

# EINFÜHRUNG IN DIE ANALYSIS

ROLAND STEINBAUER

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK  
UNIVERSITÄT WIEN

SOMMERSEMESTER 2012  
3WSH / 5 ECTS

(KORRIGIERTE VERSION  
2013-02-07)

# Inhaltsverzeichnis

## **Kapitel 0: Einleitung**

§ 0 Was will und was soll die Analysis.....	7
0.1 Mathematik zu Studienbeginn .....	7
0.2 Analysis - Eine erste Inhaltsbestimmung.....	8
0.3 Beispiel: Fahrradfahren .....	8
0.4 Der Analytische Begriffsapparat .....	9
0.5 Und Wozu das Ganze? .....	9
0.6 Ja schön - Aber Wie?.....	9
0.7 Axiomatik der Analysis.....	11
0.8 Eine letzte - auch persönliche – Vorbemerkung.....	11
§ 1 Zusammenfassung der reellen und komplexen Zahlen .....	12
1.1 Motivation: Das feste Fundament der gesamten Analysis .....	12
1.2 $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen) als Körper .....	13
1.3 Bemerkung: Folgerungen aus den Körperaxiomen.....	14
1.4 Die komplexen Zahlen .....	15
1.5 $\mathbb{R}$ als geordneter Körper .....	16
1.6 Wiederholung Intervalle .....	17
1.7 Der Absolutbetrag .....	18
1.8 (Über) Abzählbarkeit .....	19
1.9 Ordnungsvollständigkeit.....	19
1.10 Definition von $\mathbb{R}$ .....	19
1.11 Konsequenzen aus der Ordnungsvollständigkeit.....	20
<b>Kapitel 1: Folgen und Reihen – Konvergenz.....</b>	<b>22</b>
§1 $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einige Konsequenzen aus der archimedischen Eigenschaft.....	23
1.1 Wiederholung: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ .....	23
1.2 Bemerkung: Wohlordnung von $\mathbb{N}$ .....	23
1.3 Theorem: die Macht von $1/n$ .....	24
1.4 Lemma: Bernoulli Ungleichung.....	25
1.5 Proposition: Wachstum von Potenzen.....	25
1.6 Geometrische Summen.....	26
§2 Folgen und Grenzwerte.....	28
2.1 Definition: Folge.....	28
2.2 Schreibweise von Folgen.....	28
2.3 Beispiel einfacher Folgen.....	29
2.4 Veranschaulichung von Folgen.....	30
2.5 Beispiel wichtiger Folgen.....	31
2.6 Definition Grenzwert.....	32
2.7 Grenzwert: Geometrische Veranschaulichung & Sprechweisen.....	32
2.8 Definition: Divergenz, Nullfolge.....	33
2.9 Grenzwert: Behandlung von Beispielen.....	33

2.10 Beobachtung: Der Folgenanfang ist egal.....	35
2.11 Beispiel: Konstante Folgen konvergieren.....	35
2.12 Motivation: Naja zum Teil ganz schon Trickreich.....	37
2.13 $\emptyset$	
2.14 Definition: Beschränkte Folge.....	37
2.15 Beobachtung: Beschränkte Folgen sind eingesperrt.....	38
2.16 Beispiel: (Un)-beschränkte Folgen.....	38
2.17 Satz: Konvergent $\Rightarrow$ Beschränkt.....	39
2.18 Warnung: Beschränkt impliziert <u>nicht</u> Konvergent.....	39
2.19 Beispiel: Die Fibonacci Folge ist divergent.....	39
2.20 Hoppala: <u>Der</u> Grenzwert! .....	40
2.21 Satz: Eindeutigkeit des Limes.....	41
2.22 Motivation: Limes – theoretische Hilfestellung mit großem praktischem Wert.....	41
2.23 Satz: Summen und Produkte konvergenter Folgen.....	42
2.24 Bemerkung: Polierte Beweise (Epsilon-Halbe Beweise usw.).....	43
2.25 Korollar: Linearkombinationen konvergenter Folgen.....	43
2.26 Satz: Quotienten konvergenter Folgen.....	44
2.27 Beispiel im Sinne der Hilfestellung von 2.22.....	45
2.28 Satz: Größenvergleich konvergenter Folgen.....	45
2.29 Satz: Sandwich-Lemma.....	46
2.30 Beispiel im Sinne der Hilfestellung von 2.22 inkl. Bonus.....	46
2.31 Warnung Kein 2.28 für $<$ statt $\leq$ .....	46
2.32 Motivation: Unendliche Reihen-Formulierung.....	47
2.33 Definition: Reihe.....	47
2.34 Bemerkung zur Notation einer Reihe.....	48
2.35 Beispiel: Reihenkonvergenz.....	48
2.36 Hoppala: Reality Check – unendliches Summieren gibt nicht unendlich!?!.....	49
2.37 Beispiel: (Erzbeispiel) Die geometrische Reihe.....	49
2.38 Bemerkung: Konvergenz von Reihen.....	51
2.39 Proposition: Linearkombination konvergenter Reihen.....	51
2.40 Beispiel: Periodische, (unendliche) Dezimalzahlen als Reihen.....	51
2.41 Motivation: Ein genauere Blick auf divergente Folgen.....	52
2.42 Definition: Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz.....	52
2.43 Beobachtung: Bestimmte Divergenz und Schranken.....	52
2.44 Beispiel: Bestimmt divergente Folgen.....	53
2.45 Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte.....	53
2.46 Warnung: zu Rechenregeln mit uneigentlichen Grenzwerten.....	53
2.47 Proposition: Kehrwerte bestimmt divergenter Folgen & Nullfolgen.....	54
2.48 Beispiel: Kehrwert bestimmt divergenter Folge & Nullfolge.....	54
2.49 Bemerkung: best. Divergenz vererbt sich nach oben, respektive unten.....	55
§ 3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ , Konvergenzprinzipien.....	55
3.1 Motivation: Ordnungsvollständigkeit.....	55
3.2 Motivation: Teilfolge.....	55
3.3 Definition: Teilfolge.....	57
3.4 Beispiel: Teilfolge.....	57
3.5 Motivation: Häufungswert.....	58
3.6 Definition: Häufungswert einer Folge.....	58
3.7 Beispiel: Häufungswert.....	58
3.8 Motivation: Wie viele Folgenglieder sind nahe zum Häufungswert? .....	58
3.9 Charakterisierung vom Häufungswert.....	59
3.10 Motivation: in Richtung Bolzano - Weierstraß .....	61

3.11 Theorem: Satz von Bolzano - Weierstraß.....	61
3.12 Bemerkung: $a$ ist der größte Häufungswert.....	63
3.13 Definition: Limes inferior, Limes superior.....	63
3.14 Beispiel: Limes inferior, Limes superior.....	63
3.15 Motivation: Konvergenzprinzipien.....	64
3.16 Definition: Cauchy-Folge.....	65
3.17 Bemerkung: Bedeutung von Cauchy-Folge.....	65
3.18 Theorem: Das Cauchy Prinzip.....	65
3.19 Beispiel: Konvergenz ohne Limes.....	67
3.20 Motivation: Monotone Folgen - Konvergenzprinzip.....	68
3.21 Definition: Monotonie von Folgen.....	68
3.22 Beispiel: Monotone Folgen.....	68
3.23 Bemerkung: Monotonie und Schranken.....	68
3.24 Beispiel: Approximation für $\sqrt{3}$ .....	69
3.25 Theorem: Konvergenzprinzip für beschränkte monotone Folgen.....	70
3.26 Beobachtung: $a_n \rightarrow \sup(a)$ .....	71
3.27 Definition: Berührungspunkt, Häufungspunkt.....	72
3.28 Beispiel: Berührungspunkt, Häufungspunkt.....	72
3.29 Bemerkung: Häufungspunkt vs. Häufungswert.....	72
3.30 Proposition: Einfache Eigenschaften von Häufungspunkt und Berührungspunkt.....	73
3.31 Bemerkung: Berührungspunkt beschränkter Mengen.....	74
3.32 Motivation: Intervallschachtelungsprinzip.....	74
3.33 Definition: Durchmesser eines abgeschl. Intervalls.....	75
3.34 Theorem: Intervallschachtelungsprinzip (IP) .....	75
3.35 Beobachtung: Durchschnitt der Intervallfolge ist Grenzwert.....	76
3.36 Nachbetrachtung: Der rote Faden.....	76
§4 Reihen und Konvergenz.....	78
4.1 Einleitung und Ausblick.....	78
4.2 Erinnerung: Reihen – Sein & Schein.....	79
4.3 Proposition: Cauchy Prinzip für Reihen.....	79
4.4 Bemerkung: Reihen – Änderung endlich vieler Glieder.....	80
4.5 Korollar: Die Glieder konvergenter Reihen sind Nullfolgen.....	80
4.6 Proposition: Beschränktheit der Partialsummen.....	81
4.7 Beispiel: Konvergente und Divergente Reihen.....	81
4.8 Große Fette Warnung: Nicht alle Reihen mit Nullfolgen sind konvergent.....	82
4.9 Beispiel: Reihe $\sum 1/n^3$ .....	83
4.10 Theorem: Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen.....	84
4.11 Beispiel: die alternierende Harmonische Reihe.....	85
4.12 Bemerkung: zum Leibnitz-Kriterium.....	85
4.13 Bemerkung & Warnung: Reihenkonvergenz ist instabil.....	86
4.14 Definition: Absolute Konvergenz.....	87
4.15 Bemerkung: zur absoluten Konvergenz.....	87
4.16 Proposition: Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.....	88
4.17 Theorem: Umordnungssatz.....	88
4.18 Motivation: Absolute Konvergenz – schön aber wie? .....	90
4.19 Proposition: Vergleichstests – Majoranten und Minorantenkriterium.....	90
4.20 Beispiel: Vergleichstests.....	91
4.21 Proposition: Wurzeltest.....	91
4.22 Bemerkung: zum Wurzeltest.....	92
4.23 Proposition: Quotiententest.....	92
4.24 Bemerkung: zum Quotiententest.....	93



4.25 Beispiel: Quotiententest, Wurzeltest.....	94
4.26 Motivation: Dezimaldarstellung & b-adische Entwicklung.....	94
4.27 Definition: b-adische Entwicklung.....	95
4.28 Beispiel: b-adische Entwicklung.....	95
4.29 Motivation: Konkretisierung b-adische Entwicklung.....	96
4.30 Bemerkung: Uneindeutigkeit b-adischer Entwicklungen.....	96
4.31 b-adische Entwicklung reeller Zahlen.....	96
4.32 Korollar: Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ : Jedes $x$ aus $\mathbb{R}$ ist Limes einer Folge in $\mathbb{Q}$ .....	98
4.33 Bemerkung: zur b-adischen Entwicklung und periodischer Ziffernfolge.....	99
4.34 Motivation: Das Cauchy Produkt für Reihen.....	99
4.35 Proposition: Das Cauchy Produkt für Reihen.....	101
4.36 Bemerkung: Exponentialreihe.....	103
4.37 Definition: Exponentialfunktion.....	103
4.38 Motivation: Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.....	103
4.39 Theorem: Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.....	104
4.40 Korollar: Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion.....	104
4.41 Bemerkung & Motivation: Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus.....	105
4.42 Proposition: Fehlerabschätzung für die Exponentialfunktion.....	105
4.43 Beispiel: Approximation für $e$ .....	106
<b>Kapitel 2: Stetige Funktionen.....</b>	<b>107</b>
§1 Stetigkeit.....	108
1.1 Erinnerung: Funktionen.....	108
1.2 Beispiel: reelle Funktionen.....	108
1.3 Faktensammlung.....	111
1.4 Beispiel: Zusammensetzung von Funktionen.....	112
1.5 Motivation: Stetigkeit.....	113
1.6 Definition: Stetigkeit.....	115
1.7 Bemerkung: zur Stetigkeit.....	115
1.8 Beispiel: Stetige Funktionen.....	116
1.9 Bemerkung: Stetige und Unstetige Funktionen.....	118
1.10 Lemma: Nichtverschwinden auf Umgebung.....	119
1.11 Motivation: Stetigkeit und Folgen.....	120
1.12 Theorem: Stetigkeit via Folgen.....	121
1.13 Bemerkung: Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit.....	122
1.14 Beispiel: Sprünge.....	122
1.15 Warnung: Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Stetigkeit.....	123
1.16 Motivation: Grundoperationen und Stetigkeit.....	126
1.17 Proposition: Grundoperationen für stetige Funktionen.....	126
1.18 Korollar: Stetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen.....	127
1.19 Beispiel: stetige Funktionen aus 1.17.....	128
1.20 Motivation: Grenzwert von Funktionen.....	129
1.21 Definition: Grenzwert einer Funktion.....	129
1.22 Beobachtung: zum Grenzwert von Funktionen.....	130
1.23 Beispiel: Limes rationaler Funktion.....	130
1.24 Definition: Einseitige und uneigentliche Grenzwerte von Funktionen.....	130
1.25 Beispiel: nochmals Grenzwerte von Funktionen.....	131
1.26 Proposition: Grenzwerte und Stetigkeit.....	132
1.27 Bemerkung: Nochmal $1/x$ zur Ehrenrettung von 1.15(iv) .....	133
§2 Sätze über stetige Funktionen.....	134

