionalgl. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
[Tatsächlich ist exp dadurch und eine Beschränktheits-

bedingung schon eindeutig charakterisiert [Barner-Flohr, Sec 7.5]
Wir werden sie jetzt als Folgerung aus dem Cauchy-Produkt herleiten

4.39 THM (Funktionalgl. für die exp-Fkt)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \quad (4.2)$$

Beweis. $4.36 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$ sind abs konv.

$$4.35 \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{\text{BLS}}{=} \frac{(x+y)^n}{n!} \quad (*)$$

Also

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y). \quad \square$$

4.40 KOR (Wichtige Eigenschaften von exp) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\exp(x) > 0$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$

Beweis. (ii) Die Funktionalgl. (4.2) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \overset{(4.2)}{=} \exp(x)\exp(-x)$$

(i) Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0. \qquad (*)$$

Für $x < 0$ gilt $\exp(x) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>0}}}_{>0\ (*)} > 0$

(iii) Wegen $\exp(-n) = 1/\exp(n)$ [(ii)] genügt es die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$\underline{n=0}$: $\exp(0) = 1 = e^0$

$\underline{n \mapsto n+1}$: $\exp(n+1) \overset{(4.2)}{=} \exp(n)\exp(1) \overset{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$ $\square$

4.41 BEM & MOTIVATION

(i) Thm 4.39 und Kor 4.40(i) bezeugen, dass exp ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \to ((0,\infty), \cdot)$$

ist; vgl. [EMA, 5.2.62]

(ii) Zum Abschluß des Fluss des Kapitels beweisen wir nun eine grobe aber doch nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe – später [WS] werden wir diese noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe]

NICHT VORGETRAGEN

4.42 PROP (Fehlerabschätzung für exp) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

N-te Partialsumme

wobei der „Rest" R_{N+1} für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1 + N/2$ die Abschätzung $\left|R_{N+1}(x)\right| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ erfüllt.

Beweis. Für den Restterm gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut. [4.36(i)]

Daher gilt

$$|R_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \underbrace{\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}}_{\leq |x|^2/(N+2)^2} + \dots\Big)$$

verallgemeinerte Δ-Ungl f. abs kon. Reihen: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Bew: $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{n=0}^{N} |a_n|$

$(N \to \infty) \downarrow \qquad \downarrow$

$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \overset{2.28}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$|x| \leq \frac{N+2}{2}$

$$\underset{\text{geom. R.}}{\overset{2.37}{=}} 2\,\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

$\square$

4.43 BSP (Approximation für e) Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1)$$

und $x = 1 \leq 1 + N/2 \ \forall N \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus 4.42 für $N = 2$

$$e = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und

$$0 < R_3(1) \leq 2\,\frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} \overset{2.8\dot{3}}{=} < 3.$$

Tatsächlich gilt $e \approx 2{,}71828$ [die ersten 100 Stellen erhält man genau schon nach Summation der ersten 73 Terme]

2 STETIGE FUNKTIONEN

In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit FUNKTIONEN und zwar zunächst mit solchen von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die folgende schöne Eigenschaft haben:

Kleine Änderungen der Argumente verursachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sog. STETIGEN FUNKTIONEN haben einige herausragende Eigenschaften, z.B.: Jedes stetige $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (Zwischenwertsatz!)
- nimmt Maximum & Minimum an (Satz vom Max).

Nach einem gründlichen Studium des STETIGKEITSBEGRIFFS lernen wir eine wichtige Klasse „einfacher" Funktionen kennen: die ELEMENTAREN TRANSZENDENTE Funktionen.

Dazu gehört insbesondere die LOGARITHMUSFUNKTION, die die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Ebenfalls mittels $\exp$ gelangen wir zur Definition der allgemeinen POTENZ r^s $(r>0, s \in \mathbb{R})$.

Dann erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen & Reihen auf den Fall komplexer Zahlen und gelangen über die komplexe Exponentialfunktion zu den WINKELFUNKTIONEN Sinus & Cosinus.

§1 Stetigkeit

In diesem § lernen wir den essentiellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen. Zuvor wiederholen wir Grundlegendes zu solchen Fkt

1.1. Erinnerung (Funktionen)

Eine Funktion $f: A \to B$ zwischen (beliebigen) Mengen A, B ordnet jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zu [ETTA, 3.4.1]

Wir betrachten hier Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$. Für solche Funktionen ist der Graph [ETTA, 4.3.4]

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

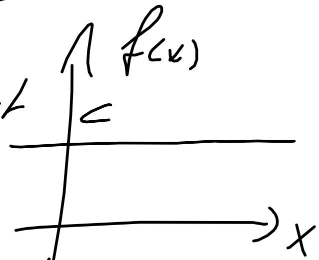
Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und kann in der „üblichen Weise" gezeichnet werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von

1.2. Bsp (reelle Fkt)

dafür hätten wir den Begriff nicht gebraucht...

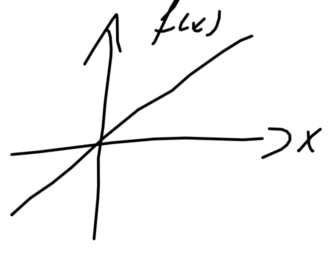
(i) Konstante Fkt.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, dann definiert $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := c \ \forall x \in \mathbb{R}$ eine konstante Fkt



(ii) Die identische Abb auf $\mathbb{R}$ [ETTA, p.165] ist gegeben durch $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

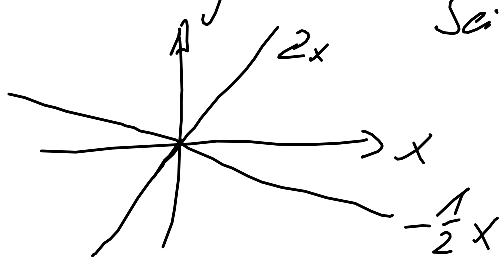


(iii) Lineare Fkt sind etwas allgemeiner. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig

Anstieg

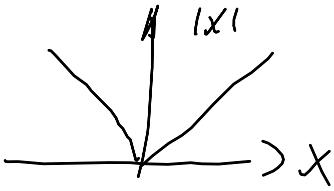
$l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$l(x) = ax$



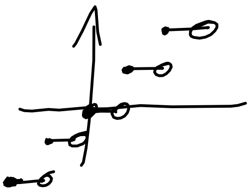
(iv) Die Betragsfunktion $\boxed{0}$ 1.7 $\quad |\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$



(v) Die Gaußklammer $\quad \lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ [ÜE, Blatt 1, $\boxed{6}$]

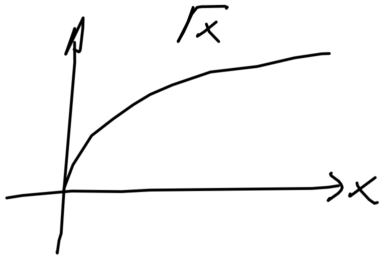
$x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$



(vi) Die Wurzelfkt. $\quad \sqrt{\ } : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

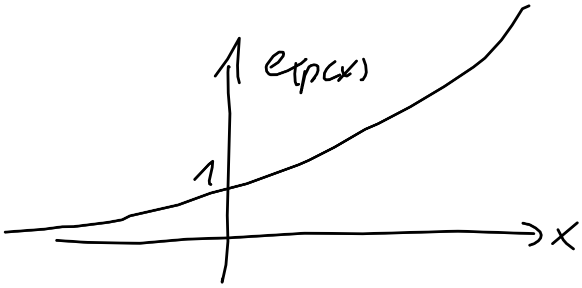
$x \mapsto \sqrt{x}$

[$\boxed{0}$ 1.11(iii)]



(vii) Die Exponentialfkt. [$\boxed{1}$ 4.37]

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \exp(x)$



(viii) Polynomfunktionen [ETNA, p. 30] Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(x \in \mathbb{R})$

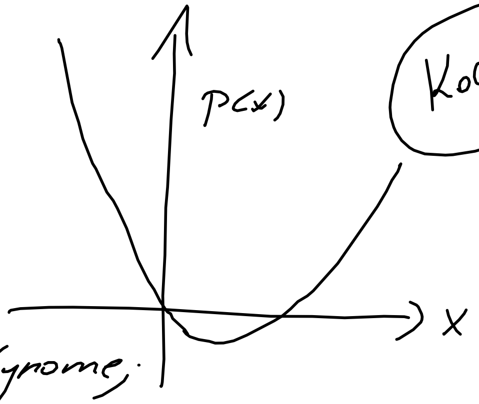
Grad, falls $a_m \neq 0$

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Koeffizienten

z.B. $m = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1 = -a_2$

$p(x) = -x + x^2$



(ix) Rationale Fkt. Eine rationale Funktion ist Quotient zweier Polynome, genauer sei $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

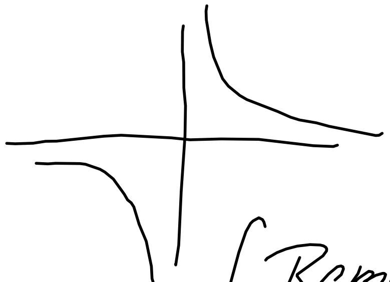
$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

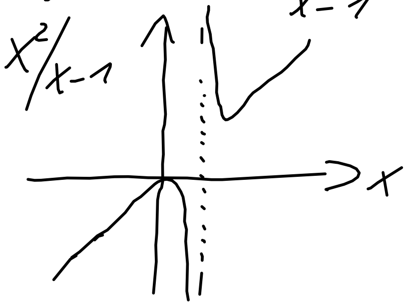
und sei $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Wir definieren

$$r : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

Ein Bsp einer rat. Funktion ist etwa $\mathbb{R}\setminus\{1\} =: D \ni x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{R}$
oder etwas einfacher mit $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$r(x) = \frac{1}{x}$





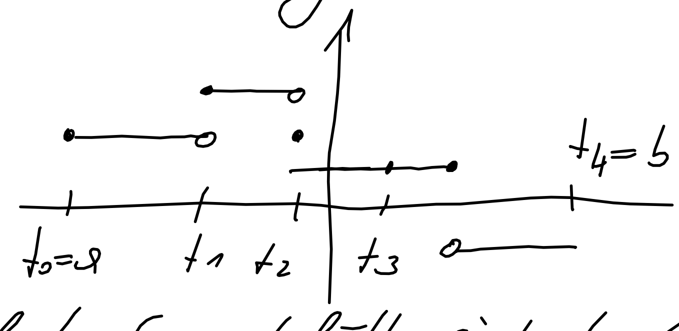
[Bemerke Polynome sind rationale Fkt mit Nenner $q(x)=1$.]

(x) Treppenfunktionen: Eine Fkt $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls

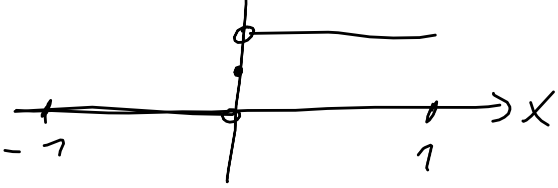
- es eine endliche Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ gibt $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$
- und Konstanten $c_1,c_2,\dots,c_n$

sodass $\varphi(x)=c_k$ für $x\in(t_{k-1},t_k)$ $(1\le k\le n)$

[φ hat auf den offenen Teilintervallen (t_{k-1},t_k) den Wert c_k; die endlich vielen Werte $\varphi(t_k)$ $(0\le k\le n)$ können beliebig sein.]



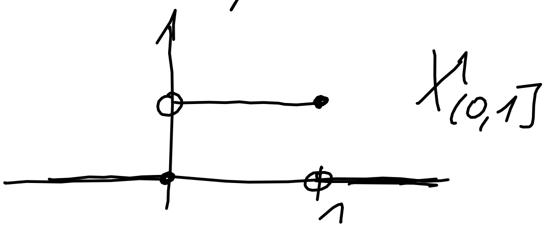
Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer $[(x)]$ und die Sprungfunktion H auf $[-1,1]$ mit $t_0=-1$, $t_1=0$, $t_2=1$, $c_1=0$, $c_2=1$ und $H(0):=1/2$



Das ist Willkür...

(xi) <u>Charakteristische</u> <u>Funktion einer Menge</u>. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

dann definieren wir $\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



So einfach das klingt, für häßliche M kann das ganz schön unanschaulich werden, z.B. $M = \mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ Dirichlet-Fkt

$$G(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{(p,1) : p \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r,0) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

1.3 FAKTENSAMMLUNG (Grundoperationen mit Funktionen)

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben komplizierte Funktionen aus einfachen Bausteinen zu basteln – diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue aber wesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in $\mathbb{R}$ (Zielraum der Fkt) verwendet werden um Operationen für die Fkt <u>selbst</u> zu definieren – letzteres Konzept werden wir bald als wesentliches Werkzeug schätzen lernen.

Seien also $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Die Funktionen

$$f \pm g : D \to \mathbb{R}, \quad \lambda f : D \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

sind in Termen der punktweisen Operationen in $\mathbb{R}$ definiert, d.h.

$$\{\forall x \in D\}$$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ detto

neues + zwischen Fkt

+ in $\mathbb{R}$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Schreibweise oft $f+g(x)$ statt $(f+g)(x)$ etc....

[Nebenbemerkung. Die Menge $\mathcal{F}(D) := \{f : D \to \mathbb{R}\}$ ist mit $+, \lambda\cdot$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum]

(ii) Sei $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$. Die Quotientenfunktion von f und g ist definiert durch

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R};\quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(D) \subseteq E$ und $h : E \to \mathbb{R}$.

das Bild von D unter f $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ [EMA, 4.3.11]

Dann können wir die Verknüpfung (Zusammensetzung, Komposition) von f mit h definieren als ([EMA. 4.3.23])

$$h \circ f : D \to \mathbb{R};\quad h \circ f(x) = h(f(x))$$

hier muß $f(x) \subseteq E$ sein, sonst kann h nicht zupacken

1.4 BSP (Ops f. Fkt)

(i) Für $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$q(x) = x^2$ gilt

$q(x) = id \cdot id\,(x)$ $[id(x) = x]$

(ii) Allgemeiner lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ , also}$$

konst. Fkt

$$p = a_m \cdot \underbrace{(id \cdot id \cdot \ldots \cdot id)}_{m\text{-mal}} + \dots + a_1 \cdot id + a_0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$$

konst. Fkt 1

(iii) Mit q wie in (i) gilt $\sqrt{\ } \circ q = |\ |$, denn

$$(\sqrt{\ } \circ q)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.5 Motivation (Stetigkeit)

(i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

Eine kleine Änderung der Stelle soll(te) nur eine kleine Änderung der Funktionswerte zur Folge haben.

natürliche, implizite Vorstellung

Genauer: falls x nahe x_0 liegt, dann sollte $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ liegen.

(ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in den Anwendungen wichtig. Am Bsp des Fahrradfahrens [10] 0.3]:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden, wenn ich nur ein bißchen schneller fahre

[Zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe [Behrends, p. 199].]

Andererseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft klar nicht erfüllt ist: Die Farbe der Ampel als Fkt der Zeit. Genauer, sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ rot ist.} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Zeitpunkt t_0, an dem die Ampel umschaltet: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Zeit nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

(iii) Wir beginnen nun die intuitive Idee der Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ zu formalisieren:

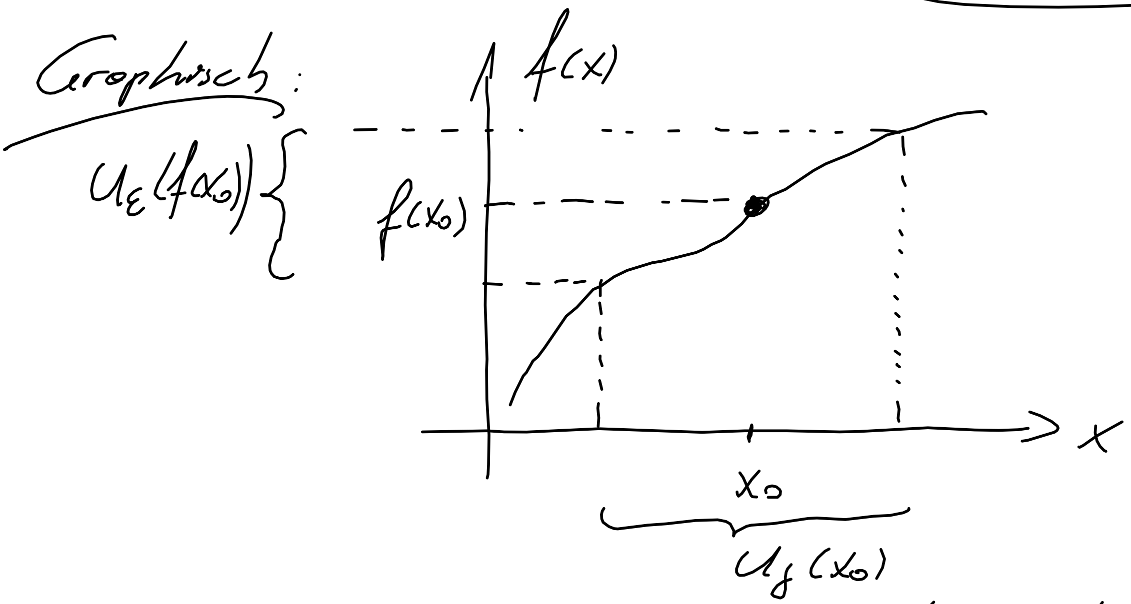
Es scheint wünschenswert zuerst eine „Toleranzgrenze" für die Funktionswerte vorzugeben, also eine beliebige ε-Umgebung von $f(x_0)$ und dann zu fordern, dass es ein „Sicherheitsintervall" $U_\delta(x_0)$ um x_0 geben soll, sodass

$$|x-x_0| < \delta \text{ ergibt, dass } |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

x im Sicherheitsintervall um x_0

$f(x)$ innerhalb der Toleranzgrenze um $f(x_0)$

Graphisch:



Der Witz der Formulierung ist: für jede (noch so kleine) Toleranz ε gibt es ein δ-Sicherheitsintervall; offiziell

1.6. DEF (Stetigkeit) ← mindestens so wichtig wie Grenzwert def

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x_0 \in D$ eine Stelle im Definitionsbereich.

(i) f heißt <u>stetig in x_0</u>, falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \quad (1.1)$$

(ii) f heißt stetig (auf D), falls f stetig in jedem $x_0 \in D$ ist.

1.7 BEM (zur Stetigkeit)

(i) Offensichtliche Umformulierungen der Stetigkeit im Pkt x_0 sind

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D \implies f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

Bild von $U_\delta(x_0) \cap D$ unter f

(ii) Will ich konkret für $x_0 \in D$ zeigen, dass f dort stetig ist, dann muß ich

für jede noch so kleine Toleranz ε um $f(x_0)$

ein entsprechendes Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ finden (können) $[\delta(\varepsilon)]$

sodass $|x-x_0|<\delta$ die Abschätzung $|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$ ergibt.

Im allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls δ von der (zuvor festgelegten) Toleranz ε abhängen, also

$$\delta(\varepsilon).$$

GROSSE FETTE WARNUNG: Niemals darf umgekehrt ε von δ abhängen (vgl [1] 2.9)

$$\cancel{\varepsilon(\delta)}$$

1.8 BSP (stetige Funktionen)

(i) Konstante Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defbereichs)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$

$f(x)=c$ für ein fixes $c\in\mathbb{R}$.

Dann gilt $\forall x_0\in D\ \forall x\in D\ |f(x)-f(x_0)|=0$, also (1.1) $\forall\varepsilon>0$ mit $\delta>0$ beliebig

sodass, dass δ unabhängig von ε und x_0 gewählt werden kann

(ii) Lineare Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defber.)

Sei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=ax$ für ein $a\in\mathbb{R}$

Vorüberlegung: falls $a=0$ liegt die konst. Fkt $f(x)=0$ vor und diese ist nach (i) stetig

Sei also $a\neq0$. Wir müssen $|f(x)-f(x_0)|$ abschätzen & es gilt

$$|f(x)-f(x_0)|=|a|\,|x-x_0|$$

Wir müssen also δ nur $\varepsilon/|a|$ wählen.

sodass, dass δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann

Nun zum Beweis: Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon / |a|$ (>0?) dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| = |a|\,|x - x_0| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

(iii) Die Exponentialfunktion ist stetig (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\underbrace{\exp(x - x_0 + x_0)}_{\exp(x-x_0)\cdot\exp(x_0)\ ([1],\ 4.38)} - \exp(x_0)|$$

$$\overset{[1]\ 4.40(i)}{=} \exp(x_0)\,|\exp(x_0 - x) - 1| \quad (*)$$

Wir müssen also $|\exp(x - x_0) - 1|$ für x nahe x_0 abschätzen, also $|\exp(y) - 1|$ für y nahe 0; das erledigt aber [1] 4.42 mit $N = 0$ für uns

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{0} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \implies$$

$$|\exp(y) - 1| = |R_1(y)| \leq 2|y| \quad \text{falls } |y| < 1 \quad (**)$$

Sei also $\delta := \min\{1, \varepsilon / (2\exp(x_0))\}$. Dann gilt $\forall |x - x_0| < \delta$

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \overset{(*)}{=} \exp(x_0)\,|\exp(x - x_0) - 1|$$

$$\overset{(**)}{\leq} \exp(x_0)\, 2\,|x - x_0|$$

$$< 2\exp(x_0)\,\delta \leq \varepsilon.$$

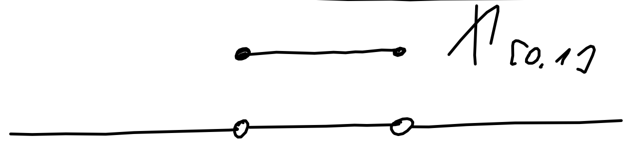
weil Anstieg $a = \pm 1$ vgl. (ii)

(iv) Der Betrag ist stetig (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$; setze $\delta = \varepsilon$, dann gilt $\forall |x - x_0| < \delta$ (verkehrte Δ-Ungl.)

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

(v) Sprünge sind nicht stetig. (Erzbeispiel unstetiger Fkt)

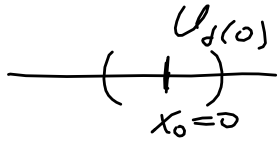
Sei $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Dann ist f unstetig bei $x_0 = 0$: $f(0) = 1$ aber beliebig nahe „links" von $x_0 = 0$ gilt $f = 0$; das muß schiefgehen... [und ebenso bei $x_0 = 1$; überall sonst ist χ als konstante Fkt stetig!]

Sei also $\underline{\varepsilon = 1/2}$, dann gilt $\underline{\forall \delta > 0}$ (egal wie klein!)

$$\underline{\exists x \in U_\delta(0)}, \; x < 0$$



und somit $\left|\underline{f(x) - f(x_0)}\right| = |0 - 1| = 1 \underline{>} \tfrac{1}{2} \underline{= \varepsilon}$.

1.9. BEM (Stetige und unstetige Fkt)

(i) Wie wir es in 1.8(v) getan haben muß für einen Beweis der Unstetigkeit einer Fkt f an einer Stelle $x_0 \in D$ nur ein „$\underline{\text{Versager-}\varepsilon}$" angegeben werden (vgl [1] 2.9.(ii)). Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (1.1)

$$\neg \Big(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big)$$

$$= \; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in D \;\; |x - x_0| < \delta : \; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Es gibt zumindest eine Versager-Toleranz $\varepsilon > 0$

sodass egal wie klein das Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ gewählt ist

es immer noch (zumindest) ein $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ gibt

sodass $f(x)$ nicht im Toleranzintervall $U_\varepsilon(f(x_0))$ liegt

(ii) Wie schon in 1.7(ii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung (1.1)

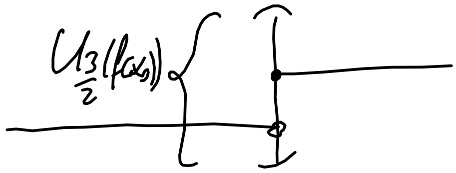
<u>zuerst die Toleranz</u> ε vorgegeben wird

und erst <u>dann das Sicherheitsintervall</u> gefunden werden muß.

Kehrt man dies <u>falschweise</u> um zu

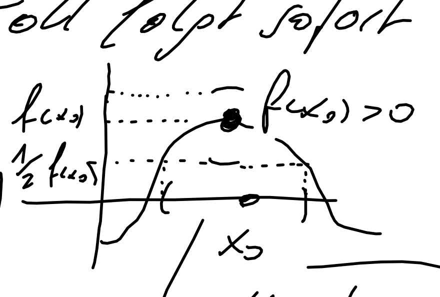
$$(*) \quad \forall \delta>0\ \exists \varepsilon>0 \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

dann wäre z.B. der Sprung in 1.8(v) stetig. Tatsächlich brauche ich nur $\varepsilon>1$ zu wählen:



Ergibt sich auch, falls in (1.1) im hinteren Teil ε mit δ vertauscht wird?

(iii) Die Funktionswerte $f(x)$ einer bei x_0 stetigen Fkt f bleiben also für x nahe bei x_0 in der Nähe von $f(x_0)$. Anders ausgedrückt falls $f(x_0) \neq c$, dann bleibt $f(x)$ nahe bei x_0 auch weg von c. Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden – oft sehr brauchbaren – Lemma für $c=0$; der allgemeine Fall folgt sofort durch Verschieben des Graphen.



Umgebung von x_0 auf der $f \neq 0$ (weil $> f(x_0)/2$)

1.10 LEMMA (Nichtverschwinden auf Umg.)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und sei $f(x_0) \neq 0$.
Dann $\exists \delta>0$ sodass auch

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \text{ gilt dass } f(x) \neq 0.$$

Beweis: $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$

$$(1.1) \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

Daher gilt $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ (verkehrte Δ-Ungl.)

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)|$$

Trick

$$> |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$$

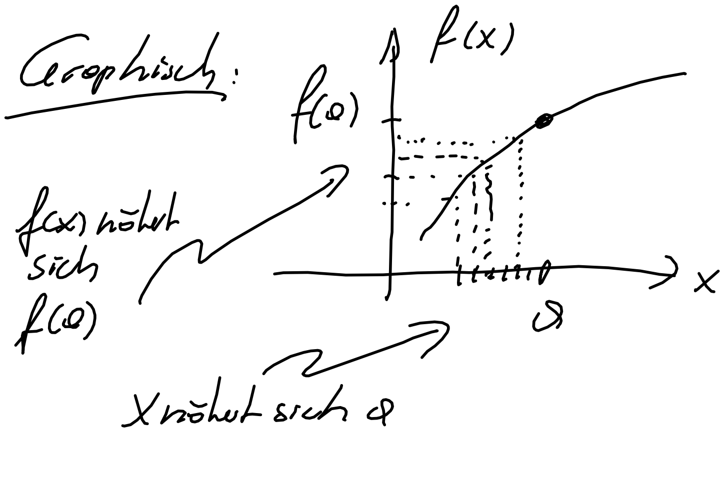
$\square$

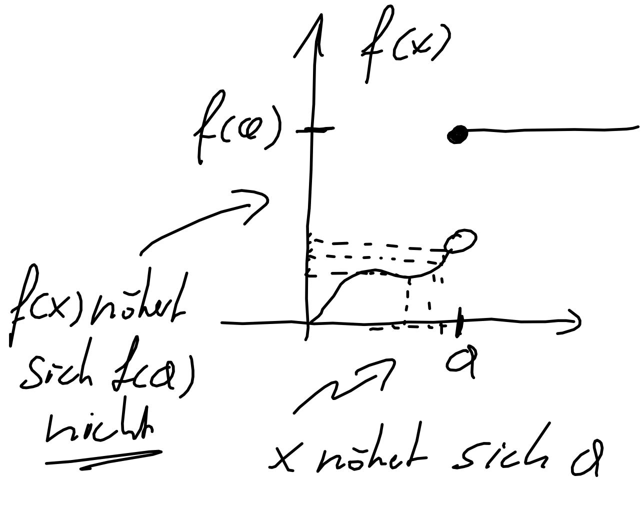
1.11 MOTIVATION (Stetigkeit und Folgen)

Die intuitive Idee der Stetigkeit von f in einem Pkt $a \in D$ läßt sich wie folgt umformulieren

$$\boxed{\text{Egal wie sich } x \text{ an } a \text{ annähert, es nähert sich } f(x) \text{ an } f(a) \text{ an}}$$

Graphisch:





Diese Idee läßt sich mittels Folgen präzisieren:

$$\forall \text{ Folgen } x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a), \text{ bzw.}$$

$$\forall \text{ Folgen } x_n \to a : \lim(f(x_n)) = f(\lim x_n)$$

und sie funktioniert auch, wie das folgende essentielle Thm lehrt

f vertauscht mit Limiten

1.12 THM (Stetigkeit via Folgen) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Dann gilt

f ist stetig in a $\iff$ Für jede Folge (x_n) in D gilt $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim x_n = a$. Wir müssen zeigen, dass $\lim(f(x_n)) = f(a)$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$

$$\overset{(1.1)}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(a) \cap D: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\overset{x_n \to a}{\Longrightarrow} \exists N > 0 \quad \forall n \geq N: \quad |x_n - a| < \delta \qquad (**)$$

Daher $\forall n \geq N \overset{(**)}{\Longrightarrow} |x_n - a| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

Also $\lim(f(x_n)) = f(a)$

"$\Leftarrow$" Angenommen f ist unstetig bei $a \in D$. Wir konstruieren eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ aber $f(x_n) \not\to f(a)$.

f unstetig bei $a \Longrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(a) \cap D: \quad f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$$

Wir fixieren dieses ε und wählen sukzessive $\delta = 1/n$ $(\mathbb{N} \ni n \geq 1)$. Damit erhalten wir eine Folge (x_n) in D mit $(n \geq 1)$

- $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$, d.h. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ also $x_n \to a$ aber
- $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, d.h. $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

also $f(x_n) \not\to f(a)$. $\square$

1.13 BEM (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit)

Nicht vorgetragen

(i) Zur Terminologie: Bedingung (1.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren; man spricht daher von Umgebungsstetigkeit. Die r.S. in Thm 1.12 hingegen verwendet Folgen und man spricht von Folgenstetigkeit.