2.1 Motivation: Die Sonderrolle abgeschlossener Intervalle.....	134
2.2 Motivation: Der Zwischenwertsatz.....	135
2.3 Theorem: Der Zwischenwertsatz.....	135
2.4 Korollar: Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad.....	135
2.5 Korollar: Zwischenwertsatz.....	137
2.6 Korollar: Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle.....	138
2.7 Korollar: Fixpunktsatz.....	139
2.8 Bemerkung: zum Fixpunktsatz.....	139
2.9 Motivation: Annahme von Max und Min.....	140
2.10 Definition: Beschränkte Funktion.....	140
2.11 Theorem: Stetige Funktionen nehmen auf kompaktem Intervall Max und Min an.....	141
2.12 Warnung: Intervall $[a,b]$ muss beschränkt und abgeschlossen sein! .....	141
2.13 Motivierendes Beispiel: Die Abhängigkeit $\delta$ (Delta's) von $x_0$ .....	142
2.14 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit.....	144
2.15 Bemerkung: Stetigkeit vs. Gleichmäßige Stetigkeit.....	144
2.16 Theorem: Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen.....	145
2.17 Motivation: Stetige inverse Funktion.....	146
2.18 Theorem: Umkehrsatz für streng monotone & stetige Funktionen.....	146
2.19 Bemerkung: zur Notation von Abbildung mit eingeschränktem Zielbereich.....	146
2.20 Bemerkung: Umkehrsatz für streng monotone Funktionen.....	148
2.21 Beispiel: Stetigkeit der Wurzel.....	148
§ 3 Elementare Transzendente Funktionen.....	149
3.1 Einleitung.....	149
3.2 Proposition und Definition: Logarithmus.....	149
3.3 Bemerkung: Logarithmen von Potenzen.....	151
3.4 Motivation: allgemeine Potenzen.....	151
3.5 Definition: allgemeine Potenzfunktion & Exponentialfunktion.....	152
3.6 Bemerkung: zur allgemeinen Potenzfunktion.....	152
3.7 Proposition: Die allgemeine Exponentialfunktion.....	153
3.8 Beispiel: nützliche Grenzwerte.....	153
3.9 Motivation: Die komplexe Exponentialfunktion – Konverg. und Stetigkeit in $\mathbb{C}$ .....	155
3.10 Exkurs: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$ .....	156
3.11 Bemerkung: Die komplexe Exponentialreihe.....	161
3.12 Definition: Die komplexe Exponentialfunktion.....	161
3.13 Bemerkung: komplexe und reelle Exponentialfunktion.....	161
3.14 Theorem: Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion.....	161
3.15 Motivation: Winkelfunktionen.....	163
3.16 Definition: Sinus und Cosinus.....	163
3.17 Bemerkung: Grundeigenschaften von Sinus und Cosinus.....	163
3.18 Motivation: $\pi$ (pi) .....	166
3.19 Lemma: Technisches zu Sinus und Cosinus.....	167
3.20 Proposition: Erste Nullstelle des Cosinus.....	168
3.21 Definition: $\pi$ (pi) .....	168
3.22 Bemerkung: Ein bisschen in Richtung Gewohntes.....	168
3.23 Korollar: Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus.....	169
3.24 Der Graph von Sinus und Cosinus.....	171
3.25 Definition: Tangens und Cotangens.....	171
3.26 Bemerkung: Eigenschaften des Tangens.....	172
3.27 Motivation: Arcusfunktionen.....	172
3.28 Proposition und Definition: Arcusfunktionen – arccos, arcsin, arctan.....	173
3.29 Bemerkung: zu den Arcusfunktionen.....	175

# 0 EINLEITUNG

In dieser Einleitung machen wir einige inhaltliche & methodische Vorbemerkungen (§0) und legen down (§1) den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

## §0 WAS WILL UND WAS SOLL DIE ANALYSIS

in diesem Skript  
hat jeder Absatz eine  
Nummer

- EINE ERSTE BEGRIFFSBESTIMMUNG

## 0.1. MATHEMATIK ZU STUDIENBEGINN. Zu Beginn jedes

Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- LINEARE ALGEBRA & GEOMETRIE
- ANALYSIS

Die Themen der Analysis sind also schon durchaus aus der Schulmathematik ge-

läufig; sie wird an der Uni allerdings axiomatisch abstrakt aufgebaut daher ist zu Beginn eher das WIE als das WAS ein Problem

[Für viele Studierende ist die 1. Analysis-Vo die relativ schwierigste Vo des gesamten Studiums.]

Lösen linearer Gleichungssysteme & der oberen entwickelten abstrakte Begriffsapparat

Grenzwerte, Differential- und Integralrechnung

## 0.2 ANALYSIS - EINE ERSTE INHALTSBESTIMMUNG

Der inhaltliche Kern der Analysis ist die Differential- und Integralrechnung (in einer & in mehreren Variablen).

Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen kann.

Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?

für kleine Änderungen  
der unabhängigen Variablen

↖  
Gesamtverlauf  
der Fkt

## 0.3 BSP (Fahrradfahren)

(Wo, wie) kann aus der Kenntnis der Momentanpositionsgeschwindigkeit (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der Gesamtverlauf der Fahrt (zurückgelegte Strecke; die Fkt im Großen) rekonstruiert werden?

Bei einem Fahrrad werden obige Größen durch den Tachometer bzw. Topo- oder Kilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe wirklich und wie kann obige Frage systematisch beantwortet werden?

Das führt uns auf:

## 0.4 DER ANALYTISCHE BEGRIFFSAPPARAT

Jede ernsthafteste Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den

### GRENZWERTBEGRIFF

und seine zahlreichen

Erscheinungsformen - Er ist das Herzstück der Analysis und liegt gleichmaßen der Differential- & Integralrechnung zugrunde?

0.5 UND WOFÜR DAS GANZE? Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken schäbende)

Proteric mit der echten Welt zu tun? SEHR VIEL!

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Laplace, Laplace, ... ) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt & Gesellschaft in den letzten  $3\frac{1}{2}$  Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. [Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik sowie die Schrift und nimmt m.E. ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein...]

## 0.6 JA SCHÖN - ABER WIE? ZUR METHODIK

Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist - und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich - dass die Analysis [wie jedes math. Gebiet] nach der

axiomatischen Methode gelehrt wird. - WARUM?

abstraktes Vorzeichen nach dem Definition-Satz-Beweis-Schema

(1) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

(2) Schwer ist das Erlernen eines Gebiets leichter?

Das ist kein Witz? Statt in „druidische Weise“ von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantierens mit „unerlässlich kleinen Größen“ unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige praxistaugliche Eigenschaften explizit definiert. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen Sätzen formuliert. Diese werden durch logische Schlussfolgerungen bewiesen.

JA, ABER ... natürlich bereitet diese Herangehensweise den AnfängerInnen große Schwierigkeiten. Es ist eine große Herausforderung den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der Phantasie & Intuition und der Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache.

Daher ist es auch eines der Ziele dieser Vb diese methodische Herausforderung zu bewältigen... Insofern nimmt die EDA auch den methodischen roten Faden des der EMA auf und spinnt ihn weiter...

## 0.7. AXIOMATIK IN DER ANALYSIS

Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir im nächsten §. Dabei nehmen wir den inhaltlichen Faden aus der ETA auf und knüpfen daraus den Teppich der Analysis.

## 0.8 BEVOR ES WIRKLICH LOSGEHT – EINE LETZTE, AUCH

zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen & die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen & wird nicht post ohne Folgen für das eigene Denken bleiben (können).

Ebenso die Kraft der Anwendungen (auf die wir in diese Völder wenig eingehen können): Durch reines Denken gewonnene Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie, etc. sind also höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft...

# §1 ZUSAMMENFASSUNG: DIE REELLEN UND KOMPLEXEN ZAHLEN

1.1 MOTIVATION: In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen.

[Wir wählen diesen Ausgangspunkt: die reellen (und damit auch die komplexen) Zahlen können aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe [ETA, Erweiterungsstoff im Kap. 6]). Die so konstruierten Mengen  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen – Daher spielt es für alle Weiter keine Rolle wo wir beginnen. Wichtig ist nur, dass wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.]

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile aus der ETA sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf die ETA arbeiten.

Wir werden den Satz v. Dedekind [ETA, 1.6.4.] zur Definition erheben [ETA, p. 310 unten] wo  $\mathbb{R}$  als (den bis auf Isomorphie eindeutigen) ordnungsvollständigen geordneten Körper definieren, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Unterkörper besitzt.



Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen.

## 1.2 $\mathbb{R}$ als Körper

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper [EMA, Def 4.5.1], d.h. es gilt

(Axiome der Addition)

(A1) Assoziativgesetz:  $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(A2) Kommutativgesetz:  $x+y = y+x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(A3) Existenz der Null:  $\exists 0 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}$

(additives) Neutrales

$$x+0 = x$$

(A4) Existenz von additiv Inversen:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists -x \in \mathbb{R}:$

$$x+(-x) = 0$$

(Axiome der Multiplikation)

(M1) Assoziativität:  $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(M2) Kommutativität:  $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(M3) Existenz der Eins:  $\exists 1 \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}:$

(multiplikativ) Neutrales

$$x \cdot 1 = x$$

(M4) Existenz von mult. Inversen:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists x^{-1} \in \mathbb{R}:$

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

(Distributivgesetz)

regelt die Verträglichkeit von  $+$ ,  $\cdot$

(D)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x(y+z) = xy + xz$

### 1.3 $\mathbb{R}$ (Folgerungen aus den Körperaxiomen)

- (i) Das additiv neutrale  $0$  und multiplikativ neutrale Element  $1$  sind eindeutig bestimmt [ETA, Prop 5.2.16].
- (ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen  $-x$  bzw.  $x^{-1}$  eindeutig bestimmt [ETA, Prop. 5.2.33].
- (iii) Es gibt keine Nullteiler, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \neq y \Rightarrow xy \neq 0$  [ETA, Bem 4.5.9]
- (iv) Endliche Summen und Produkte reeller Zahlen erfüllen (erweiterte Versionen) von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz [„Klammerschreibweise“ z.B.  $(x+y)(u-w) = ux + uy - xw - yw$ ] und wir verwenden die Summen- und Produktschreibweise  $\Sigma, \Pi$  [ETA, Kap 2.3].

### 1.4. Die komplexen Zahlen

- (i) Per definitionem [ETA, Def 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reeller Zahlen  $\{\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ , d.h. wir schreiben  $z = (x, y)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Auf  $\mathbb{C}$  sind eine Addition und eine Multiplikation definiert ( $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ )

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(ii) Mit diesen Operationen ist  $\mathbb{C}$  ein Körper [ETA, Thm. 6.5.2] wobei  $0 := (0, 0)$  das Nullelement und  $1 := (1, 0)$  das Einselement sind.

D.h. für  $\mathbb{C}$  gelten alle Punkte aus 1.2. mit  $\mathbb{C}$  statt  $\mathbb{R}$  [klar weil 1.2 listet ja nur allgemein die Eigenschaften von Körpern]

(iii) Für  $z = (x, y)$  verwenden wir auch die Schreibweise

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

wobei  $i = (0, 1)$  die imaginäre Einheit genannt wird [ETA, Defs. 6.5.5, 6.5.6].  $i$  hat die bemerkenswerte

Eigenschaft  $i^2 = (0, 1)^2 \stackrel{(1.1)}{=} (-1, 0) = -1 + i0 = -1$

(iv)  $\mathbb{R}$  ist ein Unterkörper [ETA, Def. 5.4.13] von  $\mathbb{C}$  [ETA, 7.333] wobei  $\mathbb{R}$  mittels der Abbildung

$$\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (x, 0) = x + i0$$

in  $\mathbb{C}$  eingebettet ist. (Siehe die proce Box in [ETA, 7.333].) Insbesondere können wir  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$  identifizieren und  $1 \in \mathbb{R}$  mit  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ .

(v)  $\mathbb{C}$  besitzt mit der komplexen Konjugation eine wichtige Struktur. Genauer haben wir die Abb [ETA, Def. 6.5.8]

$$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$$

Sie ist ein Körperautomorphismus ([EMA, 5.4.20iii]) d.h. Körper isom. auf sich selbst) von  $\mathbb{C}$ , wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h.  $\overline{\overline{z}} = z$ .

Man sagt die Komplexkonjugation ist eine Involution.

1.5  $\mathbb{R}$  als geordnete Körper (Hier weichen wir etwas von [Hö] ab; die Fußnoten sind aber äquivalent!)

(i) Auf der Menge  $\mathbb{R}$  ist eine Ordnungsrelation  $\leq$  definiert (die sog. natürliche Ordnung).

Wir verwenden die

Schreibweisen:

Schreibweisen:

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y \Leftrightarrow y < x$$

d.h. eine reflexive ( $x \leq x$ ), transitive ( $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ) und antisymmetrische ( $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ) Relation; siehe [EMA, Def 4.2.24(ii)]

(ii)  $\leq$  ist eine Totalordnung [EMA, Def 4.2.24(iii)], d.h. es gilt die Trichotomie

(O1)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

[Genauer sagt [EMA, Def 2.2.24(iii)]: es gilt mindestens eine der Aussagen  $x \leq y, y \leq x$ . Es gilt aber (4.2.24(iii))  $\Leftrightarrow$  (O1):

" $\Leftarrow$ " ist klar

" $\Rightarrow$ ": per def gilt mind. eine der 3 Aussagen. Wir zeigen, dass niemals 2 oder alle 3 gelten können

- $x < y \wedge x = y$  ist per def nicht möglich [ $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ ]
- $x > y \wedge x = y$  detto
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$  antisymm. was nicht möglich ist; siehe oben  $\square$

(iii)  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  ist ein geordnetes Körper [EMA, Def 6.3.1],  
d.h. es gelten  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(O2) \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$(O3) \quad x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$$

Verträglichkeit von  
 $\leq$  mit  $+$ .

(iv) In  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  gelten die Rechenregeln [EMA, Prop 6.3.2]

$(x, y, z \in \mathbb{R})$

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$$

$$x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$$

$$x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$$

1.6. Wiederholung (Intervalle) Die Ordnung auf  $\mathbb{R}$  verwendet

man um wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu

definieren - die Intervalle [EMA p. 153]. Seien  $0 < b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (0, b) &\equiv ]0, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < b\} && \dots \text{offenes, beschränktes I.} \\ (-\infty, b) &\equiv ]-\infty, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \dots \text{offene, halbbeschränkte I.} \\ (0, \infty) &\equiv ]0, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\} && \dots \text{offene, halbbeschränkte I.} \\ (0, b] &\equiv ]0, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq b\} && \dots \text{halboffene, beschr. I.} \\ [0, b) &\equiv [0, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < b\} && \dots \text{halboffene, beschr. I.} \\ (-\infty, b] &\equiv ]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} && \dots \text{oberschlossene, halb-} \\ [0, \infty) &\equiv [0, \infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} && \dots \text{oberschlossene, halb-} \\ [0, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq b\} && \dots \text{oberschlossene beschr. I.} \end{aligned}$$

Schließlich schreiben wir  $(-\infty, \infty) \equiv ]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$

1.7. DER ABSOLUT BETRAG. Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die Abstandsmessung;

auf  $\mathbb{R}$  bereitstellt das der Betrag [EMA, Def 6.4.11]

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat den Graphen und die folgenden Eigenschaften



[EMA, Prop. 6.4.12]

(N1)  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
und  $|x| = 0 \iff x = 0$  (positiv definit)

(N2)  $|xy| = |x| |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (Multiplikativität)

(N3)  $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  ( $\Delta$ -Ungleichung)

Weiter gilt [EMA, p. 318] ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

(i)  $|-x| = |x|$  (Spiegelsymmetrie)

(ii)  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$  ( $y \neq 0$ )

(iii)  $|x-y| \geq ||x| - |y||$ ,  $|x+y| \geq ||x| - |y||$  (Umkl.;  $U \in [0, 4)$ )

(iv)  $\max(x, y) = \frac{x+y + |x-y|}{2}$ ,  $\min(x, y) = \frac{x+y - |x-y|}{2}$

$\left[ \begin{matrix} \nearrow \\ \max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases} \end{matrix} \right]$  ; das ist wohldefiniert wegen (01)

[Setto] ( $U \in [0, 3)$ )

# 1.8. (ÜBER) ABZÄHLBARKEIT [EMA, Kap. 4.4]

Eine Menge  $M$  heißt abzählbar, falls es eine Bijektion  $F: M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

Abzählbare Mengen sind:  $\mathbb{N}$  (klar!),  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar,  
man sagt überabzählbar  
[Es ist schon  $(0,1)$

↳ Cantorsches Diagonilverfahren  
[EMA, p. 174]

überabzählbar, [EMA, p. 176]

# 1.9. ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT $\rightarrow \mathbb{R}$

Eine total geordnete Menge  $M$  heißt ordnungsvollständig, falls  $\forall E \subseteq M, E \neq \emptyset, E$  nach oben (unten) beschränkt

(V)  $\Rightarrow E$  hat ein Supremum (Infimum) [EMA, Def 6.4.1 + Prop. 6.4.2]

[EMA, Def 6.4.2]

↳ kleinste obere Schranke - ein wichtiger Begriff  $\rightarrow \mathbb{R}$

$\alpha = \sup E \Leftrightarrow$  (1)  $\alpha$  ist obere Schranke von  $E$  ( $\alpha \geq \forall e \in E$ )  
(2)  $\beta < \alpha \Rightarrow \beta$  ist nicht obere Schranke von  $E$

Aufgabe der Woche

Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind nicht ordnungsvollständig -  
daher eignen sie sich nicht als Grundlage der Analysis!

[EMA, Bsp 6.4.3]

# 1.10. DEFINITION VON $\mathbb{R}$

Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt die im Dedekindschen Satz [1.10; EMA, Thm 6.4.4] vorkommen.

Es lautet: Es gibt bis auf Isomorphie (geordnete Körper) genau einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, der  $\mathbb{Q}$  als geordneten Teilkörper enthält.

Wir definieren nun  $\mathbb{R}$  als genau jenen Körper.

$\mathbb{R}$  hat nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

- die Körperaxiome (algebraische Eigenschaften)

(A1) - (A3), (M1) - (M3), (D)

- die Ordnungsaxiome

(O1) - (O3)

- Ordnungsvollständigkeit (V)

„in  $\mathbb{R}$  gelten die  
4 Grundrechenoperationen“

„Wir holen  
das übliche  $\leq$ “

„ $\mathbb{R}$  hat im Gegensatz zu  $\mathbb{Q}$   
keine Lücke“

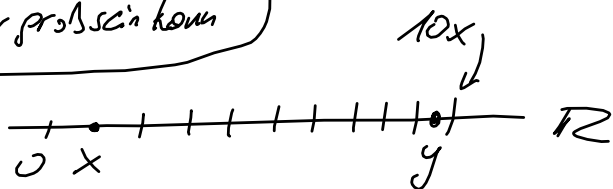
Zum Schluss des Abschnitts holen wir einige wichtige Folgerungen aus (V) fest

### 1.11. KONSEQUENZEN AUS DER ORDNUNGSVOLLSTÄNDIGKEIT

(i) Die Archimedische Eigenschaft [EMA, Prop 6.4.5(i)] [REP]

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Der Witz ist, dass  
 $x$  sehr klein und  
 $y$  sehr groß sein kann



$n$ -faches Abheben von  
 $x$  übertrifft  $y$

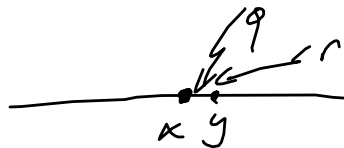
(ii) Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  [EMA, Prop 6.4.5(ii)]

Seien  $x < y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

Der Witz ist es, dass  
sehr nahe bei  $y$  sein kann

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < r < y$





$\mathbb{R}$  „Zwischen je zwei reellen Zahlen, egal wie nahe sie beieinander liegen, gibt es immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl“

(iii) Existenz & Eindeutigkeit von Wurzeln

Sei  $0 < a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig

$\Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}$  mit  $x^n = a$  [ENA, Prop. 6.4.2]

Wir schreiben  $x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  und nennen  $x$  die  $n$ -te Wurzel aus  $a$

1

# FOLGEN UND REIHEN - KONVERGENZ

In diesem Kapitel legen wir den Grundstein der Analysis: den Konvergenzbegriff für Folgen. Wir werden also definieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexe Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiter werden wir Folgen als Werkzeug verwenden um den zentralen Begriff der (Ordnungs-) Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen also Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entwerfen und unser diesbezügliches Wissen verwenden um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit Konvergenz in Reihen wird sich im Weiteren als ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{M}$ , eine bel. Menge) - offizielle Def. später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  aus der EITA und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft - damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

$\mathbb{N}$  ALS TEILMENGE VON  $\mathbb{R}$  UND EINIGE  
 KONSEQUENZEN AN DER ARCHIMEDISCHEN  
 EIGENSCHAFT

### 1.1. WIEDERHOLOWG. (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ )

In [EMA, 6.1.1] wurde  $\mathbb{N}$  als Menge definiert, die die Peano-Axiome erfüllt und in [EMA 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt. Es ist also  $\mathbb{N}$  jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der Nachfolgebildung  $S$  die Axiome

- (PA1)  $0 \in \mathbb{N}$
- (PA2)  $\forall n \in \mathbb{N}: S(n) \in \mathbb{N}$  (d.h.  $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ )
- (PA3)  $\nexists n \in \mathbb{N}: S(n) = 0$  (d.h. 0 ist kein Nachfolger)
- (PA4)  $S$  ist injektiv, d.h.  $\forall m, n \in \mathbb{N}: S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$
- (PA5) Induktionsprinzip: Falls  $M \subseteq \mathbb{N}$  und (PA1), (PA4) für  $M$  gelten [man sagt  $M$  ist induktiv:  $0 \in M$  und  $m \in M \Rightarrow S(m) \in M$ ] dann gilt schon  $M = \mathbb{N}$

(PA5) sagt, dass vollst. Induktion funktioniert ...

### 1.2. BEW (Wohlordnung von $\mathbb{N}$ )

Klarerweise ist  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  (Details siehe [EMA, Kap 6, Erweiterungsstoff]). Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  besitzt  $\mathbb{N}$  die Eigenschaft der Wohlordnung:

Jede nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{N}$  hat ein  $\min$

Beweis: (i) Falls  $A$  endlich ist, dann gibt es klarerweise ein Minimum (es kann nach endlich vielen „Vergleichsschritten“ gefunden werden).

(ii) Falls  $A$  unendlich ist wählen wir ein beliebiges  $0 \in A$  und zerlegen  $A$  in 2 Teilmengen:

$$B := \{x \in A : x \leq 0\} \quad C := A \setminus B$$

Nun gilt  $A = B \cup C$  und  $B$  ist endlich  $\stackrel{(i)}{\implies} \exists \min B$   
 Außerdem gilt lt. Konstruktion  $\forall b \in B \forall c \in C : b < c$   
 $\implies \min B = \min A$ . □

Als nächstes holen wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft her

A.3. 1/n (Die Mächtigkeit von  $1/n$ )

Der Witzon "f<math>\epsilon>0</math>" ist, dass  $\epsilon$  beliebig nahe bei 0 sein kann

(i)  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : 1/n < \epsilon$

(ii) Sei  $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ . Falls  $r < 1/n \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  dann gilt schon  $r = 0$

" $1/n$  wird beliebig klein"

"Zwischen  $\{1/n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$  und 0 ist kein Platz"

Beweis:

(i) [Archimedes O.A. M(i);  $x = \epsilon, y = 1$ ]  $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n\epsilon > 1$   
 $\implies \epsilon > 1/n$

(ii) Sei  $r \geq 0$ . Falls  $r > 0 \stackrel{(i)}{\implies} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 1 : 1/m < r$   
 $\downarrow$  zur Voraussetzung

Also gilt  $r = 0$ . □



(ii) Folgt aus (i); Genauer setze  $b_1 = 1/b \Rightarrow b_1 > 1$

$$\stackrel{(i)}{\implies} \left[ b = b_1, K = 1/\varepsilon \right] \quad \exists n \in \mathbb{N} : b_1^n > K$$

$$\text{Also insgesamt } \underline{b^n} = \frac{1}{\underline{b_1^n}} < \varepsilon. \quad \square$$

Zum Abschluss des § betrachten wir geometrische Summen – ein point wichtiges Werkzeug

1.6. GEOMETRISCHE SUMMEN Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$\text{die Funktion } \left\{ \begin{array}{l} S_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ S_n(x) := \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \end{array} \right.$$

(i) Für  $x = 1$  erhalten wir

$$\underline{S_n(1)} = \sum_{k=0}^n \underline{1} = \underline{n+1}$$

(ii) Um  $S_n(x)$  für  $x \neq 1$  zu berechnen schreiben wir

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$x S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$$

$$\underbrace{S_n(x) - x S_n(x)}_{(1-x) S_n(x)} = 1 - x^{n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \implies S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (*) \\ (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \end{array} \right.$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von  $S_n(x)$  für  $n$  groß (und  $x \neq 1$ ). Dazu schreiben wir (\*) um zu

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (**)$$

unabhängig von n  $\uparrow$  interessanter Term

(iv) Für  $|x| < 1$  besagt 1.5(ii), dass der interessante Term beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \epsilon_1 > 0 \implies \exists N \in \mathbb{N}: |x|^N < \epsilon_1 \quad (***)$$

[1.1.4(ii),  $b = |x|$ ]

Klarerweise gilt (\*\*\*) auch für alle  $n \geq N$  und daher

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \xrightarrow{|x| < 1} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\epsilon_1}{1-x} \quad \forall n \geq N \quad (****)$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  beliebig [klein; Witz?], setze  $\epsilon_1 = \epsilon(1-x)$ .  
Dann gilt  $\forall n \geq N$

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \stackrel{(***)}{=} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \stackrel{(***)}{<} \frac{\epsilon_1}{1-x} = \epsilon.$$

Zusammengefasst ist also  $S_n(x)$  für  $|x| < 1$  und  $n$  groß sehr nahe an  $\frac{1}{1-x}$ , und zwar im folgenden präzisen Sinn:

Zu jeder vorgegebenen Toleranzgrenze  $\varepsilon$  können wir einen Index  $N$  finden, sodass der Fehler

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right|$$

kleiner als die Toleranz  $\varepsilon$  ist, falls  $n \geq N$ .

Anzahl von  
Berechnungsschritten

Diese Formulierung stößt uns geradezu mit der Nase auf den kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg - ...

## §2 FOLGEN UND GRENZWERT

Jetzt geht es los - und zwar mit der offiziellen

2.1. DEF (Folge) Sei  $M$  eine Menge. Eine Folge in  $M$  ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \rightarrow M$$

Gilt  $M = \mathbb{R}$  bzw.  $M = \mathbb{C}$ , so nennen wir  $a$  eine reelle bzw. komplexe Folge. [Zunächst wird fest immer  $M = \mathbb{R}$  sein.]

2.2. SCHREIBWEISE. Nachdem eine Folge ob eine spezielle Funktion definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl. [ETA, 4.3]) hier gültig.

mit komischem Def bzw.  $\rightarrow$



Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige spezielle Schreibweisen eingebürgert:

- (i) Statt  $a(1), a(2), \dots$  schreiben wir  $a_1, a_2, \dots$   
 (ii) Für die ganze Folge schreiben wir statt  $a$  oft auch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder kürzer } (a_n)_n \text{ oder nur } (a_n)$$

- (iii) Hin und wieder werden Folgen auftreten, die erst bei  $n=1$  oder noch später beginnen - das bringen wir durch die Schreibweise  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  oder etwa  $(a_n)_{n=17}^{\infty}$  zum Ausdruck.

Ja aber: dürfen die das? Soll heißen: Sind das oben  
 $\rightarrow$  überhaupt Folgen im Sinne der Def?

Ja schon, denn sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$  eine Folge, die erst bei  $n_0$  beginnt. Dann ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = a_{n+n_0}$  eine echte "Folge" und es zahlt sich nicht aus, zwischen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zu unterscheiden.