(ii) Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken

f vertauscht mit Limiten [$f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$].

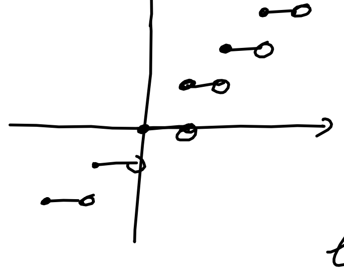
(iii) Thm 1.12 besagt in dieser Terminologie, dass (für Fkt $f: D \to \mathbb{R}$) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind. [Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (aber wichtigen) Mengen ist das nicht der Fall; „$\Rightarrow$" gilt immer, „$\Leftarrow$" ist. i.a. falsch!]

(iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und als Unstetigkeitsstellen entlarven.

1.14 BSP (Sprünge)

(i) Die Gaußklammer ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in jedem $a \in \mathbb{Z}$:

$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$



• Sei $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor a \rfloor = a$ und die Folge $x_n = a - \frac{1}{n}$ erfüllt $x_n \to a$ aber $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor = a - 1$ daher

$$\lim_n (\lfloor x_n \rfloor) = \lim_n a - 1 = a - 1 \ne a = \lfloor a \rfloor = \lfloor \lim x_n \rfloor$$

- Für $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ gilt $\lfloor a\rfloor < a < \lfloor a\rfloor + 1$. Daher gilt für jede Folge $x_n \to a$: $\exists N_0\ \forall n \geq N_0: \lfloor a\rfloor < x_n < \lfloor a\rfloor + 1$ $\Longrightarrow \lfloor x_n\rfloor = \lfloor a\rfloor\ \forall n \geq N_0$ und somit $\lim \lfloor x_n\rfloor = \lfloor a\rfloor = \lfloor \lim x_n\rfloor$.

(ii) Die Dirichletfkt $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{R}$

nicht vorgetragen

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon = 1/2$. Wir unterscheiden die Fälle

(1) $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 0$. Wegen der Dichtheit ($\boxed{10}$ 1.11(ii)) von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ können wir in jedem Intervall $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ finden, d.h. $\forall \delta > 0\ \exists q \in \mathbb{Q}: |q-a| < \delta$ aber klarerweise gilt

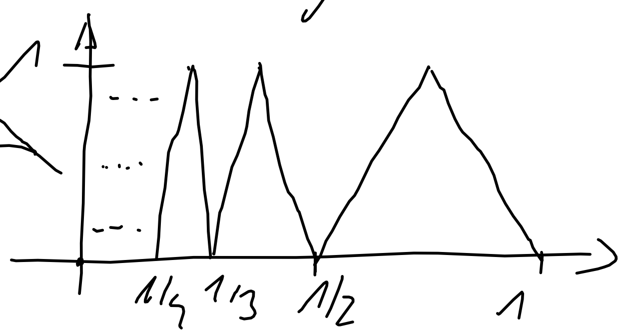
$$|\chi_{\mathbb{Q}}(q) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |1-0| = 1 > 1/2 = \varepsilon$$

(2) $a \in \mathbb{Q}$: Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 1$. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ($\boxed{10}$ 1.11(ii)) gilt völlig analog zu Fall (1): $\forall \delta > 0\ \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ |r-a| < \delta$ und daher $|\chi_{\mathbb{Q}}(r) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |0-1| = 1 > 1/2 = \varepsilon$.

1.15 WARNUNG (zur Stetigkeit)

(i) Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit

Auch „wilde Oszillation" führt zur Unstetigkeit, denn sei z.B. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$ und sonst durch die unten dargestellten immer schmäler werdenden „Zacken".



$\forall x_0 > 0$ gilt: f stetig in x_0 (vgl. 1.8(ii) und 1.8(iv))

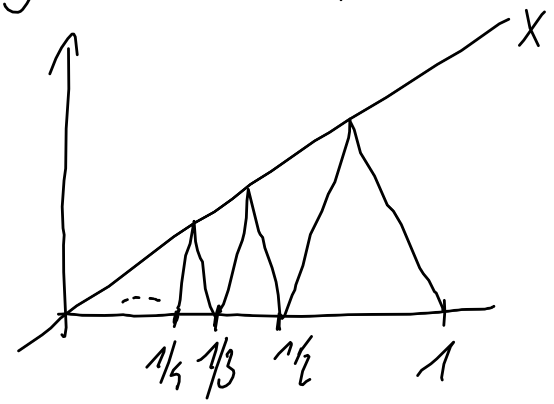
Könnte man schon explizit aufschreiben, bringt aber keine bessere Einsicht

Dann gibt es für jedes $c \in [0,1]$ eine Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $f(x_n) = c \ \forall n$. Daher ist f in 0 nicht stetig, obwohl f dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

(ii) Folgende „Merkregel," die auch in Schulbüchern zu finden ist, ist sehr problematisch:

? Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn man sie ohne Absetzen zeichnen kann. ?

Erstens ist nicht klar, was das heißen soll. Zweitens ist etwa folgende Modifikation von f aus (i) stetig auf $[0,1]$.



Die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ folgt, da $\forall x: f(x) \leq x$ und daher $\forall x_n \to 0$: $0 \leq f(x_n) \leq x_n \to 0$

Beim Zeichnen ergibt sich aber das Problem, dass die Länge des Graphen auf dem endlichen Intervall $[0,1]$ nicht endlich ist [daher alle Bleistifte dieser Welt verbraucht worden sind, bevor man $x_0 = 0$ erreicht]. Genauer gilt für die Länge des Graphen von $x = 1$ (nach links) bis $x = 1/n$

$$\ell\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}$$ divergent nach 4.7(ii)

Die Länge von $\frac{1}{k-1}$ bis $\frac{1}{k}$ ist sicher größer als 2x die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion, also $2 \cdot 1/k$

(iii) Es gibt Monster. So anschaulich die Def der Stetigkeit auch sein mag — es gibt völlig unanschauliche „Monster-Funktionen" mit sehr eigenartigem Stetigkeitsverhalten. So gibt es z.B. eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die in allen irrationalen Pkten stetig ist in allen rationalen Pkten aber unstetig.

nicht vorgetragen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{falls } x=p/q\in\mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Dann gilt

(1) f ist unstetig in allen $x_0\in\mathbb{Q}$: Sei $x_0=p/q\in\mathbb{Q}$, dann setze $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{1}{q}$. Weil $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ dicht liegt ($\boxed{10}$ 1.11(iii)) gilt $\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $|x-x_0|<\delta$ aber

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|0-\frac{1}{q}\right|=\frac{1}{q}>\frac{1}{2}\,\frac{1}{q}=\varepsilon$$

(2) f ist stetig in allen $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: Sei $\varepsilon>0$ gewählt.

Von allen Zahlen $\mathbb{Q}\ni p/q$ mit $q\le 1/\varepsilon$ liegen in jedem Intervall nur endlich viele und keines davon ist gleich x_0 ($\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$!).

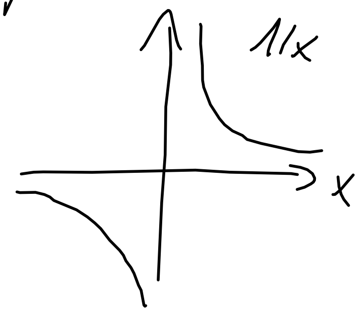
$\Longrightarrow\ \exists$ ein p_0/q_0, das x_0 am nächsten liegt.

Definiere $\delta=|x_0-p_0/q_0|$. Nun gilt $\forall x$ mit $|x-x_0|<\delta$, dass $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, denn falls

- $x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$
- $x\in\mathbb{Q}\Longrightarrow x=p'/q'$ (gekürzt) mit $q'>1/\varepsilon$ [denn in $U_\delta(x_0)$ liegt nach Wahl von δ keine Zahl p'/q' mit $q'\le 1/\varepsilon$] $\Longrightarrow f(x)=1/q'<\varepsilon$ und daher $|f(x)-f(x_0)|=|0-1/q'|=1/q'<\varepsilon$.

(iv) Offensichtlicher Unfug: Wir betrachten die Fkt

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$ (1.2(ix))



Ist f im Punkt $x_0=0$ stetig?

Diese Frage ist Unfug, weil $x_0=0\notin D$, daher ist f in x_0 garnicht definiert und die Frage nach der Stetigkeit kann garnicht gestellt werden. Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass alle rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Defbereich stetig sind.

1.16 MOTIVATION (Grundoperationen und Stetigkeit)

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der Grundoperationen für Funktionen aus 1.3 bedienen ($\pm$, $\lambda\cdot$, $\cdot$, $-$) und zeigen dass diese aus stetigen Fkt wiederum stetige Fkt machen. Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine sehr elegante Methode zum Basteln vieler neuer stetiger Fkt.

1.17 PROP (Grundop f. stetige Fkt.) Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) Falls $f,g:D\to\mathbb{R}$ stetig in $a\in D$ sind, dann sind auch

$$f\pm g: D\to\mathbb{R},\quad \lambda f: D\to\mathbb{R},\quad f\cdot g: D\to\mathbb{R}$$

stetig in a. Falls $a\in D':=\{x\in D: g(x)\neq 0\}$, dann ist auch

$$\frac{f}{g}: D'\to\mathbb{R}$$

stetig in a.

(ii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ und $h: E \to \mathbb{R}$. Falls f stetig in $a \in D$ und h stetig in $b := f(a) \in E$ dann ist auch die Zusammensetzung

$$h \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \left[D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq E \xrightarrow{h} \mathbb{R} \right]$$

stetig in a.

Beweis (i) Wir beweisen nur die Aussage für die Summe; die anderen Fälle sind ähnlich [UE]

Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to a$. Wir zeigen $(f+g)(x_n) \longrightarrow (f+g)(a)$, woraus mit 1.12 die Stetigkeit von $f+g$ in a folgt.

$$(f+g)(x_n) \overset{1.3(i)}{=} f(x_n) + g(x_n) \underset{[1]\, 2.23}{\xrightarrow{f,g \text{ stetig}}} f(a) + g(a) \overset{1.3(i)}{=} (f+g)(a) \quad (n \to \infty)$$

(ii) Wir verwenden so wie oben 1.12. Sei also (x_n) Folge in D, $x_n \to a$.

$$f \text{ stetig in } a \overset{1.12}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(a) = b$$
$$\Rightarrow (y_n) := (f(x_n)) \text{ ist Folge in } E \text{ mit } y_n \to b$$
$$h \text{ stetig in } b \overset{1.12}{\Rightarrow} h(y_n) \longrightarrow h(b)$$

Also insgesamt

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \to h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$$

$\square$

1.18 KOR (Stetigkeit v. Polynomen & rat. Fkt)

Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Beweis: [vgl. Motivation 1.16]

Polynome sind endliche Summen endlicher Produkte konstanter Fkt mit id [1.4(ii)]. Alle „Bausteine" sind stetig [1.8(i), 1.8(ii) mit $a=1$], daher folgt aus 1.17(i) [$+, \cdot$] die Stetigkeit von Polynomen in jedem Pkt ihres Definitionsbereichs.

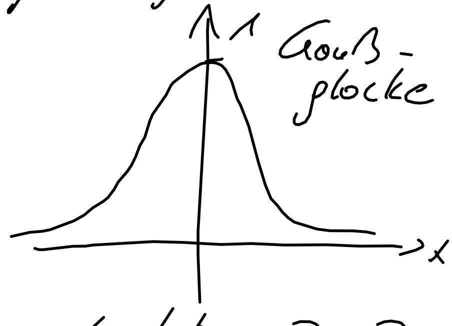
Rationale Fkt sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, wo der Nenner nicht verschwindet [1.2(ix)]. Polynome sind nach obigem stetig auf ihrem Defbereich also nach 1.17(i) [$/$] auch rat. Funktionen in jedem Pkt ihres Defbereichs.

$\square$

1.19 BSP (Stetige Fkt aus 1.17)

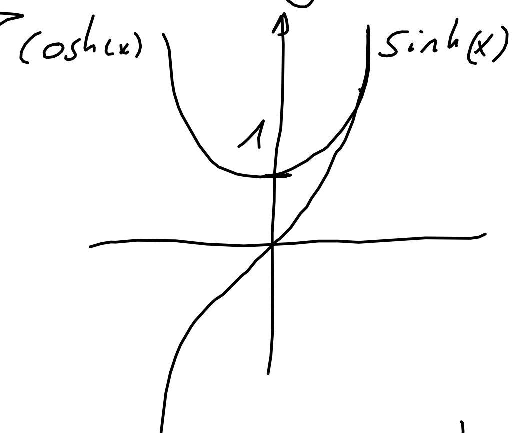
(i) $p(x) = -x^2$ ist als Polynom stetig auf ganz $\mathbb{R}$ [1.18]
exp ist stetig auf $\mathbb{R}$ [1.8(iii)]. Also gilt wegen 1.17(ii)

$$\exp\circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(-x^2)$$



ist stetig auf $\mathbb{R}$

(ii) Der hyperbolische Sinus & Cosinus sind stetig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)$$

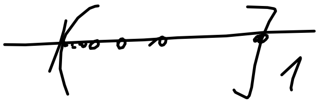
[Diese Fkt parametrisieren die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ $\begin{pmatrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{pmatrix}$ in Analogie zum Kreis $x^2 + y^2 = 1$ $\begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix}$. [UE]]

1.20 MOTIVATION (Grenzwerte von Fkt)

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffs führen.

Genauer wollen wir eine Fkt f entlang beliebiger konvergenter Folgen (x_n) in D auswerten also $f(x_n)$ betrachten. (Diese Idee liegt sehr nahe zur Folgenstetigkeit, vgl. 1.11, 1.12). Als technischer Punkt ergibt sich, dass eine Folge $(x_n)_n$ in D, die (als Folge in $\mathbb{R}$) konvergiert ihren Limes nicht notwendigerweise in D haben muß, z.B.

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in (0,1] \quad \text{aber} \quad \lim 1/n = 0 \notin (0,1]$$



Grenzwerte von Folgen in D, die (in $\mathbb{R}$) konvergieren sind dann genau die <u>Berührpunkte</u> (vgl. [1] 3.27) von D [[1] Prop 3.30(i)].

Die grundlegende Def ist daher.