### 2.3 Bsp (Ganz einfache Folgen)

- (i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  setze  $a_n = 2n$ . Das ergibt die reelle Folge  
 $(a_n)_n = (2n)_n = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$

- (ii) Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Mit  $b_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$  erhalten wir eine sep. konstante (reelle) Folge

$$(b_n)_n = (c)_n = (c, c, \dots)$$

Dafür hätten  
Wir den Begriff  
aber nicht  
gebraucht...

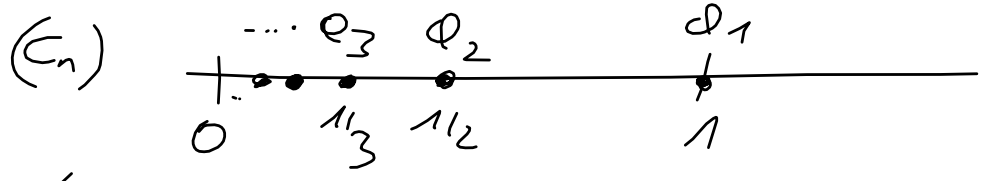
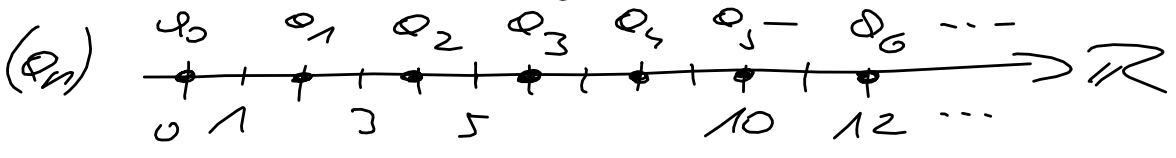
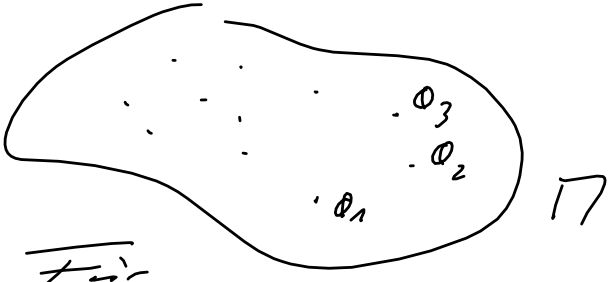
(iii) Mit  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) erhalten wir

$$(a_n) = \left( \frac{1}{n} \right)_n = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$$

2.4. VERANSCHAULICHUNG VON FOLGEN. Es gibt 2 Wege Folgen in prägnanter Weise zu veranschaulichen.

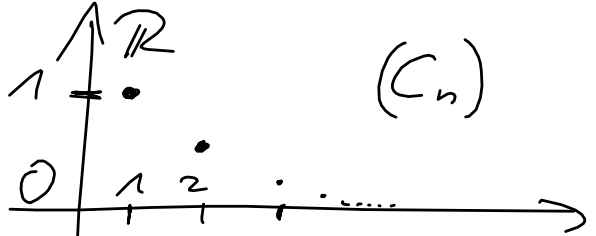
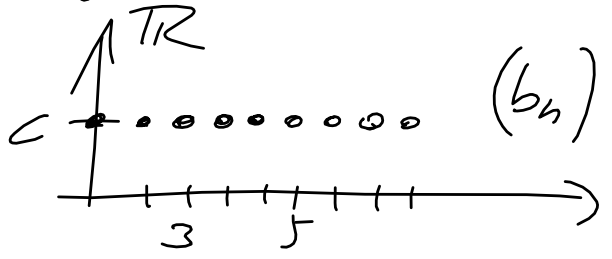
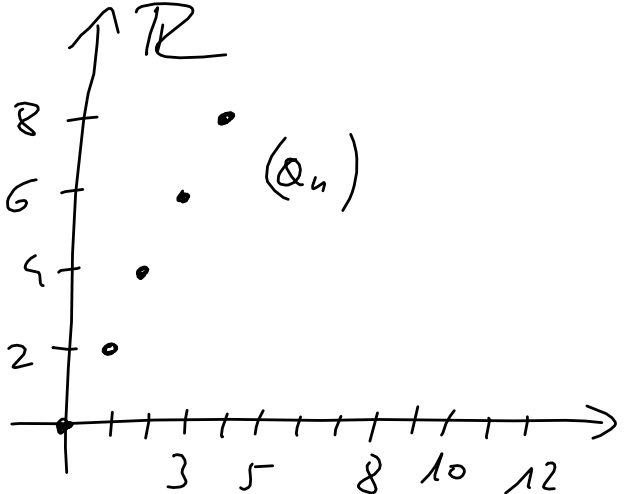
(i) Spaziergang in  $M$ :

Man trägt die Werte  $a_n$  der Reihe nach in  $M$  ein. Für die Bsp in 2.3 ergibt das



(ii) (für reelle Folgen) Graph der Folge

Für die Bsp. aus 2.3. ergibt sich so



[siehe auch Mathematik-Notebook auf d. Materialiensite]

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii).

Die Vorzeichenmaschine

2.5 Bsp (Einige wichtige Folgen)

(i)  $a_n = (-1)^n$ ,  $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

(ii)  $b_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $(b_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$

(iii)  $c_n = \frac{n}{2^n}$ ,  $(c_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots)$

(iv) Die Fibonacci-Folgen sind rekursiv definiert gemäß

$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$

Es gilt also

$(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

Summe der  
n vorherigen  
Folgeglieder

(v) Geometrische Folge: Sei  $x \in \mathbb{R}$ , setze  $a_n = x^n$ ,  $(a_n) = (1, x, x^2, \dots)$

(vi) Geometrische Reihe (siehe 1.6. - war ja als wichtig angedeutet!)  
Sei wieder  $x \in \mathbb{R}$  und definiere

$S_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n d_k$

Wie in (v)

Dann gilt  $(s_n) = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+\dots+x^3, \dots)$

[Darstellung gemäß 2.4  $\rightarrow$  UE]

[Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Def ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Mittelpunkt. <sup>32</sup>]

2.6 DEF (Grenzwert) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge,  $a \in \mathbb{R}$ .

Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad (2.1)$$

In diesem Fall heißt  $a$  Grenzwert (Limes) der Folge  $(a_n)$  und wir schreiben

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  bzw. kürzer  $a = \lim a_n$  und

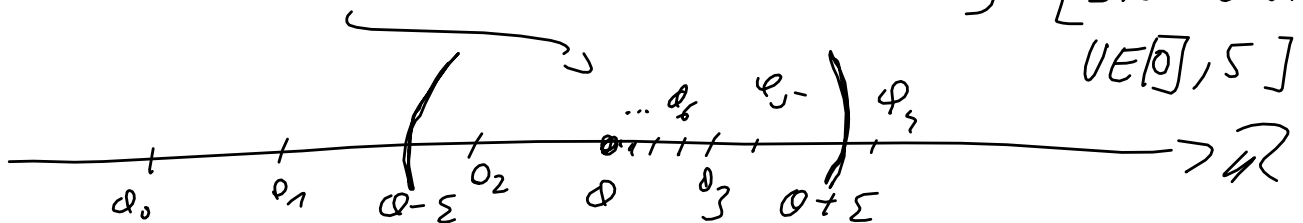
$a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  bzw. kürzer  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Sprich:  $a_n$  geht gegen  $a$

## 2.7 GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG & SPRECHWEISEN

Für  $\varepsilon > 0$  versteht man unter der  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  von  $a \in \mathbb{R}$  alle Zahlen in  $\mathbb{R}$ , die von  $a$  Abstand kleiner als  $\varepsilon$  haben, also das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\} \quad [\text{siehe auch } U_\varepsilon(0), 5]$$



Die Konvergenzbedingung (2.1) sagt nun: Zu jedem (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Folgenindex  $N$ , sodass alle späteren Folgenglieder  $a_n$  ( $n \geq N$ ) in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$  liegen, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq N.$$

Anderer Sprechweisen für die Konvergenzbedingung (2.1) sind

- die Folgenglieder  $a_n$  liegen schließlich in jeder (noch so kleinen  $\epsilon$ )  $\epsilon$ -Umgebung des Grenzwerts  $a$ .

Soll heißen  
 ob einem bestimmten  
 $N$ , das  
 $\forall n \geq N$

bzw

- in jeder (noch so kleinen?)  $\epsilon$ -Umgebung des Limes  $a$  liegen fast alle Folgenglieder  $a_n$  liegen.

Soll heißen: alle bis auf endlich viele; nämlich bis auf  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$

[Weitere gültige & ungültige Formulierungen in der UE]

Wir machen noch die folgenden Sprechweisen offiziell

### 2.8 DEF (Divergent, Nullfolge)

(i) Ist eine Folge  $(a_n)$  nicht konvergent (d.h.  $\nexists a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ ), dann heißt  $(a_n)$  divergent.

(ii) Gilt  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), dann heißt  $(a_n)$  Nullfolge.

### 2.9 BEHANDLUNG VON BSP (Aber schön & gut, aber wie zeige ich konkret $a_n \rightarrow a$ ?)

(i) Will ich konkret für gegebenes  $(a_n)$ ,  $a$  zeigen, dass  $a_n \rightarrow a$ , dann muss

für jedes  $\epsilon > 0$  ein Folgenindex  $N$  gefunden werden

i.o. schwerer für kleine  $\epsilon$

der darf ruhig von  $\epsilon$  abhängen und wird es i.o. auch tun; oft schreibt man deshalb  $N(\epsilon)$

sodass die Abschätzung  $|a_n - a| < \epsilon$  für alle  $a_n$  nach  $a_N$  gilt.

GROSSE FETTE WARNUNG: Niemals darf umgekehrt  $\epsilon$  von  $N$  abhängen vpl. [ETA, 3.2.3.3]

~~$\epsilon(N)$~~

(ii) Will ich hinzeigen zeigen, dass  $a_n \rightarrow a$ , so muß (nur) ein Versper- $\epsilon$  gefunden werden, sodass die  $a_n$  beliebig spät aus der  $\epsilon$ -Umgebung rauskriechen. Das ergibt sich nämlich aus der Verneinung der Konvergenzbedingung

$$\neg (\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon) =$$

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N: |a_n - a| \geq \epsilon$$

Es gibt zumindest ein Versper- $\epsilon$

sodass egal wie spät

es immer noch ein  $n$  gibt

sodass  $a_n$  nicht in  $U_\epsilon(a)$  liegt

- (iii) Bei konkreten Bsp ist es also f"urderlich zuerst eine Vermutung "uber Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuweisen, also entweder (i) zu jedem  $\epsilon > 0$  einen Index  $N(\epsilon)$  zu finden, ab dem alles gut ist, oder (ii) ein Versagen- $\epsilon$  zu finden f"ur das auch beliebig sp"ate Folgenglieder  $a_n$  aus der  $\epsilon$ -Umgebung abhalten.

Bevor wir jetzt endlich mit konkreten Bsp anfangen, noch eine einfache aber wichtige

2.10 BEOBACHTUNG (Der Folgenanfang ist egal)

Aus der Def 2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge  $(a_n)$  "andern, wenn endlich viele Folgenglieder ver"andert oder punktweises werden

[d.h.  $\exists M \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall n \geq M$  die  $a_n$  gleich bleiben - es wird also nur am Folgenanfang herumgehobelt]

2.11. BSP

(i) Konstante Folgen konvergieren.

Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und  $b_n = c \forall n$  [2.3cii)]  
dann gilt  $\lim b_n = c$ .

Denn sei  $\epsilon > 0$  beliebig, w"ahle  $N = 0$ , dann gilt

$|b_n - c| = 0 < \epsilon \forall n \geq N$

bonales Bsp

So bonal, das  $N$  von  $\epsilon$  unabh"angig w"ahlbar

(ii)  $(\frac{1}{n})$  ist eine Nullfolge

des Erbspiels  
on changing  
vgl. 1.3 (iii)

Eigenschaft  
Archimedes

Sei  $\epsilon > 0 \xrightarrow{1.3(ii)} \exists N \in \mathbb{N}: \frac{1}{N} < \epsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N: |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

[Bemerkung 1.3 (ii) ist nichts anderes als die Feststellung Archimedes  $\Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ; es gilt aber auch " $\Leftarrow$ " siehe UE]

(iii) Die Vorzeichenmaschine divergiert.

Unschäulich  
klar oder?

Sei  $(a_n) = (-1)^n$ , dann gibt es kein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ .

Wir beweisen das indirekt. [Für einen Beweis direkt über der Def mit Versorge  $\epsilon$ 's  $\rightarrow$  UE]

Ang  $\exists a \in \mathbb{R}: a_n \rightarrow a$ .

Setze  $\epsilon = 1/2 \xrightarrow{2.6} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \epsilon = 1/2 \quad \forall n \geq N$  (\*)

Zusätzlich bemerke  $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(1)(-1-1)| = 2$

Dann ergibt sich  $\forall n \geq N$

$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n|$

fiere Trick!

$\Delta$ -Ungl  $\rightarrow \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (\*)

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

[Diese Konvergenz kann nach 2.5 (ii) bzw UE vermutet werden]

Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > 1/\epsilon$  [vgl. (ii)]

Dann gilt  $\forall n \geq N$

$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n - (n+1)}{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

Wie das  
Amer im  
Nebel



(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$  [Vermutung wiederum nach 2.5(iii) bzw. <sup>37</sup> UE]

Wir verwenden folgendes

LEMMA  $\forall n \geq 4: n^2 \leq 2^n$  [Beweis UE 10] 1(ii)]

Es gilt also  $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 4$ . (\*)

ok wegen (ii)

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und wähle  $N$  so dass  $N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right)$  (\*\*)

Dann gilt  $\forall n \geq N$

$$\left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \stackrel{(**)}{=} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2.12 MOTIVATION (Noja - zum Teil part schon trickreich...)