1.21 DEF (Grenzwert einer Fkt)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei a ein Berührpkt von D. Wir schreiben

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \to a$ gilt, dass $f(x_n) \to c$

($c \in \mathbb{R}$ oder auch $\pm\infty$)

1.22 BEOBACHTUNG (Zum Grenzwert von Fkt)

(i) Wie in 1.20 wiederholt gibt es wegen [1] 3.30(i) für jeden Berührpkt a von D mindestens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ [i.a. wird es aber viele solcher Folgen geben ...]

(ii) Wie oben gesagt, muß a nicht in D liegen. Falls dem aber so ist, so ist $x_n = a\ \forall n$ (also die konstante Folge $x_n = a$) eine gemäß Def 1.21 erlaubte Folge.
Falls dann $\lim_{x\to a} f(x)$ überhaupt existiert, muß er schon $f(a)$ sein [denn $\lim_{x_n = a} f(x_n) = \lim f(a) = f(a)$]

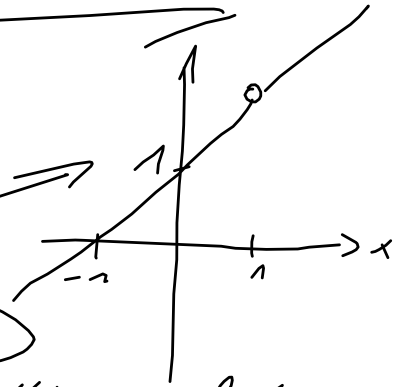
1.23 Bsp (Limes rationaler Fkt)

(i) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Es gilt $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 2}$

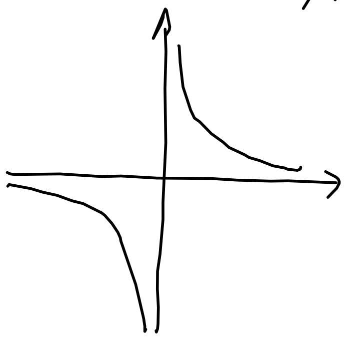
denn sei $x_n \in D \Rightarrow x_n \neq 1\ \forall n$ und daher

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \underbrace{\lim_{x\to 1}(x+1)} = 2$$

Ist ja nur eine verkappte lineare Fkt



(ii) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1/x$



$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ weil zB $f(1/n) \to \infty$, $f(-1/n) \to -\infty$

Wir sollten also unseren Begriffsapparat erweitern:

(1) Wir brauchen einen Begriff, der auch „einseitiges" Annähern erlaubt, also Folgen $x_n \to 0$, $x_n > 0$ bzw $x_n \to 0$ $x_n < 0$

(2) Wir sollten auch Grenzwerte für f längs Folgen $x_n \to +\infty$, $x_n \to -\infty$ zulassen.

Also formalisieren wir wie folgt

1.24 Def (Einseitige & uneigentliche Grenzwerte v. Fkt)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Sei a ein Berührpunkt von $D \cap (a, \infty)$. Wir schreiben

$\lim_{x\searrow a} f(x) = c$ oder $\lim_{x\to a+} f(x) = c$ entsprechend

c ist der <u>rechtsseitige</u> <u>Grenzwert von</u> f gegen a, falls

für alle Folgen (x_n) in D, $x_n > a$, $x_n \to a$: $\lim_{x_n\to a} f(x_n) = c$ gilt

(ii) Analog dazu definieren wir den linksseitigen Limes

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

(iii) Falls D nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \infty$ gilt, dass $\lim_{x_n\to\infty} (f(x_n)) = c$ dann schreiben wir

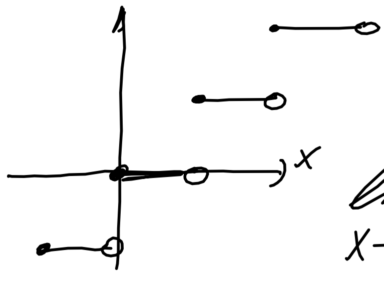
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

(iv) Analog definieren wir $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ für nach unten unbeschränkte Definitionsbereiche D.

<u>1.25 Bsp</u> (Nochmals Grenzwerte von Fkt)

$0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$

(i) $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

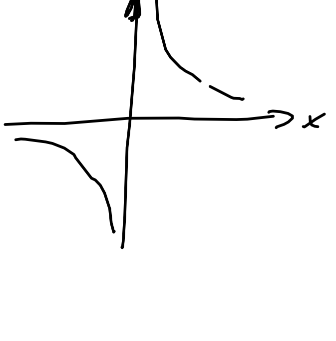


$\lim_{x\to 1+} \lfloor x \rfloor = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1-} \lfloor x \rfloor = 0$

$1 < x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$

$0 > x_n \to 0$
$\boxed{1}$ $2.47(ii)$ $\Longrightarrow f(x_n) = 1/x_n \to -\infty$

(ii) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1/x$



$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

detto $\boxed{1}$ $2.47(ii)$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\forall K > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n| > K \Rightarrow 1/|x_n| < 1/K$

(iii) Sei $m \geq 1$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom. Dann gilt $\boxed{\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p(x)} = 0}$

Tatsächlich gilt:

$$p(x) = x^m\left(1 + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^m}\right) \geq x^m\left(1 - \frac{|a_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^m}\right)$$

Sei $x \geq M := 2m \cdot \max(1, |a_{m-1}|, \dots, |a_0|)$ dann gilt

$$p(x) \geq x^m\left(1 - m\frac{1}{2m}\right) = \frac{x^m}{2} \qquad (*)$$

Sei nun (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty \Rightarrow x_n \geq M \ \forall n \geq N$ und somit $p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2} \to \infty \quad (n \to \infty)$

also $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

Um die 2. Behauptung zu zeigen bemerke dass $(*)$ impliziert, dass $p(x) \geq 1/2 \ \forall x \geq M$, daher ist $1/p(x)$ für alle $x \geq M$ definiert und das Resultat folgt aus [1] 2.47(ii).

in 1.20 angekündigt

1.26 Prop (Grenzwert & Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann gilt

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

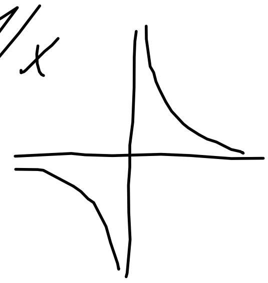
Beweis [ganz einfach die Begriffe zusammensetzen & 1.12]

$$f \text{ stetig in } a \overset{1.12}{\iff} \begin{array}{l}\forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \\ \text{gilt } f(x_n) \to f(a)\end{array} \overset{1.20}{\iff} \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$\square$

1.27 BEM (Nochmals $1/x$ – zur Ehrenrettung von 1.15 (ii))

Wir betrachten nochmals $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$



In 1.15 (ii) haben wir bemerkt, dass es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von f in $x_0 = 0 \notin D$ zu fragen.

Tatsächlich hat es aber etwas mit dem „unstetigen Aussehen" von $1/x$ bei $x_0 = 0$ auf sich, und zwar:

$$\boxed{f(x) = 1/x \text{ kann nicht stetig von } \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ auf ganz } \mathbb{R} \text{ fortgesetzt werden.}}$$

Das bedeutet $\nexists\, \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften

- $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$
- $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{R}$

Denn angenommen es gäbe so ein $\tilde{f}$ so müsste wegen 1.26 $\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x)$ existieren (und gleich $\tilde{f}(0)$ sein). Dieser Limes existiert aber nicht, da [vgl. 1.25 (ii)] es Nullfolgen (x_n), (y_n) in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) \overset{x_n \neq 0}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \quad \text{aber}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(y_n) \overset{y_n \neq 0}{=} \lim_{n} f(y_n) = -\infty.$$

[Siehe auch weitere [UE]-Aufgaben dazu]

§2 SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

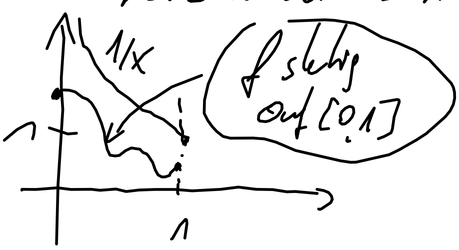
Nach den eher praktischen Ausführungen (zum Schluss) des §1 lernen wir nun die wesentlichen theoretischen Aussagen über stetige Funktionen (auf abg. beschr. Intervallen) kennen

- den Zwischenwertsatz
- die Annahme von Minimum & Maximum
- die gleichmäßige Stetigkeit
- Umkehrsatz f. stetige, streng mon. Fkt.

2.1. MOTIVATION (Die Sonderrolle abg. beschr. Intervalle)

Bisher haben wir stetige Fkt auf beliebigen TM $D \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den abgeschlossenen & beschränkten Intervallen $[a,b]$ eine Sonderrolle zukommt; solche Intervalle heißen auch KOMPAKT.

Ein einfacher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Fkt auf $[0,1]$ im Gegensatz zu solchen auf $(0,1)$ betrachten: Etwa nimmt $f(x) = 1/x$ auf $(0,1)$ beliebig große pos Werte an [1.25(iii)]. Für eine stetige Fkt auf $[0,1]$ ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar und wir werden zeigen, dass tatsächlich

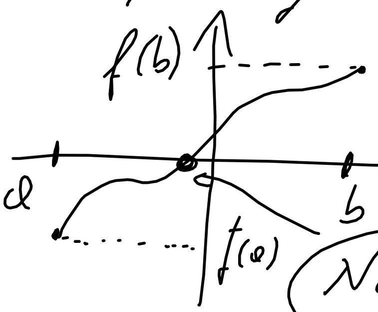


jede stetige Fkt auf $[0,1]$ nur beschränkte Werte annehmen kann

beschränkte Fkt

Wir beginnen mit einer anschaulich klaren Aussage, die aber – wieder einmal – essentiell die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet.

2.2 MOTIVATION (Der Zwischenwertsatz) Wir betrachten ein stetiges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(a)<0$ und $f(b)>0$. Es scheint dann klar zu sein, dass f eine Nullstelle haben muß. Tatsächlich ist das auf $\mathbb{R}$ richtig – wie wir gleich sehen werden – aber etwa auf $\mathbb{Q}$ falsch, denn

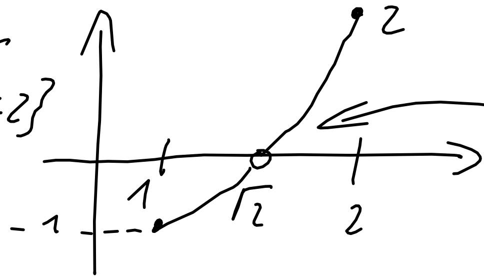


Nullstelle

mit $D=\{p\in\mathbb{Q}: 1\le p\le 2\}$

$f(x)=x^2-2$

$f(1)=-1,\ f(2)=2$



Nullstelle wäre $x_0=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\supseteq D$

2.3 THM (Zwischenwertsatz)

Ein Hauptresultat der VO

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0,\ f(b)>0$ (bzw. $f(a)>0,\ f(b)<0$).
Dann $\exists x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=0$

d.h. f hat eine Nullstelle in D

Vor dem Beweis ein Bsp einer Anwendung

2.4 KOR (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad)

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mind. eine reelle Nullstelle.

Beweis. Sei $p(x)=b_{2n+1}x^{2n+1}+\dots+b_0$ mit $b_{2n+1}\neq 0$. Klarerweise können wir schreiben

$$p(x)=b_{2n+1}\left(x^{2n+1}+\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}}x^{2n}+\dots+\frac{b_0}{b_{2n+1}}\right)=:b_{2n+1}q(x)$$

und q ist von der Form

$$q(x)=x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\dots+a_1x+a_0\quad\left(a_j=b_j/b_{2n+1}\ \ j=0,\dots,2n\right)$$

und damit wie p in 1.25(iii)

$$\overset{1.25(iii)}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\infty}p(x)=\infty\Longrightarrow\exists x_+>0 \text{ mit } q(x_+)>0$$

Andererseits gilt

$$q(-x) = -x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} - \dots = -\left(x^{2n+1} - a_{2n} x^{2n} + \dots - a_0\right)$$

$$\overset{1.25(iii)}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} q(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_- < 0 \text{ mit } q(x_-) < 0$$

$q|_{[x_-,x_+]} : [x_-, x_+] \to \mathbb{R}$ ist stetig

die Einschränkung von q auf $[x_-, x_+]$ – Vergiß den Rest außerhalb von $[x_-, x_+]$

$$\overset{\text{Thm 2.3}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$$

$$\Longrightarrow p(x_0) = 0 \quad . \quad \square$$

Beweis des ZWS. Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0 < f(b)$. Wir benutzen die Intervallschachtelung [1] 3.34 um mittels Intervallhalbierung eine Nullstelle x_0 „zu fangen".

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von abg. Intervallen $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit den Eigenschaften

(a) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$ — Schachtelung d. Intervalle

(b) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ — Intervalllänge in jedem Schritt halbiert

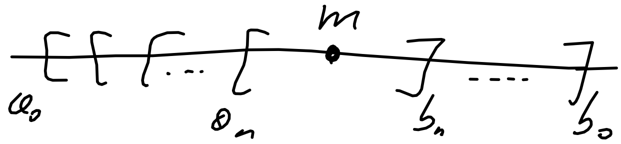
(c) $f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$ — „Fangen" des NS

Induktionsanfang: $n = 0$: setze $a_0 = a$, $b_0 = b$, dann sind (a)–(c) offensichtlich erfüllt

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$: Angenommen wir haben $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$ bereits konstruiert, sodass (a)–(c) gelten. Wir müssen a_{n+1}, b_{n+1} finden, sodass (a)–(c) auch für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gelten.

Wir setzen $m = \frac{b_n - a_n}{2}$ ← Intervallhalbierung

und machen eine Fallunterscheidung:



Ist $f(m) \geq 0$ dann setze $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$ — NST links von m

Ist $f(m) < 0$ dann setze $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$ — NST rechts von m

Offensichtlich gelten (a)-(c) für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip [$\boxed{1}$ 3.34] impliziert

$$\exists! \, x_0 \in \bigcap_{n\geq 0} [a_n, b_n] \text{ und } x_0 \in [a,b] \text{ mit } \lim a_n = x_0 = \lim b_n$$

(3) Weil f stetig auf $[a,b]$ ist gilt mit 1.12

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

(4) Aus der Eigenschaft (c) in (1) folgt mit $\boxed{1}$ 2.28

$$f(x_0) = \lim f(a_n) \underset{\boxed{1}\,2.28}{\leq} 0 \leq \lim f(b_n) = f(x_0)$$

Damit also $f(x_0) = 0$ und wir haben eine NST gefunden ∎

2.5 KOR (Zwischenwertsatz)

Manchmal wird 2.4 als Nullstellensatz bezeichnet und nur 2.5 als ZWS

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und liegt $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ [d.h. $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$].