Wir haben gesehen, dass beim Bearbeiten von konkreten Bsp einiges an Kreativität und auch Übung nötig ist...  
Bereits wir weitere wichtige Bsp angehen erweitern wir unseren Begriffsaппarat - was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

2.14 DEF (Beschränkte Folge) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge.

$(a_n)$  heißt noch  $\left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$  beschränkt, falls  $\exists K \in \mathbb{R}$ :

$$a_n \left\{ \begin{array}{l} \leq K \\ \geq K \end{array} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(a_n)$  heißt beschränkt, falls  $(a_n)$  noch oben und unten beschränkt ist.

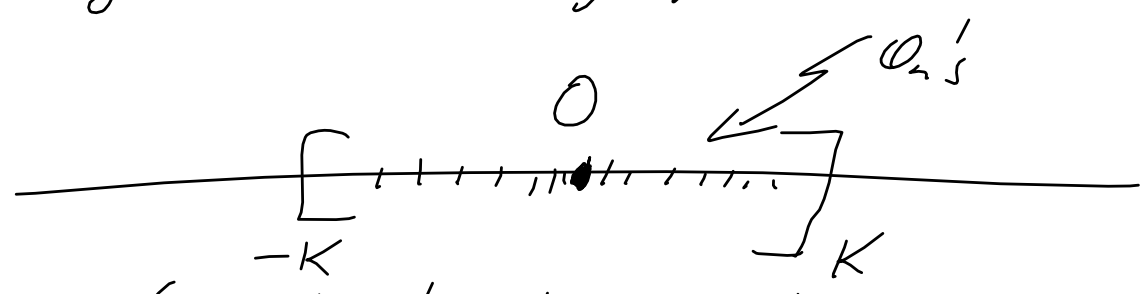
### 2.15 BEOBSACHTUNG (Beschränkte Folgen sind eingesperrt)

Def 2.14 besagt,

$$(a_n) \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists K > 0: |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Wähle das Max der  $K$ 's in 2.14 für oben bzw unten]

Geometrisch bedeutet das, dass alle  $a_n$  im Intervall  $[-K, K]$  liegen (also dort eingesperrt sind)



### 2.16 Bsp (un)-beschränkte Folgen

(i)  $a_n = n$  ist nach unten durch 0 beschränkt  
 $\neg [a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}]$   
 aber nicht nach oben

d.h.  $K$  kann  
 gewählt werden

[Folgt direkt aus dem Archimed. Axiom:  
 $\forall K > 0$  gibt  $\exists n \in \mathbb{N}: n > K$  [ $x=1, y=K$ ]]

(ii)  $(\frac{1}{n})$  ist beschränkt.  
 noch unten  
 beschr.

$(\frac{1}{n})$  ist durch 0 n.u.b. [ $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, [0] 1.5 (Pr)$ ]  
 und durch 1 n.o.b. [ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall 1 \leq n \in \mathbb{N}$ ]

Die Tatsache, dass die konvergente Folge  $(\frac{1}{n})$  beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein allg. Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

2.17 SATZ: (Konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt)

Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt

Beweis. Sei  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - 0| < 1 \forall n \geq N$

(Schon wieder das...)

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - 0 + 0| \leq |a_n - 0| + |0| \leq 1 + |0|$$

Nun setze  $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |0| + 1\}$ .

Dann gilt  $|a_n| \leq K \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$   
□

2.18 WARUM (beschränkt  $\not\Rightarrow$  konvergent)

Die Umkehrung von 2.17. ist FALSCH. Ein Gegenbsp ist etwa die Vorzeichenmaschine  $a_n = (-1)^n$ :

$|a_n| \leq 1 \forall n$  aber  $a_n$  divergent nach 2.11(iii)

Wir arbeiten nun unsere Beispielliste aus 2.5 weiter ab.

2.19 BSP

(i) Die Fibonaccifolge ist divergent.

$f_0 = 0, f_1 = 1$   
 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Wir zeigen, dass  $(f_n)$  unbeschränkt ist

$\stackrel{2.18}{\Rightarrow} (f_n)$  divergent.

Genaue behaupten wir:  $f_n \geq n \forall n \geq 5$

Beweis mittels Induktion:

$n=5: f_5 = 5$  (vgl. 2.5(iii))

$n \rightarrow n+1: f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq n + (n-1) \geq n + (2-1) = n+1$   
(iv)

$n \geq 6$

□

(ii) Für ein (beliebiges oder fixiertes)  $x \in \mathbb{R}$  betrachten wir die geometrische Folge  $d_n = x^n$

Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von  $x$  ab

FALL (1):  $|x| > 1 \Rightarrow x^n$  divergent

Wachstum von  $|x|^n$

$|x| > 1 \stackrel{1.5(ii)}{\Rightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: |x|^n > K$

$\Rightarrow x^n$  unbeschränkt  $\stackrel{2.17}{\Rightarrow} x^n$  divergent

FALL (2):  $|x| = 1$  also  $x = 1 \Rightarrow d_n = 1 \forall n \stackrel{2.1(ii)}{\Rightarrow} d_n \rightarrow 1$   
oder  $x = -1 \Rightarrow d_n = (-1)^n \Rightarrow$  div  $\stackrel{2.1(iii)}{\Rightarrow}$

FALL (3):  $|x| < 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

der interessanteste Fall

Falls  $x = 0 \Rightarrow x^n = 0 \forall n \geq 1 \stackrel{2.1(ii)}{\Rightarrow} d_n \rightarrow 0$

das vor leicht

Blibt nur der Fall  $0 < |x| < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$

$\stackrel{1.5(ii)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |x|^n < \varepsilon$  und damit  $\forall n \geq N$   
 $[b = |x|]$

$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon$

### 2.20 HOPPALA (Der Grenzwert?)

Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge geredet. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa 2 oder 3? Zum Glück gilt...

vpl. die Annahme in [ETA, page Box 17.118]

## 2.21. SATZ (Eindeutigkeit des Limes)

Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes

Beweis. [Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe 2 verschiedene Limes und folgern daraus einen Widerspruch.]

Ang:  $\exists a \neq b$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b \Rightarrow \frac{|a-b|}{3} =: \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$$

$$\underbrace{|a-b|}_{a \neq b} = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \underbrace{2\varepsilon}_{= \frac{2}{3}|a-b|}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3} \quad \downarrow$  □

## 2.22 MOTIVATION (Wäre theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz)

Grenzwert im Sinne von 2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limeswerten weitere Hilfestellungen bitte nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können um Grenzwerte komplizierterer Folgen zu berechnen

## 2.23. Satz (Summen & Produkte konvergenter Folgen)

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente (reelle) Folgen.  
Dann konvergieren auch  $(a_n + b_n)_n$  und  $(a_n \cdot b_n)_n$   
und es gilt

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

Die Summe konvergenter Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte;  
dieses für II

Beweis. Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b := \lim b_n$

Summe: Wir müssen zeigen, dass  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ .

Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2 > 0$  und daher

$$\exists N_1 \forall n \geq N_1 \quad |a - a_n| < \varepsilon/2, \text{ und}$$

$$\exists N_2 \forall n \geq N_2 \quad |b - b_n| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(N_1, N_2)$$

$$\underbrace{|(a_n + b_n) - (a + b)|} = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon$$

Produkt: zz:  $a_n b_n \rightarrow ab$

$(a_n)$  kons.  $\stackrel{2.17}{\Rightarrow}$   $(a_n)$  beschr., genauer:  $\exists K_1 > 0: |a_n| \leq K_1 \forall n$

Definiere  $K := \max(K_1, |b|) > 0$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2K > 0$  und wegen  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon/2K \quad \forall n \geq M_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq M := \max(M_1, M_2)$$

$$\underbrace{|a_n b_n - ab|} = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b - b_n) + (a_n - a)b|$$

$$\Delta\text{-Ungl.} \rightarrow \leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|$$

$$\leq K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon \quad \square$$

2.24 Bem (Polierte Beweise) Notw\u00e4ndig ist insbesondere der letzte Beweis Polierter, in dem Sinn, dass  $\varepsilon$  und  $K$  so gew\u00e4hlt wurden, dass am Schluss  $\leq \varepsilon$  da steht und nicht etwa  $2K\varepsilon$ . Letzteres w\u00e4re zwar auch okay, aber eben nicht ganz so l\u00e4ssig. [VE]  $\rightarrow$

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der  $\Delta$ -Ungleichung in der entscheidenden Absch\u00e4tzung von  $\varepsilon/2$ -Beweisen [vgl. Summe in 2.23]. Wir werden aber sehr bald auch  $\varepsilon/3$ -Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der  $\Delta$ -Ungl. angeleitet. Statt weiterer „Methodologie“ lieber eine (einfache) Folgerung aus 2.23

2.25 Kor: (Linearkombinationen konv. Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
Dann konvergiert auch die Folge  $(\lambda a_n + \mu b_n)$  und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$$

Bew. Das Korollar folgt aus 2.23 mittels eines Tricks:  
Wir interpretieren die Folge  $(\lambda a_n)_n$  als Produkt zweier Folgen

$$(\lambda a_n)_n = (\lambda)_n \cdot (a_n)_n$$

Konstante Folge  $(\lambda)_n \rightarrow \lambda$  (2.11(i))  $\xrightarrow{2.23} \lambda a_n \rightarrow \lambda \lim a_n$

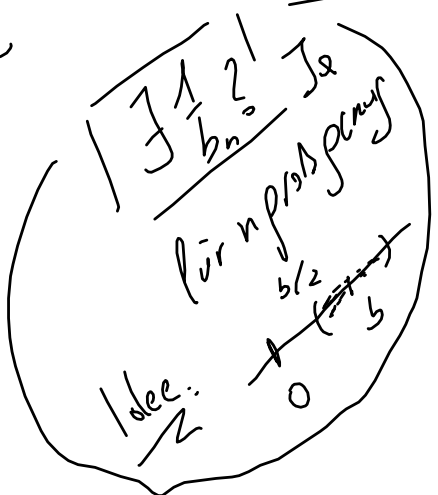
Analog folgt  $\mu b_n \rightarrow \mu \lim b$  und mit dem Summenteil in 2.23 haben wir insgesamt

$$(\lambda a_n) + (\mu b_n) \rightarrow \lambda \lim a + \mu \lim b \quad \square$$

### 2.26 SATZ (Quotienten konvergente Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente (reelle) Folgen mit  $\lim b_n =: b \neq 0$ .  
Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $b_n \neq 0 \forall n \geq n_0$ ,  
die Quotientenfolge  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$  konvergiert  
und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$



Beweis: Sei  $q := \lim a_n$

(1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass  $b_n \neq 0$  für große  $n$ :

$$b \neq 0 \Rightarrow |b|/2 \quad (=: \varepsilon') > 0$$

$$\stackrel{(b_n \rightarrow b)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

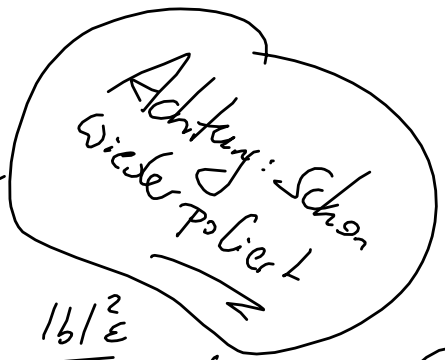
$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \frac{|b|}{2} > |b_n - b| > |b| - |b_n| \Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad (*)$$

umgekehrte  $\Delta$ -Ungl

(2) Wir zeigen  $(\frac{1}{b_n})_{n \geq n_0} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon'' := \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} > 0$$

$$\stackrel{[b_n \rightarrow b]}{\Rightarrow} \exists N_1 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad (**)$$



$$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_1)$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (***)$$



(3) Aus Satz 2.23 folgt sofort  $\frac{0_n}{b_n} = 0_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{b} = \frac{0}{b}$   $\square$

2.27 BSP (Im Sinne von 2.22)

$$\lim \frac{3n^2 + 13n}{n^2 + 2} = \lim \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \stackrel{[2.26]}{=} 3$$

Trick: dividiere Zähler und Nenner durch das jeweils höchste n-Potenz

$3 + \frac{13}{n} = 3 + 13 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 3 + 13 \cdot 0 = 3$   
[2.25, 2.26]

$1 + \frac{2}{n^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1$   
[2.23, 2.25, 2.26]

2.28 SATZ (Größenvergleich konvergenter Folgen)

Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  (d.h.  $\exists n_0 : a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ ) dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n$$

Beweis:

Idee:  $0 \leq c_n$   
~~(+)~~  
kann nicht Lim sein

• Setze  $c_n := b_n - a_n \Rightarrow c_n \geq 0$  für fast alle  $n$   
 $\Rightarrow \exists c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$

Daher genügt es zu zeigen, dass  $c \geq 0$

• Indirekt ang  $c < 0$ . Setze  $-c := \epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$

$$\epsilon > |c_n - c| = |c_n - (-\epsilon)| = |c_n + \epsilon| = c_n + \epsilon$$

$\Rightarrow 0 > c_n \forall n \geq N$   $\swarrow$  WID  $\quad [c_n \geq 0, \epsilon > 0]$

$\square$

2.29 Satz (Sandwich-Lemma) Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle)

Folgen und  $n_0$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$$

und  $a_n \rightarrow a, c_n \rightarrow a$ . Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und es gilt  $b_n \rightarrow a$ .