Dann $\exists \, x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$

Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen

(Um c verschobener Graph)

Beweis. Wende 2.3 auf $g(x) := f(x) - c$ an. [Genauer: OBdA gelte $f(a) < c < f(b)$ [falls auch nur einmal $\leq$ statt $<$ ist nichts zu zeigen denn $x_0 = a$ oder $x_0 = b$; falls $\geq$ statt $<$ gilt verläuft der Beweis völlig analog.]
Setze $g(x) = f(x) - c$, dann ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und
$g(a) < 0 < g(b) \overset{2.3}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [a,b] : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$]. □

2.6 Kor (Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (nichtleeres, möglicherweise unbeschränktes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall oder enthält nur einen Punkt

auf Folie vorgetragen

Beweis. (1) Sei $A := \inf(f(I))$, $B := \sup(f(I))$, wobei $A = -\infty$, falls $f(I)$ nicht n.u.b und $B = \infty$, falls $f(I)$ nicht n.o.b.
Falls $A = B$ enthält $f(I)$ nur einen Punkt und wir sind fertig. Sei also $A < B$

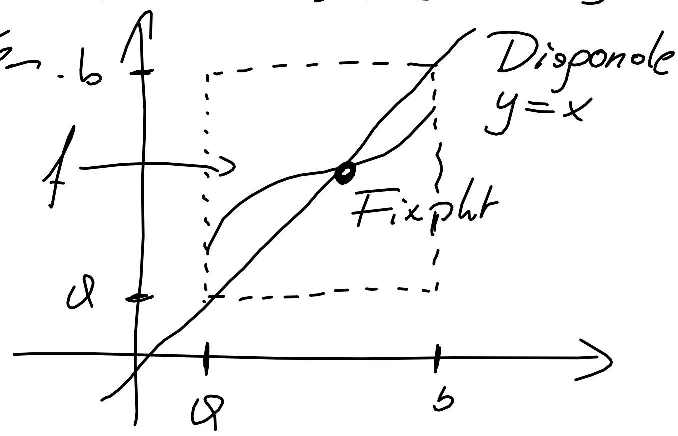
(2) $(A,B) \subseteq f(I)$, denn sei $y \in (A,B)$ dann $\exists r, s \in I$ mit $f(r) < y < f(s)$ [A, B sind inf, sup]
OBdA können wir annehmen, dass $r < s$ [$r = s$ ist nicht möglich und $r > s$ ist analog zu behandeln]
$\overset{2.5}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [r,s] \subseteq I$ mit $f(x_0) = y \Rightarrow y \in f(I)$

(3) Also gilt $(A,B) \subseteq f(I) \subseteq [A,B]$ (bzw $(-\infty, B]$ oder $[A, \infty)$)
Daher ist $f(I)$ eines der Intervalle
$(A,B), [A,B), (A,B], [A,B]$ (bzw $(-\infty, B), (-\infty, B]$ oder $(A, \infty), [A, \infty)$). □

2.7 KOR (Fixpunktsatz) Sei $f:[a,b]\to[a,b]$ eine stetige Fkt. Dann besitzt f einen <u>Fixpunkt</u>, d.h. $\exists x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=x_0$

2.8 BEM (zum Fixpktsatz)

(i) Die Aussage von 2.7 kann am Quadrat $[a,b]\times[a,b]$ in $\mathbb{R}^2$ veranschaulicht werden. Der Graph von f beginnt bei $x=a$ also an der linken Kante des Quadrats und endet bei $x=b$ an der rechten Kante; daher <u>muß</u> er die Diagonale schneiden & dort gilt dann $f(x_0)=x_0$.



NICHT VORGETRAGEN

(ii) <u>Wozu das Ganze?</u> Fixpunktsätze dienen ganz allgemein dazu Lösungen von Gleichungen zu finden (im Sinne von: die Existenz einer Lsg zu beweisen vor allem in dem Fall, dass man die Gleichung nicht explizit lösen kann!) – Und das ist einer der roten Fäden der Analysis: <u>Existenzmaschinen</u>)

findet NST

In diesem Sinne ist schon Thm 2.3 die Existenzmaschine und die Korollare 2.6, 2.7 Varianten davon.

[Wenig überraschend spielt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wiedereinmal die zentrale Rolle vgl. 2.2.]

Inwiefern ist nun insbesondere 2.7 nützlich?
Oft kann man das Lösen einer Gleichung z.B. $p(x)=0$

gewinnbringend in ein Fixpunktproblem verwandeln, etwa $f(x) = g(x) - a + x$; Dann gilt nämlich für einen Fixpkt x_0 von f $g(x_0) = f(x_0) - x_0 + a = a$.

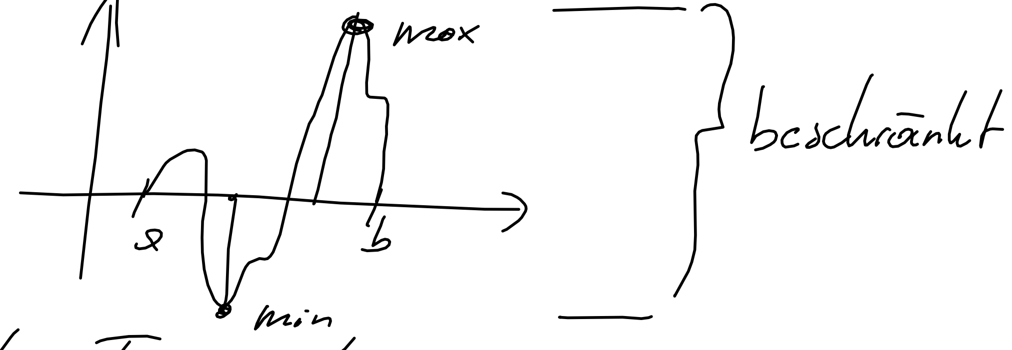
(iii) Die Tatsache, dass 2.7 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.3 ist sieht man auch daran, dass ein Kippen der Skizze in (i) um 90° genau die Skizze in 2.2 liefert.

Beweis (Fixpktsatz). Wende 2.3 auf die Fkt $g(x) = f(x) - x$ an. [UE] $\square$

2.9. MOTIVATION (Annahme von Max & Min)

Der ZwS lehrt uns, dass eine stetige Fkt auf dem kp Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt also der Graph von f keine Lücken lässt.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph auch nicht beliebig große oder kleine Werte beinhalten kann und außerdem $f([a,b])$ ein Max und ein Min hat, also:



Zunächst etwas Terminologie

2.10 DEF (Beschränkte Fkt)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Falls das Bild $f(D)$ von f beschränkt ist, d.h.

$$\exists M > 0 \ \forall x \in D \ |f(x)| \leq M,$$

dann heißt f **beschränkt**.

2.11 THM (Stetige Fkt nehmen auf kp Intervallen Max & Min an.)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h.

$$\exists x_1 \in [a,b] \quad f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = \min f[a,b] \quad = \inf f[a,b]$$

$$\exists x_2 \in [a,b] \quad f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = \max f[a,b] \quad = \sup f[a,b]$$

natürlich auch

2.12 WARNUNG ([a,b] beschr & abg !)

(i) Es ist essentiell, dass das Intervall in 2.11 auf dem f stetig ist abg und beschränkt ist. Sonst muß f nicht beschränkt sein...

$f_1 : (0,1] \to \mathbb{R}$
$f(x) = 1/x$
Intervall nicht abg, f nicht n.o.b.

$f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$
Intervall unbeschränkt
f nicht n.o.b.

und auch weder Min noch Max annehmen:

$f_3 : (0,1) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$ ist zwar beschränkt hat aber weder Max noch Min

(ii) x_1, x_2 aber müssen keinesfalls eindeutig sein, z.B. wenn f konstant ist.

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. Wir beweisen nur, dass f nach oben beschränkt ist ($\exists M : f(x) \leq M \; \forall x$) und das Max angenommen wird. Der Beweis für n.u.b und Min ist analog (bzw kann durch Übergang zu $-f$ gezeigt werden)

auf Folie vorgelegen

(1) Sei $A := \sup f[a,b]$ (Es gilt $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

$\Longrightarrow \exists$ Folge (a_n) in $[a,b]$ mit $f(a_n) \to A$ $(n \to \infty)$

[Def sup]

(2) $a_n \in [a,b] \Rightarrow a_n$ beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ konvergente TF $(a_{n_k})_k$

Setze $x_2 := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$

[1] 2.28

Wegen $a \le a_{n_k} \le b \Rightarrow a \le \lim a_{n_k} = x_2 \le b$

also $x_2 \in [a,b]$

(3) f stetig $\Longrightarrow$

$$f(x_2) = f(\lim_{k\to\infty} a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[a,b]$$

Also ist f durch $f(x_2) = \sup f[a,b]$ n.o.b und das Sup wird in x_2 angenommen, also ist $f(x_2) = \max f[a,b]$.

$\square$

2.13 MOTIVIERENDES BSP (Die Abhängigkeit δ's von x_0)

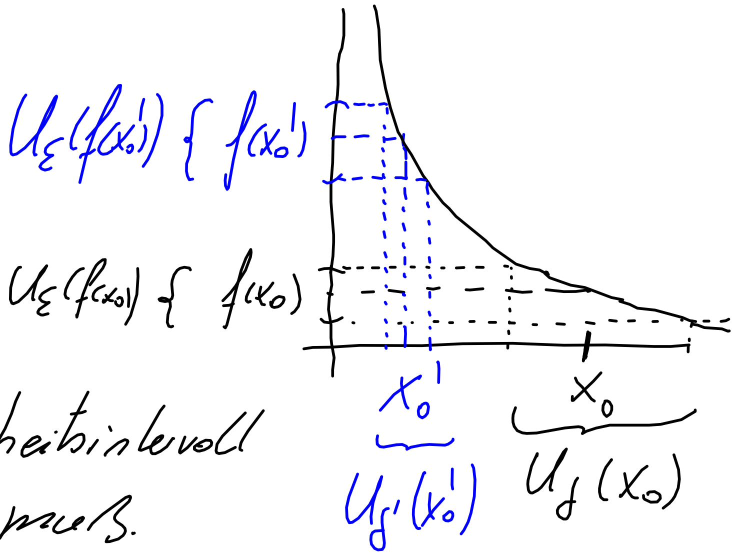
Ist eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ auf ganz D stetig so gilt nach (1.1)

$$\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass δ i.a. nicht nur (und klarerweise vgl. 1.7(ii)) von ε abhängt, sondern auch von x_0. Diese Abhängigkeit wollen wir nun in einem Bsp explizit machen.

Sei dann $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1/x$

Nun fixieren wir $\varepsilon > 0$.
Dann ist anschaulich klar, dass für ein x_0 näher bei 0 das entsprechende Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ kleiner gewählt werden muß.



[Rechnerisch: Wir brauchen nur jeweils $x < x_0$ zu betrachten, da dort der Anstieg steiler und δ potentiell kleiner wird.
Setze also $x_\delta = x_0 - \delta$ und betrachte

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_\delta}{x_\delta x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)}$$

Soll nun $|f(x_\delta) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x_0 - x| < \delta$ sein, so muß gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)} < \varepsilon \iff \varepsilon x_0^2 - \varepsilon x_0 \delta > \delta$$
$$\iff \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

Also $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$ und das bedeutet, dass bei kleinerem x_0 auch δ kleiner werden muß.]

Wenn wir nun für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ fordern, dass δ unabhängig vom Pkt $x_0 \in D$ sein soll, so erhalten wir eine stärkere Stetigkeitseigenschaft: Für je 2 Pkte $x, x' \in D$ soll wenn sie nur δ-nahe beieinander liegen (d.h. $|x - x'| < \delta$) — und zwar egal wo die beiden liegen — schon die Abschätzung $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gelten. Offiziell:

2.14 DEF (Gleichmäßige Stetigkeit) Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Achtung: wiedereinmal Reihenfolge der Quantoren

2.15 BEM (Stetigkeit vs. glm Stetigkeit)

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für $f: D \to \mathbb{R}$

$$f \text{ glm. stetig} \implies f \text{ stetig auf } D$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.13 zeigt, also

$$f \text{ glm stetig} \not\Longleftarrow f \text{ stetig in } D$$

[Ganz explizit: $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Falls $x_n = \frac{1}{n}$ und $x_n' = 1/2n$ $(n \geq 1)$ dann gilt

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{aber}$$

der Abstand der Pkte x_n, x_n' geht gegen 0 wenn die Pkte nach links rutschen

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 2n - n = n$$

ist unbeschränkt und daher sicher nicht unterhalb einer fixen ε-Toleranz.]

(iii) Essentiell am Gegenbsp ist, dass $D = (0,1]$ also bei 0 offenes Intervall ist. [Für jedes Intervall der Form $[\eta, 1]$ mit $0 < \eta < 1$ kann obiger Effekt nicht auftreten, denn $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$ könnten nie kleiner als η werden. Und tatsächlich sind auf abg. & beschr. Intervallen beide Begriffe äquivalent, wie das nächste Thm lehrt:]

ETA

noch links ausweichen ist unmöglich

2.16 THM (Glm Stetigkeit auf kp Intervallen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch glm. stetig (auf $[a,b]$).

auf Folie vorgelegen

<u>Beweis</u>. (1) Indir. ang. f ist nicht glm. stetig

$$\Longrightarrow \neg \left(\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall \underset{|x-x'|<\delta}{x,x' \in [a,b]} \Longrightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon \right)$$

$$= \exists \varepsilon>0 \; \forall \delta>0 \; \exists \underset{|x-x'|<\delta}{x,x' \in [a,b]} \text{ und } |f(x)-f(x')| \geq \varepsilon$$

(2) Wir fixieren dieses ε und konstruieren Folgen (x_n), (x_n') indem wir sukzessive $\delta = 1/n$ $(n \geq 1)$ setzen. [vgl. Beweis 1.12 „$\Leftarrow$"] So erhalten wir

(*) $(x_n), (x_n')$ in $[a,b]$ mit $|x_n - x_n'| < 1/n$ aber $|f(x_n)-f(x_n')| \geq \varepsilon$

(3) (x_n) ist beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstr.}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ konvergente TF $(x_{n_k})_k$

Setze $\tilde{x} := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$ [+]

n_k sind die Indizes der TF $(x_{n_k})_k$ von x_n

(4) Die TF $(x'_{n_k})_k$ von (x_n') konvergiert auch gegen $\tilde{x}$, denn

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| \overset{(*)}{\leq} 1/n_k \longrightarrow 0$$

(5) Die Stetigkeit von f in $\tilde{x}$ liefert einen Widerspruch:

$$0 < \varepsilon \overset{(*)}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \longrightarrow 0 \quad ↯$$

(4) + 1.12

[+] $\tilde{x} \in [a,b]$ wegen [1] 2.29; genauer
$x_n \in [a,b] \; \forall n \Rightarrow a \leq x_n \leq b$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$a \quad x_0 \quad b$

]

2.17 MOTIVATION (Stetige inverse Fkt) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f: A \to B$ bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: B \to A$, $f(x) \mapsto x$ [ETIA, 4.3.29].