Beweis: Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 \left\{ \begin{array}{l} |a_n - a| < \varepsilon \\ |c_n - a| < \varepsilon \end{array} \right.$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N := \max\{n_0, N_0\}$$

$$\stackrel{(-a)}{\Rightarrow} -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow b_n \rightarrow a. \quad \square$$

2.30 Bsp (Wieder im Sinne von 2.22; mit einem Bonus)

Sei  $(n \geq 1)$

$$b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

Es gilt  $n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow n < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}$   
und daher

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n\text{-mal}} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Sandwich-L  $\Rightarrow b_n \rightarrow 0$

$$[a_n = 0, c_n = \frac{1}{n}]$$

2.31 Warnung (Kann 2.28 für  $< \text{statt } \leq$ )  $(a_n), (b_n)$  konv;

$$a_n < b_n \text{ (sogar)} \quad \forall n \stackrel{2.30}{\not\Rightarrow} \lim a_n < \lim b_n$$

$$\stackrel{2.28}{\Rightarrow} \lim a_n \leq \lim b_n$$

Das ist der Bonus von 2.30

## 2.32 MOTIVATION (Unendliche Reihen - Formulierung)

Einige der bisher untersuchten Folgen waren als Summen gegeben (z.B. 2.5(vi) = die geometrische Reihe, 2.30). Genauer, sei  $(a_n)_n$  eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Def unten) durch Summieren

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vage - um ihn genauer zu fassen betrachten wir die sog. Partialsummen

$$S_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{k=0}^m a_k$$

und fassen  $(S_m)_m$  als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen - nämlich als die Folge der Partialsummen - auffassen und so alle, was wir über Folgen schon herausgefunden haben verwenden. Nun offiziell.

## 2.33 DEF (Reihe) Sei $(a_n)$ eine Folge.

(i) Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $m$ . Partialsumme

$$S_m := \sum_{n=0}^m a_n$$

(ii) Die Folge  $(S_m)_m$  der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe mit Gliedern  $a_n$  und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\text{oder kurz } \sum a_n) \quad \text{bezeichnet.}$$

(iii) Konvergiert  $(S_m)$ , so sagen wir auch die Reihe konvergiert. Wir bezeichnen  $\lim S_m$  ebenfalls mit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (kurz  $\sum a_n$ ) nennen ihn Summe der Reihe.

2.34 BEM (Zur Notation) Das Symbol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ( $\sum a_n$ ) steht also für 2 Dinge

- (i) die Reihe selbst, also die Folge  $(S_m)_m$  der Partialsummen
- (ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n$$

Grenzwertoper zu Folgen betrachten wir auch Reihen  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  für ein beliebiges  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ .

2.35 BSP: Sei  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  ( $n \geq 1$ ). Die korrespondierende Reihe ist dann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Bemerkung, dass  $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$ .  $\left[ \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 - n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \right]$   
Daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned}
 S_m &= \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots \\
 &\quad \dots + \left( \frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1} \right) + \left( \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \right) = \frac{m}{m+1} \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

Wie in 2.22

Wzr 2.11 (iv)

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 1 \right\}$$

## 2.36 HOPPALA (Reality check)

Wie können wir intuitiv verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Zahlen nicht unendlich ergibt, also konvergiert - so wie in Bsp 2.35 passiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1 \quad ?$$

Notürlich werden die  $a_n$  immer kleiner; ergibt sogar

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0 \quad \left[ 0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ dann Sandwich-} \right.$$

Aber warum (bzw. wann) reicht das? Lemma]

Für eine intuitive Antwort betrachten wir eine Torte. Zunächst essen wir die halbe Torte, dann (sparsamerweise) von der verbliebenen Hälfte die Hälfte usw. Es ergibt sich die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann - Wir hoffen je nur eine Torte! Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Bsp sehen werden.



## 2.37 BSP (Die geometrische Reihe)

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig oder fix. Wir betrachten

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Praktischerweise haben wir in 1.6

schon die Partialsummen  $S_m$  ausgerechnet:

$$S_m(x) = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (*)$$

DAS ist Bsp

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 2.19(ii) (wo wir prob-  
tischweise schon das Konvergenzverhalten der Glieder  $x^n$   
berechnet haben).

FALL (1):  $|x| > 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent

$$S_m = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} - \frac{1}{1-x} x^{m+1} \Rightarrow S_m \text{ unbeschr.} \Rightarrow S_m \text{ div}$$

2.17

↑  
unbeschränkt nach 2.19(ii)

FALL (2):  $|x| = 1 \Rightarrow \sum x^n$  divergent

Sei  $x=1 \Rightarrow S_m \stackrel{(*)}{=} m+1$  unbeschr  $\Rightarrow$  div.

$$\text{Sei } x=-1 \Rightarrow S_m \stackrel{(*)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow S_m$  divergent (analog V7-Maschine 2.19(iii))

FALL (3):  $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$S_m \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x} \rightarrow 0 \text{ [2.19(ii)]}$$

$$\frac{1}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

↑  
[2.23]

der wichtigste  
Fall D

Eine der  
wichtigsten  
Formeln der VO

Als Spezialfälle von Fall (3) betrachten wir  $x = \pm 1/2$ .

Wir erhalten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

vpl. Torke  
2.36

2.38 BEM (Konvergenz von Reihen) Im Vergleich zu „normalen“ Folgen ist es oft schwieriger die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier holten wir nur ein einfaches strukturelles Resultat für Summen (LK) konv. Reihen fest-Produkte sind komplizierter... später

2.39 PROP (Linearkombinationen konv. Reihen)

Seien  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergente Reihen und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , dann ist auch  $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$  konvergent und es gilt

$$\left. \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right\}$$

Beweis. Wende Kor 2.25 auf die Partialsummen an. [UE] I

2.40 BSP: (Periodische Dezimalzahlen) Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die

periodische Dezimalzahl  $x = 0,086363\bar{63}$  ←

Das bedeutet, dass  $x$  folgenden Wert hat

$$x = \frac{8}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$

$$= \frac{8}{100} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \dots = \frac{8}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}}$$

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}} \stackrel{[2.39]}{=} \frac{63}{10^4} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k \stackrel{[2.37]}{=} \frac{63}{10^4} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000} \frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{855}{990} = \frac{19}{220}$$

Schreibweise:  
63 wiederholt  
sich immer

2.41 Motivation. (Ein genauer Blick auf divergente Folgen)

Zum Abschluss dieses Kapitels werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet

- die Vorzeichenmaschine  $(-1)^n$  ist divergent aber beschränkt
- $a_n = n$  ist unbeschränkt und (dabei) divergent.

Wir führen nun für diese 2. Art - nämlich über alle Schranken hinauswachsend - der Divergenz einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmte“ Divergenz.

2.42 DEF (Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz)

(i) Eine (reelle) Folge  $(a_n)$  heißt uneigentlich konvergent oder bestimmt divergent gegen  $+\infty$  (oder kurz  $\infty$ ), falls

$$\{ \forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : a_n > K \quad \forall n \geq N$$

Wächst schließlich über jede Schranke hinaus

In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  [ $a_n \rightarrow \infty$ ]

(ii) Wir sagen  $a_n$  konvergiert uneigentlich, oder divergiert bestimmt gegen  $-\infty$ , falls  $(-a_n) \rightarrow \infty$  und schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  [ $a_n \rightarrow -\infty$ ].

2.43 BEOBACHTUNG (Bestimmte Dir. & Schranken)

(i)  $a_n \rightarrow -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : a_n < K \quad \forall n \geq N$

(ii) Bestimmte divergente Folgen sind unbeschränkt, genauer:

$a_n \rightarrow \infty \implies (a_n)$  nach oben unbeschränkt

$a_n \rightarrow -\infty \implies (a_n)$  nach unten unbeschränkt



## 2.44 BSP (Bestimmt divergente Folgen)

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$$

(ii)  $a_n = (-1)^n n$  ist unbeschränkt daher divergent aber nicht bestimmt divergent, denn  $a_{2n} \rightarrow \infty$  und  $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$

Also ist die Umkehrung von 2.43 (ii) falsch

bestimmt divergent  $\not\Rightarrow$  unbeschränkt

## 2.45 Prop (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte)

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  (reelle) Folgen mit  $a_n \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, b_n, c_n \rightarrow \infty$

Dann gilt

$$(i) \lim (a_n + b_n) = \lim (b_n + a_n) = \infty$$

$$(ii) \lim (b_n + c_n) = \lim (c_n + b_n) = \infty$$

$$(iii) \lim (a_n - b_n) = \lim (-b_n + a_n) = -\infty$$

$$(iv) \text{ falls } 0 > 0: \lim (a_n b_n) = \lim (b_n a_n) = \infty$$

$$(v) \lim (b_n c_n) = \lim (c_n b_n) = \infty$$

Beweis: [UE]

2.46 WARNUNG. Es gibt keine analogen Rechenregeln für

die Differenz uneigentlich divergenter Folgen bzw. das Produkt von unap. div. Folgen mit Nullfolgen:

$$\bullet \lim n = \infty, \lim n^2 = \infty, \lim (n - n) = 0, \lim (n - n^2) = -\infty$$

$$\bullet \lim \frac{1}{n} = 0, \lim \frac{1}{n^2} = 0, \lim \left(n \frac{1}{n}\right) = 1, \lim \left(n \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

2.47 Prop (Kehrwerte bes. div. Folgen & Nullfolgen)

Sei  $(a_n)_n$  eine (reelle) Folge

(i)  $\lim a_n = \infty$  [oder  $-\infty$ ]  $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$

und  $(\frac{1}{a_n})_{n \geq n_0} \rightarrow 0$

(ii)  $\lim a_n = 0, a_n > 0 \forall n$  [bzw.  $a_n < 0 \forall n$ ]  $\Rightarrow \lim (\frac{1}{a_n}) = \infty$  [bzw.  $-\infty$ ]

Beweis.

(i) • Es genügt  $a_n \rightarrow +\infty$  zu betrachten [vgl. Def 2.42(ii)]

• Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass wir  $\frac{1}{a_n}$  zumindest für große  $n$  bilden können. Er folgt unmittelbar aus Def 2.42(i) mit  $K=0$ :

$K=0 \stackrel{2.42(i)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > K=0 \forall n \geq n_0$

Bemerkung:  $\frac{1}{a_n} > 0 \forall n \geq n_0$

• Wir zeigen  $(\frac{1}{a_n})_{n \geq n_0} \rightarrow 0$ . Sei  $\epsilon > 0$ , setze  $K = \frac{1}{\epsilon}$

$\stackrel{2.42(i)}{\Rightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N} : a_n > K = \frac{1}{\epsilon} \forall n \geq N_0$

$\Rightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_0) : 0 < \frac{1}{a_n} < \epsilon$

(ii) [UE]

□

2.48 BSP.

$\lim (\frac{n}{2^n}) = 0 \stackrel{2.47(ii)}{\Rightarrow} \lim (\frac{2^n}{n}) = \infty$

[2.11(v)]  $\uparrow$   $[\frac{n}{2^n} > 0 \forall n]$

2.49 BEM (Bestimmte Divergenz vererbt sich nach oben resp. unten)

Falls  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  und  $a_n \rightarrow \infty$  dann folgt (direkt aus Def 2.42(ii))  $b_n \rightarrow \infty$ .

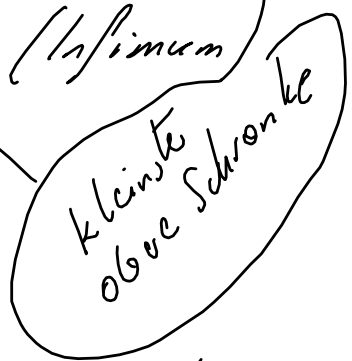
Analog für  $a_n \leq b_n$  und  $b_n \rightarrow -\infty$ .

§3 VOLLSTÄNDIGKEIT VON  $\mathbb{R}$ , KONVERGENZPRINZIPIEN

3.1. MOTIVATION (Ordnungsvollständigkeit) Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (auch Supremumseigenschaft; [0], 1.9.)

(V) Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (Infimum)

an wesentlichen Stellen verwendet. z.B. folgt die Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. [0] 1.11 (i)] und diese wiederum impliziert  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .



In diesem § wollen wir (V) und seinen Konsequenzen weiter nachspüren - (V) ist der rote Faden der sich durch die gesamte Analysis zieht.

Zu diesem Zweck benötigen wir erstmalig 2 neue Begriffe nämlich Teilfolge und Häufungswert um zu einem ersten Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

3.2 Motivation (Teilfolge) Wir lernen hier ein Verfahren kennen um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln - dieses ist intuitiv sehr einfach zu

verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verwirrend).

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge  $(a_n)$  erhält man, wenn man einige Glieder von  $(a_n)$  auslässt, z. B.

$(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$  hat etwa die TF  $(0, 4, 8, 16, \dots)$ ,  $(0, 6, 12, 18, \dots)$ , [alle durch 3 teilh.]  $(0, 4, 10, 18, \dots)$  [ $a_1, a_2$  ausgelassen,  $a_3, a_4$  ausgelassen, ...]

Wesentlich dabei ist es, dass

- nur Glieder der Ausgangsfolge  $(a_n)$  verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keinerlei Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder  $a_n$  verwendet werden [stad: Jede Folge ist TF von sich selbst] oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine TF von  $(a_n)$  sind z. B.