Die analoge Lineare Algebra Situation: $f: V \to W$ linear & bij $\Rightarrow f^{-1}: W \to V$ linear

Falls f stetig ist, folgt dann auch f^{-1} stetig?
Im allgemeinen NEIN! Für ein Gegenbsp. siehe [UE]

Durch zwei zusätzliche Annahmen an f können wir aber ein JA erreichen, nämlich

(1) f streng monoton [d.h $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$]
wachsend / fallend
Bemerke: str. monoton $\Rightarrow$ injektiv

(2) A ist ein Intervall

2.18 Thm (Umkehrsatz f str-mon & stetige Fkt)

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig & streng mon. wachsend [fallend]
Dann gilt (i) $J := f(I)$ ist ein Intervall
(ii) $f: I \to J$ ist bijektiv
(iii) $f^{-1}: J \to I$ ist stetig & streng mon wachsend [fallend]

NICHT VORGETRAGEN

2.19 BEM (zur Notation) Ganz streng genommen müssten wir für die Abb f mit eingeschränktem Zielbereich $f(I)$ eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B

$$\tilde{f}: I \to J := f(I)$$
$$x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müssten wir dann $\tilde{f}^{-1}$ schreiben. Gemäß einem allg. üblichen Mißbrauch der Notation schreiben wir aber wiederum f und f^{-1} [vgl ETIA, 2.Aufl. gr. Box ? -]

Beweis von 2.18. Wir beweisen nur den Fall „streng monoton wachsend“. Der fallende Fall ergibt sich, wenn man f durch $-f$ ersetzt.

auf Folie vorgek.

Jede Abb ist surj. auf ihr Bild

(i) Kor 2.6 $\Longrightarrow$ $f(I) =: J$ ist ein Intervall
[der Fall einpunktig ist wegen der str. Monotonie unmöglich]

(ii) f str. mon wachsend $\Rightarrow$ f injektiv und daher $f: I \to J$ bijektiv

(iii) $f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$ [$=$ widerspricht Injektivität, $x > y$ der Mon.]
$\Longrightarrow$ f^{-1} streng mon wachsend

| Bleibt ?? f^{-1} stetig

Fall 1: b ist kein Randpunkt von J

Sei $a := f^{-1}(b) \Longrightarrow a$ ist kein Randpunkt von I
[sonst wäre wegen der str. Monotonie b ein Randpkt von J]

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ sodass $a-\varepsilon, a+\varepsilon \in I$

$f \xRightarrow[\text{mon}]{\text{str.}} f(a-\varepsilon) < f(a) = b < f(a+\varepsilon)$

Also $\exists \delta > 0$ mit $f(a-\varepsilon) < b - \delta < b + \delta < f(a+\varepsilon)$.

Das bedeutet aber $f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b))$

und damit ist f^{-1} stetig in b [vgl 1.7(i)]

Fall 2: b ist linker Randpkt von $J \xRightarrow{\text{Mon}} a = f^{-1}(b)$ ist linker Randpkt von I und wir können den Beweis wie in Fall 1 führen aber mit „einseitigen Umgebungen“ $U_\delta(b) \cap J$, $U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$ und $f(a) = b < b+\delta < f(a+\varepsilon)$

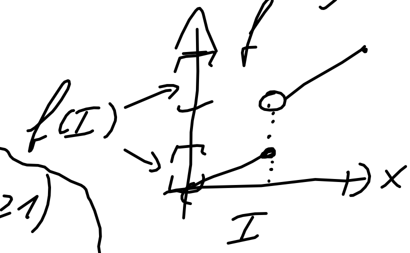
Fall 3 b ist rechter Randpkt von J: völlig analog zu Fall 2 $\square$

2.20 BEM (Umkehrsatz f. str. mon Fkt)

Folie → Im Beweis von 2.18 haben wir die Stetigkeit von f nur in (ii) verwendet. Daher gilt folgende Variante des Thms:

I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton (nicht notwendiger Weise stetig)
$\Longrightarrow f^{-1}: f(I) \to I$ stetig & str. mon

Falls f unstetig ist, dann ist i.a. $f(I)$ aber kein Intervall, z.B.



2.21 BSP (Stetigkeit der Wurzel)

Folie → Als Anwendung von Thm 2.18 betrachten wir ($k \geq 1$)

$$f_{2k}: [0,\infty) \to [0,\infty), \quad x \mapsto x^{2k} \qquad f_{2k+1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{2k+1}$$

Beide Fkt sind auf einem Intervall definiert [$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$] stetig [1.18] streng mon. wachsend und bijektiv [auf $[0,\infty)$ bzw $\mathbb{R}$]

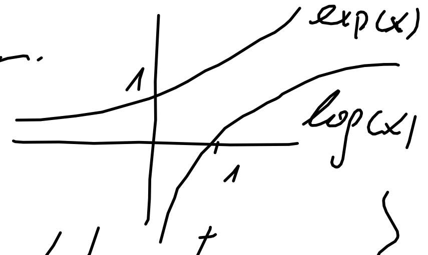
$$\overset{2.18}{\Longrightarrow} \quad f_{2k}^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty) \qquad f_{2k+1}^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sind stetig & streng mon wachsend

Klarerweise sind f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1} gerade die Wurzelfunktionen $\sqrt[2k]{}$ bzw $\sqrt[2k+1]{}$ [vgl. $\boxed{0}$ 1.11(iii)].

§3 ELEMENTARE TRANSZENDENTE FUNKTIONEN

3.1 EINLEITUNG. In diesem § definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir allgemeine Potenzen x^α $(0<x, \alpha\in\mathbb{R})$ definieren.
Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$ – gerade soweit, dass wir die komplexe Exponentialfunktion $[\exp(z),\ z\in\mathbb{C}]$ analog zu $\mathbb{R}$ über die Reihendarstellung definieren können. Diese verwenden wir, um die Winkelfunktionen Sinus & Cosinus zu definieren. Deren Grundeigenschaften studieren wir gründlich, um schließlich die Tangensfunktion und die Arcus-Funktionen betrachten zu können.



3.2 PROP & DEF (Logarithmus)

(i) Die Exponentialfkt $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und $\exp(\mathbb{R})=(0,\infty)$.

(ii) Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$$

d.h. $\exp(x)=a \iff x=\log(a)$

und nennen sie den (natürlichen) Logarithmus. log ist stetig und streng mon. wachsend.

(iii) Die Logarithmusfkt erfüllt die folgende Funktionalgleichung $(x,y\in(0,\infty))$

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

Beweis. (i) exp ist stetig nach 1.8(iii). Wir zeigen die Monotonie.

Sei $\xi > 0$, dann gilt

[xi]

$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 1 + \xi. \qquad (*)$$

Sei nun $x_1 < x_2$ und setze $\xi = x_2 - x_1 > 0$, dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \overset{[1]\,(4.2)}{=} \exp(x_1)\exp(\xi) \overset{(*)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist exp streng mon wachsend.

Wir zeigen $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$:

[1] 4.40(i) $\Rightarrow \exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \to \exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$.

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es z.z.

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$, $(**)$

denn dann werden wegen des ZWS 2.3 alle Werte in $(0, \infty)$ angenommen. [genauer sei $y \in (0,\infty) \overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-n) < y < \exp(n) \overset{ZWS}{\Longrightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$]

Die Grenzwerte in $(**)$ sind aber leicht zu kriegen:

$n \in \mathbb{N} \overset{[1]\,4.40(iii)}{\Longrightarrow} \exp(n) = e^n$

[1] 4.43 $\Rightarrow e > 2 > 1 \overset{[1]\,1.5(ii)}{\Longrightarrow} e^n \to \infty \ (n \to \infty)$

und schließlich

$$\exp(-n) \overset{[1]\,4.40(ii)}{=} \frac{1}{\exp(n)} \overset{[1]\,4.40(iii)}{=} \frac{1}{e^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(ii) Mit (i) besagt nun 2.18:

$\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist bijektiv und $\exp^{-1}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig & str. mon. wachsend

(iii) [Die Funktionalgl. für log folgt aus der für exp. [etc]]

Seien $x, y \in (0,\infty)$; setze $\xi := \log x$, $\eta := \log(y)$

$$\xrightarrow{[1]\, 4.39} \exp(\xi+\eta) = \exp(\xi)\cdot\exp(\eta) = x\cdot y$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\log(xy)} = \xi+\eta = \underline{\log(x)+\log(y)}. \qquad \square$$

3.3 BEM (Logarithmen von Potenzen)

Als unmittelbare Konsequenz von 3.2(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k\log(x) \qquad (0<x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}).$$

3.4 MOTIVATION (allg. Potenzen)

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalem Exponenten definiert, d.h. x^q für $\mathbb{R}\ni x>0$, $q\in\mathbb{Q}$.

Genauer haben wir folgende Definitionen

- $x^n := x\cdot\ldots\cdot x \qquad (n\in\mathbb{N})$
- $x^{-n} := 1/x^n \qquad (n\in\mathbb{N})$
- $x^{1/n} := \sqrt[n]{x} \qquad (n\in\mathbb{N})$ [vgl. [0] 1.11(iii)]

und damit für $\mathbb{Q}\ni q = m/n$

$$\boxed{x^q := \sqrt[n]{x^m}}$$

Wir werden nun die allg. Potenz, also x^α $(x>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$ definieren also x^q $(q\in\mathbb{Q})$ zu x^α $(\alpha\in\mathbb{R})$ verallgemeinern.

Als Leitfaden benutzen wir folgende Eigenschaft von x^n

$$x^n = \exp(\log(x^n)) \overset{3.3}{=} \exp(n\log(x)).$$

3.5 DEF (Allg. Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfkt)

(i) Sei $x>0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren die allg Potenz als

$$\boxed{x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))}$$

(ii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die allg Potenzfunktion

$$\omega_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha \left(= \exp(\alpha \log(x))\right)$$

(iii) Die Exponentialfkt mit Basis $a \in (0,\infty)$ definieren wir als

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x \left(= \exp(x \log(a))\right)$$

3.6 BEM (zur allg Potenz- & Exp-Fkt)

(i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 3.5(i) ist ($x>0, \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)} \quad \left[\log(x^\alpha) = \cancel{\log \circ \exp}(\alpha \log x)\right]$$

also eine Verallgemeinerung von 3.3 von $k \in \mathbb{N}$ zu $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Bemerke, dass $\boxed{\exp(x) = \exp_e(x) = e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$ gilt, denn

$$e \overset{[1] 4.37}{:=} \exp(1) \overset{3.2(iii)}{\Longrightarrow} \log(e) = 1 \Rightarrow e^x \overset{3.5(iii)}{=} \exp(x \log e) = \exp(x).$$

(iii) Als nächstes fassen wir die Grundeigenschaften von allg. Potenz- & Exp-Fkt in einer Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den jeweiligen Definitionen [siehe tw auch [UE]]

Ab jetzt können wir e^x statt $\exp(x)$ schreiben

3.7 Prop (Die allg. Exp-Fkt) Sei $\mathbb{R} \ni a > 0$.

Die allg Exp-Fkt $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (auf ganz $\mathbb{R}$) und es gilt:

(i) Falls $a > 1$, dann ist $\exp_a$ str. mon wachsend.
Falls $a < 1$, dann ist $\exp_a$ str. mon fallend

(ii) Es gilt die Funktionalgl. $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}$

Konsistent mit natürlichen Potenzen

mit rationalen Potenzen

(iv) Für $p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \ni q \geq 1$ gilt $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{1/q}$.

(v) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\left(a^x\right)^y = a^{xy} = \left(a^y\right)^x$.

(vi) Für alle $b > 0, x \in \mathbb{R}$ gilt $a^x b^x = (ab)^x$

(vii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

3.8 BSP (Nützliche Grenzwerte)

exp wächst stärker als jede Potenz

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty}$

OBdA $x > 0$, dann gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \quad (x \to \infty)$

Und daraus folgt sofort [1] Prop 2.47(i)]

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0}$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^k e^{1/x} = \infty}$,

denn setze $y = 1/x$,
dann gilt $\lim_{x \searrow 0} x^k e^{1/x} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y^k} \overset{(i)}{=} \infty$

(iv) $\boxed{\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty}$,

denn wegen Prop 3.7(ii) ist $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv und str. mon wachsend.

(v) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \text{ und } \lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty}$

Wieder wegen [1] Prop. 2.47 folgt die 2. Aussage aus der 1.
Um diese zu beweisen schreiben wir $x = e^{-y/\alpha}$ (d.h. $y = -\alpha \log(x)$) und rechnen

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = \lim_{y \to \infty} e^{-y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} \underset{[1]\ 2.47}{=} 0 .$$

(vi) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0}$

log wächst schwächer als jede Potenz

OBdA $x > 0$ und mit $x^\alpha = e^y$
(d.h. $y = \alpha \log(x)$) erhalten wir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^y} \overset{(ii)}{=} 0$$

x^α geht stärker gegen 0 als log gegen $-\infty$

(vii) Für $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0}$,

$$0 = \log(1) = \log\left(x \tfrac{1}{x}\right) = \log(x) + \log(1/x) \Rightarrow \log(x) = -\log(1/x)$$

denn setze $x = 1/y$ dann gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} \overset{(vi)}{=} 0$$

(viii) $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus [1] Prop. 4.42 für $N=1$:

$$|e^x-1-x| = |R_2(x)| \leq 2\frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{für } 0<|x|<3/2$$

und daher $\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| = \frac{|e^x-1-x|}{|x|} \leq |x| \to 0$ $(x\to 0)$.

3.9 Motivation (Die komplexe Exp-Fkt – Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$)

Wir wollen nun die Expfkt nicht nur $\forall x \in \mathbb{R}$ sondern sogar $\forall z \in \mathbb{C}$ definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen [vgl. [1] Bem 4.36]. Um deren (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von exp heranziehen zu können, müssen wir diese Begriffe in $\mathbb{C}$ definieren.

Eine Betrachtung der resp. Begriffe in $\mathbb{R}$ zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw die ε-Umgebungen in $\mathbb{R}$ durch ihr Analogon in $\mathbb{C}$ ersetzen müssen.

Daher stellt der folgende Exkurs über die Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$ auch eine Wiederholung derselben in $\mathbb{R}$ dar – wobei wir seine Verallgemeinerungsfähigkeit schamlos ausnutzen werden.