$(0, 1, 2, 4, 6, \dots)$  oder  $(0, 2, 6, 4, \dots)$  Reihenfolge verändert

kommt in  $(a_n)$  nicht vor bzw.  $(0, 2, 2, 4, 6, \dots)$  kommt doppelt vor

Technisch beschreibt man diesen Prozess indem man aus der Menge der Indizes  $0, 1, 2, 3, \dots$  gewisse  $a_{n_k}$  wählt also z.B.  $1, 3, 5, 7, \dots$  und damit die zugehörigen  $a_{n_k}$ 's, also  $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ . Dh aus  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gewisse  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  [hier  $n_0=1, n_1=3, n_2=5, n_3=7$ ] mit  $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$ . Nun offiziell:

3.3 DEF (Teilfolge) Sei  $(a_n)_n$  eine Folge.

Ist  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{N}$  (d.h. eine Folge natürlicher Zahlen) mit der Eigenschaft  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  (d.h.  $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ ) dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

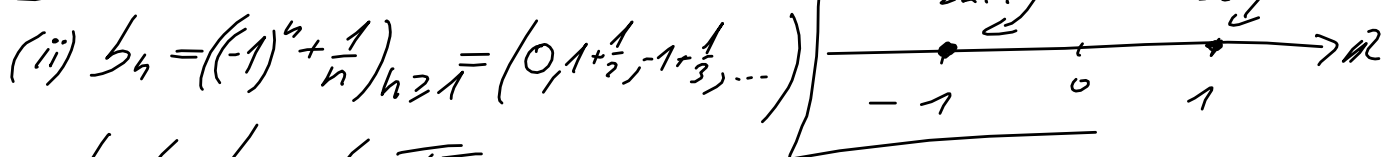
Teilfolge (TF) der Folge  $(a_n)$ .

d.h.  $n_k = 2k$

3.4 Bsp (TF)

(i)  $a_n = (-1)^n$  hat 2 TF  $(a_{2k})_k = (1, 1, \dots) = (1)_k$

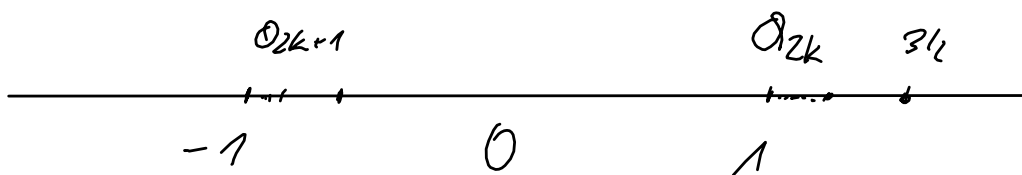
und  $(a_{2k+1})_k = (-1, -1, -1, \dots)$



hat etwa die TF

$$(b_{2k})_k = (1 + \frac{1}{2k})_{k \geq 1} = (1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \dots)$$

$$(b_{2k+1})_k = (-1 + \frac{1}{2k+1})_{k \geq 0} = (-1 + 1 = 0, -1 + \frac{1}{3}, \dots)$$



$$(iii) (c_n)_{n \geq 1} = (1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots) = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat etwa TF  $(c_{2k})_{k \geq 1} = (2k)$

$$(c_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2k+1})$$

(iv) i.a. gibt es mehrere Folgen von  $(n_k)_k$  um dieselbe TF zu erzeugen. So ist etwa auch  $(a_{4k}) = (1)_k$

(v) Keine TF von  $(o_n)$  ist  $(-1, 0, -1, 0, \dots)$  [0 kommt in  $o_n$  nicht vor]

Keine TF von  $(b_n)$  ist  $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  [ $1 + \frac{1}{3}$  kommt nicht vor]

bzw  $(-1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{5})$  [Reihenfolge falsch, d.h. Wahl von  $n_k$  mit  $n_k < n_{k+1}$ ]

### 3.5 Motivation (Häufungswert)

In 3.4 (ii) und (iii) haben die Punkte  $\pm 1$  eine spezielle Rolle: sie sind jeweils Grenzwerte von Teilfolgen

$$[o_{2k} = (1)_n \rightarrow 1, o_{2k+1} = (-1) \rightarrow -1, b_{2k} = (1 + \frac{1}{2k}) \rightarrow 1, b_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1]$$

Solche Punkte sind interessant & verdienen einen eigenen Namen:

### 3.6 DEF (Häufungswert einer Folge) Sei $(o_n)_n$ eine reelle Folge und $o \in \mathbb{R}$ .

$o$  heißt Häufungswert (HW) von  $(o_n)$ , falls eine Teilfolge  $(o_{n_k})_k$  von  $(o_n)$  existiert mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} o_{n_k} = o$$

### 3.7 Bsp (HW)

- (i) Sei  $o = \lim o_n$  dann ist  $o$  [zudem] auch Häufungswert
- (ii) Die VT-Ros line  $o_n = (-1)^n$  hat die beiden HW  $\pm 1$
- (iii)  $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat ebenso die beiden HW  $\pm 1$
- (iv)  $c_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$  hat einzigsten HW  $0$ .

### 3.8 Motivation (Wieviele Folgenglieder sind nahe zum HW?)

Sei  $o = \lim o_n$ , dann liegen in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $o$  fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele)  $o_n$

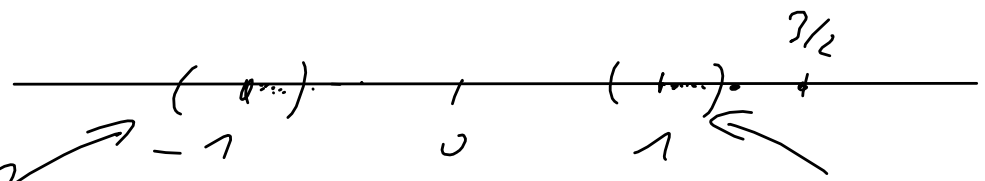
[Vpl. 2.7]

Gilt (nur)  $a$  ist HW von  $(a_n)$ , dann  $\exists$  (nur)  $\exists$   $\infty$   $a_{n_k}$  mit  $a_{n_k} \rightarrow a$ ; also liegen alle bis auf endlich viele der  $a_{n_k}$  in jedem  $U_\epsilon(a)$  - das sind zumindest unendlich viele der  $a_n$ . Diese Eigenschaft ist charakterisierend für HW - wie die nächste Prop lehrt. Vorher noch eine

Warnung: In obiger Situation müssen die alle bis auf endlich vielen  $a_{n_k}$  nicht schon alle bis auf endlich viele der  $a_n$  sein! Mit anderen Worten

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (3.7ii)  $\iff a$  HW von  $a_n$   $\iff a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k}$

Ein explizites Gegenbsp ist etwa  $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  mit HW  $\pm 1$  (3.7iii). In jedem  $U_\epsilon(1), U_\epsilon(-1)$  liegen unendlich viele  $b_n$ . Aber für  $\epsilon < 1$  gilt  $U_\epsilon(1) \cap U_\epsilon(-1) = \emptyset$  und daher können in keine der beiden Mengen fast alle  $b_n$  liegen (es bleiben für die andere viel zurück übrig!).



fast alle  $a_{2k+1}$   
 $\infty$ -viele  $a_n$

fast alle  $a_{2k}$   
 $\infty$ -viele  $a_n$

3.8 Prop (Charakterisierung von HW) Sei  $(a_n)$  eine (reelle) Folge,  $a \in \mathbb{R}$ .

$a$  ist HW von  $(a_n) \iff$  jede  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  enthält unendlich viele  $a_n$ , d.h.

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: a_n \in U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$

Die Folge kommt immer wieder in  $U_\epsilon(a)$  vorbei

Bewas. [Da es sich um eine Äquivalenz handelt....]

" $\Rightarrow$ ":  $\alpha$  HW von  $(\alpha_n) \xrightarrow{3.6.} \exists TF (\alpha_{n_k})_k: \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha$

Hierichtung

Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{2.6} \exists K \forall k \geq K \alpha_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$

Sei  $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_1 \geq K$  mit  $n_{k_1} \geq N$

[Def 3.3:  $n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$ ]

Setze  $m = n_{k_1} \Rightarrow \alpha_m = \alpha_{n_{k_1}} \in U_\varepsilon(\alpha)$

" $\Leftarrow$ ": Es gelte die Bed. auf der r. S. der Prop obs

$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N: \alpha_n \in U_\varepsilon(\alpha) (\neq)$

• Wir konstruieren induktiv eine TF  $(\alpha_{n_k})_{k \geq 1}$  von  $(\alpha_n)$  mit  $\alpha_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$

$k=1$ : Setze  $\varepsilon = 1 = \frac{1}{1} (\neq) \Rightarrow \exists n_1 \geq 1: \alpha_{n_1} \in U_1(\alpha)$

$k \mapsto k+1$ : Sei  $\alpha_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$  schon definiert

Setze  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}, N = n_k + 1$

$\xRightarrow{(*)} \exists n_{k+1} \geq N > n_k: \alpha_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(\alpha)$

• Wir zeigen  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha$ :

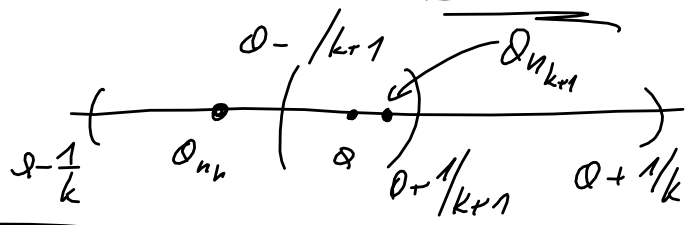
Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $K \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{K} < \varepsilon$  [1.3(ii)]

$\Rightarrow \forall k \geq K \quad |\alpha_{n_k} - \alpha| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$  ]

Do noch Konstruktion

$\alpha_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$

Idee der Konstruktion: Zoomen mit Umgebung





### 3.10 Motivation (In Richtung Bolzano-Weierstraß)

Wir wissen schon [2.7, 2.8]:  $(a_n)$  beschr  $\not\Rightarrow$   $(a_n)$  konvergent

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich die (abzählbar vielen) Folgenglieder in einem beschränkten Intervall tummeln – und dann müssen sich zumindest manche nahe kommen und einen HW bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reeller Folgen ist.

### 3.11 THEM (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert

Beweis. (1) Wir verwenden die Ordnungsvollständigkeit um einen Kandidaten für einen HW zu bekommen.

$a_n$  beschr  $\stackrel{\text{Def 2.14}}{\Rightarrow} \exists K > 0 : |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten die Menge

$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \geq x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n\} \subseteq \mathbb{R}$

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$ , denn  $K \in A$  [kein  $a_n$  erfüllt  $a_n > K$ ]
- $A$  ist n.u.b., denn falls  $x < -K \Rightarrow x \notin A$ , obwo ist  $\exists \delta > 0$   $K-1$   $\nearrow$  alle  $a_n \geq -K$  untere Schranke

(V) als Existenzannahme

Idee

(V)  $\Rightarrow \exists 0 := \inf A$

Hier positioniert es

(2) Wir zeigen, dass  $\alpha$  HW der Folge  $(a_n)$  ist: Sei  $\varepsilon > 0$

- $\alpha + \varepsilon > \alpha$  ist keine untere Schranke für  $A$  [ $\alpha = \inf A$ ]  
 $\Rightarrow \exists x \in A: \alpha < x < \alpha + \varepsilon$

$\stackrel{\text{Def } A}{\Rightarrow} a_n \leq x < \alpha + \varepsilon$  für fast alle  $n$ , d.h.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad a_n < \alpha + \varepsilon \quad (*)$$

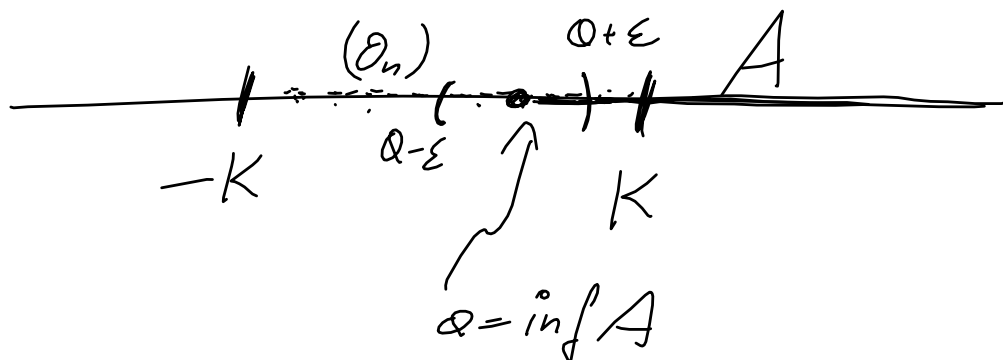
- $\alpha$  ist unt. Schr. v.  $A \Rightarrow \alpha - \varepsilon \notin A \stackrel{\text{Def } A}{\Rightarrow} a_n > \alpha - \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ , d.h.  
 $\forall n_1 \in \mathbb{N} \exists m \geq n_1: \alpha - \varepsilon < a_m \quad (**)$

- Kombination von  $(*)$  &  $(**)$  gibt die Beh.

Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben, dann wähle  $n_1 = \max(n_0, N)$

$$\left. \begin{array}{l} (**) \Rightarrow \exists m \geq n_1 \geq N: \alpha - \varepsilon < a_m \\ (*) \Rightarrow [m \geq n_0] \quad a_m < \alpha + \varepsilon \end{array} \right\} a_m \in U_\varepsilon(\alpha)$$

Skizze zur Konstruktion



### 3.12 BEM ( $a$ ist der größte HW)

Das im obigen Beweis konstruierte  $a$  ist der größte HW von  $(a_n)$ .

Dann sei  $b > a \xrightarrow{a = \inf A} \exists c \in A: a < c < b$

Setze  $\varepsilon = b - c (> 0?) \Rightarrow U_\varepsilon(b)$  enthält höchstens endlich viele  $a_n$  (für diese gilt  $\exists a_n > c \in A$ )

$\Rightarrow b$  ist nicht HW von  $x_n$

Analog dazu können wir auch den kleinsten HW von  $(a_n)$  konstruieren [dieser könnte gleich dem größten sein...]