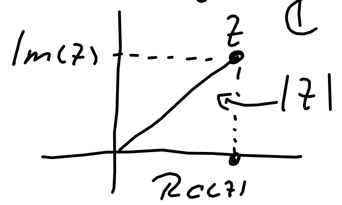
3.10 EXKURS: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$

(A) Wiederholung ($\mathbb{C}$) [vgl [O] 1.4] (von Folie vorgetragen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ und wir verwenden die Schreibweisen

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y), \quad z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

Die komplex Konjugierte $\bar{z}$ ist gegeben durch $\bar{z} = x - iy$ und das Produkt $z\bar{z}$ erfüllt



$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

(B) DEF (Betrag in $\mathbb{C}$). Der (Absolut-) Betrag $|z|$ von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Nach [O] 1.4(iv) identifizieren wir $x \in \mathbb{R}$ mit $x + i0 \in \mathbb{C}$ und daher ist der Betrag von x als reelle Zahl identisch mit dem Betrag von x als komplexe Zahl

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$

(C) Lemma (Grundeigenschaften des Betrags)

Die Abb $|.|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften ($z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

(N1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$ (pos definit)

(N2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (multiplikativ)

(N3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungl.)

wie in $\mathbb{R}$

Weiters gilt

(i) $|\bar{z}| = |z|$

(ii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

Beweis. Sei $z = x+iy$, $z_j = x_j + iy_j$ $(j=1,2)$

(N1) $|z| \geq 0$ und $|0| = 0$ sind klar.

Falls $|z| = 0$, dann $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2 = 0$ und

$$0 \leq y^2 \leq x^2+y^2 = 0 \implies x = 0 = y$$

(N2) $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$

(i) klar per Def.

(ii) $|Re(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2+y^2 = |z|^2$ und ebenso für $Im(z)$

(N3) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = z_1\overline{z_1} + \underbrace{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}_{2Re(z_1\overline{z_2})} + z_2\overline{z_2}$

$= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$

$\overset{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

$\square$

(D) DEF (Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$)

(i) Eine komplexe Folge bzw. eine Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Abb $c: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Analog zum reellen Fall schreiben wir $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Folge und $c_n = c(n)$

(ii) Eine Folge (c_n) konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$, $c_n \to c$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

bzw äquivalent dazu mit der ε-Umgebung von $c \in \mathbb{C}$ definiert als

$$U_\varepsilon(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < \varepsilon\}$$

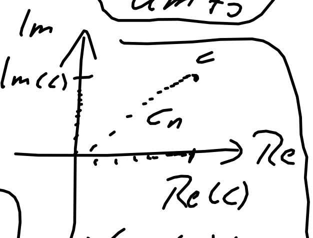
offene Kreisscheibe mit Radius ε um z_0

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad c_n \in U_\varepsilon(c)$$

(E) PROP (Konvergenz in $\mathbb{C}$ ist Konvergenz von Re & Im)

Für eine Folge (c_n) in $\mathbb{C}$ gilt

$$c_n \to c \text{ in } \mathbb{C} \iff \begin{array}{l} Re(c_n) \to Re(c) \\ Im(c_n) \to Im(c) \end{array} \text{ in } \mathbb{R}$$



Nichts Neues nur doppelt soviel Arbeit!

Beweis. Wir setzen $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$ und $a = \mathrm{Re}(c)$, $b = \mathrm{Im}(c)$

„$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \overset{D(iii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |c_n - c| < \varepsilon$

und daher $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| = |\mathrm{Re}(c_n - c)| \overset{C(iii)}{\leq} |c_n - c| < \varepsilon$$

$$|b_n - b| = |\mathrm{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon,$$

also $a_n \to a$, $b_n \to b$

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon/2$, $|b_n - b| < \varepsilon/2$

und daher $\forall n \geq N$

$$|c_n - c| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

also $c_n \to c$ $\square$

(F) KOR (Limes und Komplexkonjugation)

$$\boxed{c_n \to c \Longrightarrow \overline{c_n} \to \overline{c}}$$

Beweis $\overline{\lim c_n} = \overline{\lim(\mathrm{Re}(c_n) + i\,\mathrm{Im}(c_n))} \overset{(E)}{=} \lim \mathrm{Re}(c_n) - i \lim \mathrm{Im}(c_n)$

$= \lim \mathrm{Re}(\overline{c_n}) + i \lim \mathrm{Im}(\overline{c_n}) = \lim \overline{c_n}$ $\square$

(G) KOR (Grenzwertsätze) Seien (c_n), (d_n) konvergente komplexe Folgen und sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt

(i) $\lim(c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$

(ii) $\lim(\lambda c_n) = \lambda \lim c_n$

(iii) $\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$

(iv) $\lim c_n/d_n = (\lim c_n)/(\lim d_n)$ falls $d_n \not\to 0$

Beweis. Aufspalten in Re & Im und reelle Grenzwertsätze

[1] Satz 2.23, Satz 2.26 [Ue] $\square$

(H) THM (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$) Sei (c_n) Folge in $\mathbb{C}$, dann gilt

(c_n) konvergiert $\iff$ (c_n) ist Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N \quad |c_n - c_m| < \varepsilon$$

Beweis: (c_n) konv. $\overset{(E)}{\iff}$ $(\mathrm{Re}(c_n))$ & $(\mathrm{Im}(c_n))$ konv in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{CP für } \mathbb{R}}{\iff}$ $(\mathrm{Re}(c_n))$ & $(\mathrm{Im}(c_n))$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

$\iff$ (c_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

wie im Beweis von (E): „$\Rightarrow$" mit $\varepsilon/2$, „$\Leftarrow$" mit C(ii) $\square$

(I) DEF (Konvergenz komplexer Reihen) Sei (c_n) Folge in $\mathbb{C}$.
Die komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ heißt

(i) konvergent, falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \quad (\text{in } \mathbb{C}) \text{ konvergiert.}$$

(ii) absolut konvergent, falls die reelle (!) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \quad (\text{in } \mathbb{R}) \text{ konvergiert.}$$

(J) PROP (Konvergenztests & Cauchy-Prod. f. komplexe Reihen)
(i) (Majorantenkriterium) Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0 \; \forall n$
(daher $a_n \in \mathbb{R}$!) und sei $\sum a_n$ konvergent.
Ist (c_n) eine komplexe Folge und

$$\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: \; |c_n| \leq a_n,$$

dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent.

(ii) Der Wurzeltest und der Quotiententest gelten wortwörtlich wie für reelle Reihen. Insbesondere sei (c_n) komplexe Folge mit $c_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\exists \Theta \in (0,1) \text{ mit } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \Theta,$$

Theta

dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent.

(iii) Die Proposition zum Cauchy-Produkt f. Reihen [[1] Prop 4.35] gilt wortwörtlich für komplexe Reihen.

Beweis. Inspektion der Beweise im Reellen zeigt, dass sie wortwörtlich gültig bleiben. □

(K) DEF (Stetigkeit in $\mathbb{C}$) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ und sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine Funktion

(i) f heißt stetig in z_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

(ii) f heißt stetig auf D, falls f stetig in jedem $z_0 \in D$ ist.

(L) Bem (zur Stetigkeit)

(i) Die Bedingung in K(i) kann umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0))$$

(ii) (Stetigkeit ist Folgenstetigkeit) Wie in $\mathbb{R}$ kann die Stetigkeit in $\mathbb{C}$ via Folgen charakterisiert werden (selbe Beweis)

$$f \text{ stetig in } z_0 \in D \iff \forall \text{ Folgen } (c_n) \text{ in } D \text{ mit } c_n \to z_0 \text{ gilt } \lim f(c_n) = f(z_0) \left(= f(\lim c_n)\right)$$

3.11. BEM: (komplexe Exponentialreihe) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent, denn

für $z=0$ ist die Aussage trivial und für $z \neq 0$ verwenden wir den Quotiententest 3.10 (J)(ii): für alle n mit $n > 2|z|$ gilt

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Analog zum reelle Fall definieren wir

3.12 DEF (komplexe Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\boxed{\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

3.13 BEM (komplexe und reelle Exp-fkt)
Wenn wir exp aus 3.12 auf $\mathbb{R}$ einschränken, so erhalten wir klarerweise exp aus [1] Def 4.32, daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden; wir haben tatsächlich exp von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ausgedehnt

$$\left[\exp(x+i0) = \sum \frac{(x+i0)^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!}\right]$$

3.14 THM (Eigenschaften von exp) Die Exponentialfkt erfüllt

(i) (Funktionalgleichung) $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(ii) (Fehlerabschätzung)
Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z) \quad \text{mit} \quad |R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

für $|z| \leq 1 + N/2$

(iii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(iv) $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(v) $$\lim_{z \neq 0, z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

(vi) $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig (in jedem $z \in \mathbb{C}$)

Beweis (i), (ii) Wortwörtlich wie in $\mathbb{R}$ [1] Thm 4.39, [1] Prop. 4.42

(iii) folgt aus 3.10(F): Setze $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$, dann gilt

$$\exp(\bar{z}) = \lim s_n(\bar{z}) \overset{\text{endl.}\,\Sigma}{=} \lim \overline{s_n(z)} \overset{3.10(F)}{=} \overline{\lim s_n(z)} = \overline{\exp(z)}$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0$$

(v) Wegen (ii) mit $N=1$ gilt $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \leq 2\frac{|z|^2}{2} = |z|^2 \;\forall |z| \leq \frac{3}{2}$ und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \to 0 \quad (z \to 0)$$

genau wie in 3.8(viii)

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit $N=0$, denn $\forall |z| \leq 1$
$|e^z - 1| = |R_1(z)| \leq 2|z| \to 0 \quad (z \to 0)$ und daher
$\lim_{z \to 0} e^z = 1 = e^0$ und mit 3.10(L)(ii) ist exp stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei $w \in \mathbb{C}$ folgt nun mittels Funktionalgleichung:
Sei (z_n) Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to w$, dann $z_n - w \to 0$ und

$$1 = \exp(0) = \lim_{n \to \infty} (\exp(z_n - w)) \underset{(i)}{=} \left(\lim_{n \to \infty} \exp(z_n) \right) \exp(-w),$$

exp stetig bei 0

genau wie in 1.8(iii) nur anders herum aufgezogen

also (nochmals mit (i)) $\lim_{n \to \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$. $\square$

3.15 MOTIVATION (Winkelfunktionen) Jetzt (endlich!) sind wir in der Lage die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exp-Fkt zu definieren. Sinus & Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht gerade unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den eindeutigen Vorteil innerhalb unseres deduktiven Vorgehens konsistent zu sein und keine undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

Kommt später basierend auf dem Integralbegriff

Wir werden aber nach der Def den Anschluss an unsere Intuition suchen!

3.16 DEF (Sinus & Cosinus) Wir definieren Cosinus & Sinus durch

$$\boxed{\begin{aligned} \cos &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \\ \sin &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \operatorname{Im}(e^{ix}) \end{aligned}}$$

3.17 BEM (Grundeigenschaften von sin & cos)

(i) Wegen $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i\operatorname{Im}(e^{ix})$ erhalten wir die Eulersche Formel

$$\boxed{\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}}$$

Außerdem sind sin & cos stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$ $\overset{3.14(vi)}{\Longrightarrow} e^{ix_n} \to e^{ix} \overset{3.10(c)(ii)}{\Longrightarrow} \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \to \operatorname{Re}(e^{ix})$ und genauso für Im.

(ii) Geometrische Interpretation. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

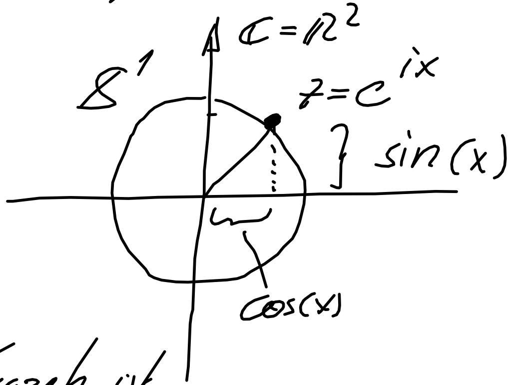
$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1 \quad \text{und daher}$$

$|e^{ix}| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet aber, dass alle komplexen Zahlen der Form e^{ix} mit $x \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

liegen. Darüberhinaus sind $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ genau die Cartesischen Koordinaten von $z = e^{ix}$; insbesondere ergibt sich

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$



(iii) <u>Cosinus ist gerade, Sinus ungerade</u>

[d.h. $\cos(x) = \cos(-x)$, also der Graph ist symmetrisch bzgl der y-Achse und $\sin(-x) = -\sin(x)$ also der Graph ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.]

Tatsächlich gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
Daher folgt aus der Def des Winkelfunktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

und damit

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iv) Es gelten die <u>Additionstheoreme</u>: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Tatsächlich ergeben sich die ersten beiden Formeln als Real- bzw Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Die 3. bzw 4. Gleichung ergibt sich aus der 1. bzw 2. Gleichung mittels der Substitution $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$. □

(v) Reihendarstellung für sin & cos

Die natürlichen Potenzen von i folgen einem einfachen Muster: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ und somit

$$i^n=\begin{cases} 1 & \text{falls } n=4m \text{ für ein } m\in\mathbb{N} \ (\Leftrightarrow n\equiv 0 \bmod (4)) \\ i & \text{falls } n=4m+1 \quad \text{—"—} \quad (\Leftrightarrow n\equiv 1\ (4)) \\ -1 & \text{falls } n=4m+2 \quad \text{—"—} \quad (\Leftrightarrow n\equiv 2\ (4)) \\ -i & \text{falls } n=4m+3 \quad (\Leftrightarrow n\equiv 3\ (4)) \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\cos(x)+i\sin(x)\overset{(i)}{=}e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$$

$$=\left(1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\dots\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}}_{\operatorname{Re}(e^{ix})}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\operatorname{Im}(e^{ix})}$$

und daher

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}, \quad \sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

d.h.
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

(vi) Verhalten nahe $x=0$

Für kleine x ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung x^2 oder höher

$$\cos x \approx 1 \qquad \sin x \approx x \qquad (|x| \text{ klein})$$

Tatsächlich gelten die folgenden Grenzwerte für $x \to 0$:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Denn zunächst folgt aus 3.14 (v)

$$1 = 1 + i\,0 \overset{3.14(v)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} \underset{3.10(E)}{=} \lim_{x\to 0} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) + i \lim \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \quad (*)$$

und daher

$$\frac{\cos(x)-1}{x} \underset{\frac{1}{i}=-i}{=} -\operatorname{Im}\left(\frac{\cos(x)-1+i\sin(x)}{ix}\right) \overset{(i)}{=} -\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \overset{(*)}{\longrightarrow} 0 \quad (x\to 0)$$

sowie

$$\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(x)-1+i\sin(x)}{ix}\right) \overset{(i)}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\right) \overset{(*)}{\longrightarrow} 1 \quad (x\to 0)$$

3.18 MOTIVATION (π)

Wie schon den Winkelfunktionen werden wir uns der Kreiszahl π auf etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Weg nähern. Wir werden π als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von $\cos$ auf $[0,2]$ definieren – erst später werden wir mittels des Integralbegriffs sehen, dass π der halbe Umfang des Einheitskreis ist.

ob hier Vortrag auf Folie

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten

3.19 Lemma (Technisches zu sin & cos)

(i) $\cos(0)=1$ und $\cos(2)\leq -1/3$

(ii) $\sin(x)>0 \quad \forall\, 0<x\leq 2$

(iii) $\cos(x)$ ist streng mon. fallend auf $[0,2]$

Beweis:

(i) $\cos(0)=\mathrm{Re}(e^{i0})=1$. Um $\cos(2)$ abzuschätzen verwenden wir die Reihendarstellung aus 3.17(v):

$$\underline{\cos(2)} \overset{3.17(v)}{=} \underbrace{1-\frac{2^2}{2!}}_{} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

1. Term herausgeschoben

$$= -1 + \frac{2^4}{4!}\underbrace{\Big(1 - \underbrace{\frac{2^2}{5\cdot 6}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{2^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}}_{\leq \frac{2^2}{5\cdot 6}} - \dots \Big)}_{\leq 1} \quad \text{usw}$$

vgl. Bew Leibniz-Kriterium & Bem 4.12(ii) [nicht vorgetragen]

$$\leq -1 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = \underline{-1/3}$$

(ii) Wir verwenden wieder 3.17(v). Sei $0<x\leq 2$, dann gilt

$$\underline{\sin(x)} = x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!}\underbrace{\Big(1 - \underbrace{\frac{x^2}{4\cdot 5}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{x^4}{4\cdot5\cdot6\cdot7}}_{\leq x^2/4\cdot 5} - \dots\Big)}_{\leq 1} \quad \text{usw}$$

$$\frac{x^3}{3!} \leq x\frac{x^2}{6} \overset{x\leq 2}{\leq} x\frac{4}{6} = \frac{2x}{3}$$

$$\geq x - \frac{x^3}{3!} \geq x - \frac{2x}{3} = x/3 \;\underline{>0}$$

(iii) Sei $\underline{0 \leq x_1 < x_2 \leq 2} \Rightarrow 0 < \frac{x_1+x_2}{2} \leq 2$ (*)

$0 < \frac{x_2-x_1}{2} \leq 2$ und daher

$$\underline{\cos(x_2)-\cos(x_1)} \overset{3.17(iv)}{=} -2 \underbrace{\sin\frac{x_2+x_1}{2}}_{\underset{(*)}{\geq} 0} \underbrace{\sin\frac{x_2-x_1}{2}}_{\underset{(*)}{\geq} 0} \underline{< 0}$$

□

3.20 PROP (1. Nullstelle des Cosinus)

$$\exists!\, x_0 \in [0,2] \text{ mit } \cos(x_0)=0$$

Beweis. 3.19(iii) $\Rightarrow$ cos str. mon fallend auf $[0,2]$

$\Rightarrow \cos|_{[0,2]}$ ist injektiv

3.19 (i) $\Rightarrow \cos(0) > 0$, $\cos(2) < 0$

$\overset{ZWS}{\Longrightarrow} \exists\, x_0,\ 0 < x_0 < 2$ mit $\cos(x_0) = 0$

Wegen der Injektivität ist x_0 die einzige NST. □

3.21 DEF (π)

Sei x_0 die eindeutige NST von cos in $[0,2]$ (gemäß 3.20)
Wir definieren die reelle Zahl π als

$$\pi = 2x_0$$

3.22 BEM (Ein bißchen in Richtung Gewohntes)

Mit unserer Def werden einige der obigen Aussagen vertrauter.

(i) Lemma 3.19 (i) und Def 3.21 liefern

$$\cos(x) > 0 \quad \text{für } 0 \leq x < \pi/2, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\cos(x) < 0 \quad \text{für } \pi/2 < x < 2$$

Außerdem gilt $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ (3.19(ii))
und daher

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ und } \boxed{\underline{e^{i\pi/2}} = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} = \underline{i}} \quad (*)$$

(ii) Extrema & Nullstellen f. Sin & Cos

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt mit (*) $e^{ik\pi/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^k \overset{(*)}{=} i^k$
und damit insbesondere

$$e^{i0} = 1 = \cos(0) + i\sin(0) \qquad e^{i\pi/2} = i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$$
$$e^{i\pi} = -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \qquad e^{i\pi 3/2} = -i = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)$$
$$e^{i2\pi} = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

und damit ergibt sich folgende Wertetabelle

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	−1	0
$\cos(x)$	1	0	−1	0	1

3.23 KOR (Weitere Eigenschaften von sin & cos) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (Periodizität mit Periodenlänge 2π)

(ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ (halbe Periode)

(iii) $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$ ($\pi/2$ Verschiebung ergibt jeweils die andere Fkt)

(iv) $\sin(x) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z} = \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. (i)-(iii) folgt unmittelbar aus den Additionstheoremen & der Wertetabelle [genauer:

(i) $\cos(x+2\pi) \overset{3.17(iv)}{=} \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) \overset{3.22(ii)}{=} \cos(x)$

und analog für sin.

(ii) $\cos(x+\pi) \underset{3.17(iv)}{=} \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \overset{3.22(ii)}{=} -\cos(x)$

und analog für sin.

(iii) $\sin(\pi/2 - x) \underset{3.17(iv)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) = \cos(-x) \overset{3.17(iii)}{=} \cos(x)$

und analog für cos.]

(iv) Wegen der 2π-Periodizität (ii) genügt es die Aussage für $x \in [0, 2\pi)$ zu zeigen. Wir beginnen mit sin.

Die zwei behaupteten Nullstellen in $[0, 2\pi)$ nämlich $0, \pi$ haben wir schon in 3.22(ii) gefunden. Es genügt daher zz, dass es keine weiteren NST in $[0, 2\pi)$ gibt. Das tun wir indem wir zeigen, dass $\sin(x)$ auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ ist. Sei dazu $x \in (0, \pi)$:

$0 < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in (-\pi/2, \pi/2)$ und daher

$$\sin(x) \overset{(ii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \overset{3.22(i),\, 3.17(iii)}{>} 0 \quad (*)$$

Wegen $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$ gilt

$$\sin(x+\pi) \overset{(ii)}{=} -\sin(x) \overset{(*)}{<} 0 \text{ also } \sin(x) < 0 \ (\pi < x < 2\pi).$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus

$$\cos(x) \overset{(ii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

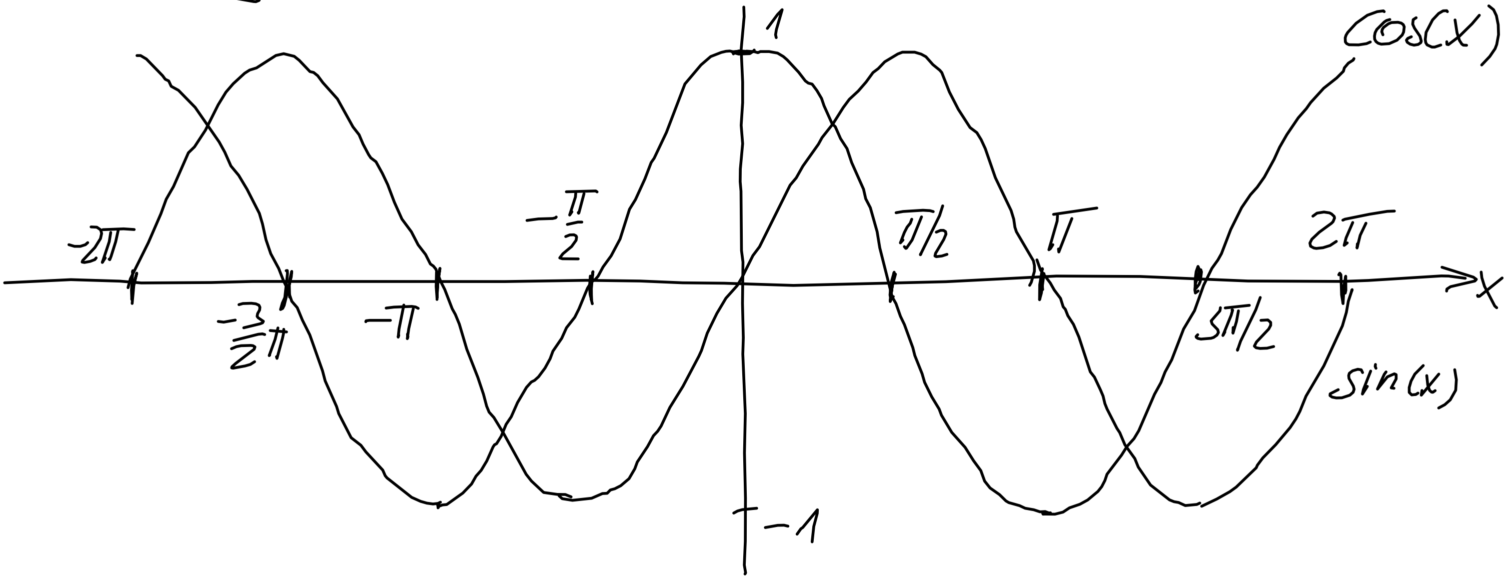
$\square$

3.24 DER GRAPH von Sinus & Cosinus

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein gutes qualitatives Bild der Graphen der Fkt sin & cos gewinnen; insbes gilt

(i) Eine Verschiebung des Graphen von cos um $\pi/2$ nach rechts ergibt den Graphen des sin [3.23(iii) & 3.17(iii): $\cos(x-\pi/2)=\sin(x)$]

(ii) Neben den NST [3.23(iv)] kennen wir die Maxima und Minima [jeweils die NST der anderen Fkt wegen 3.17(ii)], wo die Fkt jeweils das Monotonieverhalten ändern.



3.25 DEF (Tangens & Cotangens) Wir definieren die Fkt

genau die NST von cos

(i) Tangens, $\tan : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

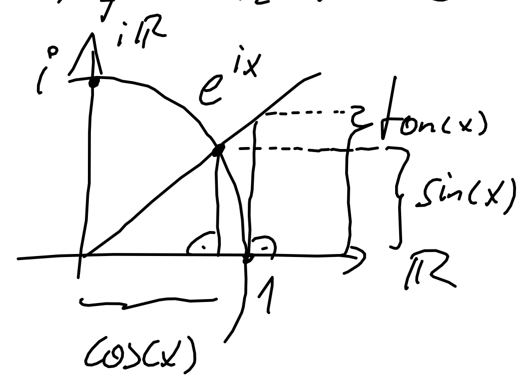
(ii) Cotangens, $\cot : \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

genau die NST von sin

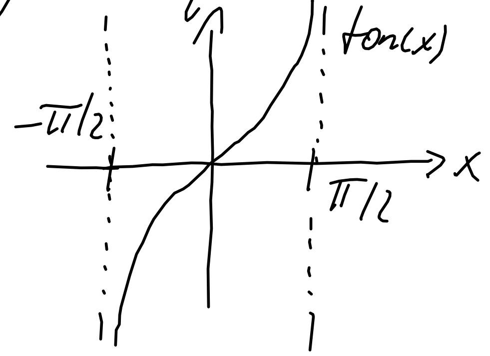
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

3.26 BEM (Eigenschaften des Tangens)

(i) Eine geometrische Interpretation von $\tan(x)$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$ ergibt sich mit dem Strahlensatz:



(ii) Der Graph auf $(-\pi/2, \pi/2)$ ergibt sich aus den Eigenschaften von sin & cos zu



(iii) Periodizität. Es gilt

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{3.23(ii)}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

also ist tan periodisch mit Periode π; der gesamte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben des Graphen in $(-\pi/2, \pi/2)$ um $\pi\mathbb{Z}$.

3.27 MOTIVATION (Arcusfunktionen)

Zu guter Letzt behandeln wir die Umkehrfunktionen von cos, sin & tan. Sie geben also zu gegebenem Winkelfunktionswert den jeweiligen Winkel (im Bogenmaß) an, also die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis an – daher die Namen Arcussinus/cosinus/tangens. Wesentliches Werkzeug ist hier – wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus – der Umkehrsatz 2.18.

lat. Bogen

3.28 Prop & Def (Arcuscos/sin/tan)

(i) cos ist stetig, str. mon. fallend auf $[0,\pi]$ und $\cos([0,\pi])=[-1,1]$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

und nennen sie Arcuscosinus. arccos ist stetig und str. mon fallend.

(ii) sin ist stetig, str. mon. wachsend auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ und $\sin([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

und nennen sie Arcussinus. arcsin ist stetig und str. mon wachsend.

(iii) tan ist stetig, str. mon. wachsend auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ und $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))=\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})$$

und nennen sie Arcustangens. arctan ist stetig & str. mon. wachsend

Beweis. Es sind jeweils die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.18 zu zeigen – dieser besorgt dann jeweils den Rest.

(i) 3.11(i) $\Rightarrow$ cos stetig

3.19(ii) $\Rightarrow$ cos str. mon. fallend auf $[0,\pi/2]$

$$\left.\begin{array}{l} 3.23\,(ii) \Rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \Rightarrow \cos \text{ str. mon fallend auf } [\pi/2, \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \text{ str. mon fallend auf } [0,\pi] \quad (*)$$

$$3.22\,(ii) \Rightarrow \cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ZWS} \Rightarrow [-1,1] \subseteq \cos([0,\pi]) \\ (*) \Rightarrow \cos([0,2\pi]) \subseteq [-1,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \cos([0,\pi]) = [-1,1]$$

$$\xRightarrow{2.18} \cos \text{ hat str. mon fallende \& stetige Inverse } [-1,1] \to [0,\pi]$$

(ii) Mit $\sin(x) \overset{3.23(iii)}{=} \cos(\pi/2 - x)$ erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$.

(iii) tan ist str. mon wachsend auf $[0, \pi/2)$, denn für $0 \le x < x' < \pi/2$

$$\xRightarrow{(i)} \cos(x) > \cos(x')$$
$$\xRightarrow{(ii)} \sin(x) < \sin(x')$$

und damit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} < \dfrac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x')$

tan ist auch str. mon wachsend auf $(-\pi/2, 0]$, denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \qquad (*)$$

tan ist stetig (als Quotient stetiger Fkt; 1.17(ii))
und schließlich gilt $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$,

denn $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0 \;\; \forall x \in (0, \pi/2)$ und $\lim\limits_{x \nearrow \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \overset{1.26}{=} \dfrac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} \overset{3.22(iii)}{=} 0$

$$\xRightarrow{\boxed{1}\,2.47(ii)} \lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = \infty \;\xRightarrow{\text{ZWS}}\; \tan([0, \tfrac{\pi}{2})) = [0, \infty)$$

$$(*) \Rightarrow \tan((-\pi/2, 0]) = (-\infty, 0].$$

$\square$

cos

3.28 BEM (Zu den Arcusfunktionen)

(i) Natürlich hätten wir den „Umkehrprozess" statt auf $[0,\pi]$ bzw. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ und $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ auf jedem Intervall durchführen können,

sin tan wo die jeweilige Funktion str. monoton ist.

(ii) Die Graphen ergeben sich (durch Spiegelung an der 1. Mediane)