Diese speziellen HW verdienen einen eigenen Namen

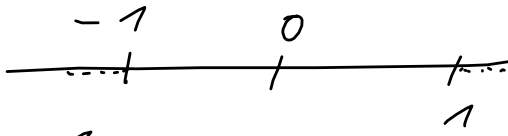
### 3.13 DEF ( $\liminf$ , $\limsup$ )

(i) Sei  $(a_n)$  eine beschränkte (reelle) Folge. Der größte [kleinste] HW  $a$  von  $(a_n)$  [wegen BV 3.11] heißt Limes superior [inferior] bzw. kürzer  $\limsup$  [ $\liminf$ ] und wir schreiben

$$a = \limsup a_n \equiv \overline{\lim} a_n \quad [\liminf a_n \equiv \underline{\lim} a_n]$$

(ii) Falls  $(a_n)$  nicht von oben [unten] beschränkt ist, dann setzen wir  $\overline{\lim} a_n = \infty$  [ $\underline{\lim} a_n = -\infty$ ].

### 3.14 BSP ( $\liminf/\sup$ )

(i)  $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$  

$$\limsup a_n = 1, \quad \underline{\lim} a_n = -1$$

(ii)  $a_n = n$  hat keinen HW und es gilt  $\overline{\lim} a_n = \infty$   
 $\nexists \underline{\lim} a_n$



3.16 DEF (Cauchy-Folge) Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt Cauchy-Folge (CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N |a_n - a_m| < \varepsilon$$

3.17 BEM (Bedeutung von CF)

Vir werden gleich sehen dass CF genau die konvergenten Folgen sind - daher erübrigt es sich Bsp. auszuschreiben.

Im Sinne von 3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung ob eine Folge  $(a_n)$  eine CF ist (im Prinzip) den Limes  $a$  nicht kennen muß [ $a$  kommt in 2.16 keines vor - das wird mit dem Auftreten von  $\mathbb{Z}$  Indizes ( $m \neq n$ ) erkauft ...].

3.18 THM (Cauchy-Prinzip) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Dann gilt

$(a_n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow (a_n)$  ist CF

Beweis.

" $\Rightarrow$ ": (die "leichte" Richtung - ein  $\varepsilon/2$ -Beweis)

Setze  $a := \lim a_n$

$\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N.$

Dann gilt  $\forall m, n \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ : (Die schwierige Richtung in 3 Schritten) Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$

(1)  $(a_n)$  ist beschränkt

Setze  $\epsilon = 1$  in 3.16  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < 1 \quad \forall m, n \geq N$

Setze  $m = N \Rightarrow |a_n - a_N| \leq |a_n - a_N| < 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| \leq |a_N| + 1 \quad \forall n \geq N$   
verkehrte  $\Delta$ -Ungl

Die ersten  $N$  Glieder erledigen wir wie im Beweis von 2.17:

Sei  $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ , dann gilt

$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) Bolzano-Weierstraß  $\Rightarrow \exists \varphi$  HW von  $(a_n)$

(3)  $a_n \rightarrow \varphi$ : [ $\epsilon/2$ -Beweis mit Hineinschmuppeln eines  $a_k$  nahe dem HW  $\varphi$ ]

Sei  $\epsilon > 0$ .

$(a_n) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N$  (\*)

$\varphi$  HW  $\Rightarrow \exists k \geq N \quad |a_k - \varphi| < \frac{\epsilon}{2}$  (\*\*)

Daher gilt  $\forall n \geq N$

Das ist die Idee!

$|a_n - \varphi| = |a_n - a_k + a_k - \varphi|$

$\leq |a_n - a_k| + |a_k - \varphi|$

$\stackrel{(*), (**)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$



3.19 BSP (Konvergenz ohne Limes) - NICHT VORGETRAGEN. 67

Sei  $(a_k)$  eine reelle Folge mit  $|a_k| \leq \theta < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$   $\downarrow$   
 Wir betrachten die Reihe  $\sum a_k^k$  und zeigen mittels  
 Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz  $\leftarrow$

(i) Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.

Wie üblich setzen wir  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k^k$ . Dann gilt für  $m < n$

vpl. 2.53

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k^k \right| \stackrel{\Delta\text{-Upl.}}{\leq} \sum_{k=m+1}^n |a_k|^k \leq \sum_{k=m+1}^n \theta^k$$

Trick 17

$$= \sum_{k=0}^n \theta^k - \sum_{k=0}^m \theta^k \stackrel{1.6}{=} \frac{1 - \theta^{n+1}}{1 - \theta} - \frac{1 - \theta^{m+1}}{1 - \theta}$$

$$= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1 - \theta} = \theta^{m+1} \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} \stackrel{\theta > 0}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1 - \theta} \quad (*)$$

(ii)  $(s_n)$  ist CF: Sei  $\varepsilon > 0$ .

Wegen  $0 \leq \theta < 1 \stackrel{1.5(ii)}{\implies} \exists N \in \mathbb{N}: 0 \leq \theta^{m+1} < \varepsilon(1 - \theta)$

Daher gilt  $\forall n > m \geq N$   $\forall m \geq N$

$$\underline{|s_n - s_m|} \stackrel{(*)}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1 - \theta} < \varepsilon \quad (**)$$

noch nicht fertig!

Grant analog beweist man (\*\*\*) für alle  $m > n \geq N$ .

Schließlich gilt für  $m = n \geq N$ , dass  $s_m - s_n = 0$

Also ist  $(s_n)$  insgesamt eine CF

(iii) 3.18  $\implies s_n = \sum_{k=0}^n a_k^k$  konvergiert

UND: Wir haben keine Ahnung was der Limes  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^k$  ist?  $\downarrow$   
 $\leftarrow$  iA kann dieses auch nicht berechnet werden.

### 3.20 MOTIVATION (Monotone Folgen - Konvergenzprinzip)

Um das in 3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschr. Folgen anzupassen müssen wir zuerst den ersten Begriff exakt fassen.

### 3.21 DEF (Monotonie von Folgen) Sei $(a_n)$ eine reelle Folge.

(i)  $(a_n)$  heißt [streng] monoton wachsend, falls

$$a_n \leq a_{n+1} \quad [a_n < a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

(ii)  $(a_n)$  heißt [streng] monoton fallend, falls

$$a_n \geq a_{n+1} \quad [a_n > a_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

(iii) Falls  $\exists N \in \mathbb{N}$  sodass  $(*)$  bzw.  $(**)$  nur  $\forall n \geq N$  gelten so sagen wir  $(a_n)$  hat die respective Eigenschaft ab  $N$ .

### 3.22 BSP (Monotone Folgen)

Die Fibonacci-Folge  $(f_n)$  [siehe 2.5 (iv)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab  $N=2$ .

Tatsächlich gilt  $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$  und  $f_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \quad \forall n \geq 2$$

### 3.23 BEMERKUNG. (Monotonie & Schranken)

(i) Eine mon. wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt, denn sei  $a_n \in \mathbb{C}$  dann gilt  $\forall n$

$$\mathbb{C} \ni a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 \quad \begin{array}{c} | \\ \hline a_0 \quad a_1 \end{array} \Big| \mathbb{C}$$



(ii) Analog für n.u.b. Folgen, die mon. fallen.

(iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen dass die Folgen sogar konvergieren. Vorher noch ein motivierendes

### 3.24 BSP (Approximation für $\sqrt{3}$ )

Sei  $x_0 > 0$ . Wir definieren rekursiv die Folge  $(x_n)$  via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

Bemerkung  $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . [Induktion]

(1)  $(x_n)$  ist n.u.b. genau für  $n \geq 1$ :  $\underline{3 \leq x_n^2}$ .

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 3 &= \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right)^2 - 3 = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{4} \left( x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{3}{x_n} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(2)  $(x_n)$  ist mon. fallend ab  $N=1$ .

Für  $n \geq 1$  gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n} \left( x_n^2 - 3 \right) \stackrel{(1)}{\geq} 0$$

(3)  $(x_n)$  konvergiert genau  $\exists x := \lim x_n$

laut dem in 3.23(iii) angekündigten Thm 3.25 (unten) das wir hier schon verwenden.

[Sinn ist es zu sehen, dass aus (3) ermöglicht  $\lim x_n$  auszurechnen!]

$$(4) \quad \lim x_n = \sqrt{3}$$

Zuerst bemerke  $0 < \sqrt{3} \leq x$  (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (\*) zum Limes über:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Also gilt } x &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} (x^2 + 3) \\ &\Rightarrow x^2/2 = 3/2 \Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Jetzt aber schleunigst zum Thm mit seinem atemberaubend einfachen Beweis

3.25 THM (KP für beschränkte monotone Folgen)

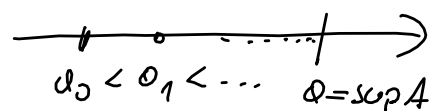
Jede nach oben beschränkte und [ab einem  $N \in \mathbb{N}$ ] monoton wachsende Folge konvergiert.

Analog für n.u.b und mon. fallende Folgen.

Beweis. Sei  $(o_n)$  n.o.b & mon. wachsend.

(1) Produzieren eines Kandidaten  
für  $\lim o_n$  [ (V) ob  
Existenzmaschine ]

Intuitives Bild:



die  $o_n$ 's werden gegen  $a$  gedrängt

Sei  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

3.23ci)  $\Rightarrow a_n$  beschränkt  $\Rightarrow A$  beschränkt  
 $[A \neq \emptyset, \text{klar}]$

$(\checkmark)$   
 $\Rightarrow \exists a := \sup A$

(2)  $\lim a_n = a$

nicht obere Schranke  
 et. Def sup

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$a = \sup A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: a - \varepsilon < a_N \leq a$

$(a_n)$  mon wachsend  $\Rightarrow \forall n \geq N: a - \varepsilon < a_n \leq a$

Daher  $\forall n \geq N$   $|a - a_n| < \varepsilon$ .

□

3.26 BEOBSACHTUNG ( $a_n \rightarrow \sup A$ )

Obiger Beweis zeigt explizit  $\lim a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 und in diesem Sinne wird das intuitive Bild  
 bestätigt: eine monoton wachsende n.o.b. Folge wird  
 gegen ihr Supremum gepunctscht?

Das motiviert auch das Studium von Mengen die best.  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 bzw. noch allgemeiner die folgenden [später  
 sehr wichtigen] Begriffe für Punktmenge in  $\mathbb{R}$ .

3.27 DEF (Berührungspunkt, Häufungspunkt)  
Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$

(i)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Berührungspunkt von  $A$ , falls  
 $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$

Jede  $\varepsilon$ -Umg.  
von  $a$   
enthält mind.  
einen Pkt  $a \in A$

(ii)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $A$ , falls  
 $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap A$  enthält unendlich  
viele Punkte

3.28 Bsp (BP & HP)

(i) Jedes  $a \in A$  ist BP von  $A$  [ $a \in U_\varepsilon(a) \cap A \forall \varepsilon$ ]  
Jeder HP von  $A$  ist auch BP von  $A$

(ii) Nicht jeder Pkt von  $A$  ist HP von  $A$ , denn  
 $A = \{0\}$  hat gar keine HP.

(iii) Sei  $A := [0, b)$  ein Intervall. Jedes  $x \in [0, b]$   
ist HP (und somit BP) von  $A$   
[Bemerkung  $b$  ist BP von  $A$  obwohl  $b \notin A$ ]

(iv)  $0$  ist HP von  $A = \{1/n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$   
[Bemerkung wiederum  $0 \notin A$ ]

3.29 BEM (HP vs HW) Sei  $(a_n)$  reelle Folge

Gilt  $a$  HW von  $(a_n) \Rightarrow a$  HP von  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$a$  ist die Folge

$\xrightarrow{0}$   
NEIN, denn

$a$  ist HP der Menge  
der Folgeglieder

Sei  $a_n = (1)_n \Rightarrow a = 1$  ist HW von  $a_n$

ABER  $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$  hat gar keine HP [3.28(ii)]

[Bemerkung: 1 ist immerhin BP von A]

[In der Literatur werden HW von Folgen auch oft als HP bezeichnet. Hier wird bewusst darauf verzichtet, da (mit dieser Bezeichnung)  $a$  HP von  $a_n$  ~~ist~~ & HP von  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ ]

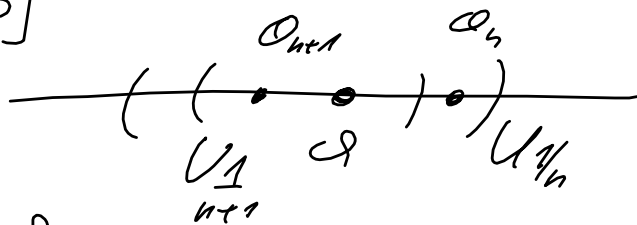
3.30 Prop (Einfache Eig von HP & BP) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$

- (i)  $a$  ist BP von  $A \iff \exists$  Folge  $(a_n)$  in  $A$  [d.h.  $a_n \in A \forall n$ ] mit  $a_n \rightarrow a$
- (ii)  $a$  ist HP von  $A \iff a$  ist BP von  $A \setminus \{a\}$

Bew. (i)

$\Rightarrow$ : Sei  $a$  BP von  $A \xrightarrow{3.27(ii)} \forall n \geq 1 \exists a_n \in \bigcup_{k=1}^n (a) \cap A$

So erhalten wir induktiv eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  [ $|a_n - a| < 1/n \rightarrow 0$ ]



$\Leftarrow$ : Ld. Voraussetzung

$\exists (a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N a_n \in U_\epsilon(a) \cap A \Rightarrow U_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$

(ii) [UE]

3.30A. BEW. Nach [0] 1. Müll liegt  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ . Das □

bedeutet, dass jedes  $x \in \mathbb{R}$  HP von  $\mathbb{Q}$  ist.

[ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  dicht:  $\xrightarrow{[0] 1. Müll} \forall x < y \in \mathbb{R} \exists p \in \mathbb{Q} : x < p < y \iff$  <sup>induktiv</sup> ~~sogar unendl. viele~~  $\iff \forall \epsilon \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}$  <sup>unendl.</sup>]

3.31 BZTT (BP beschränkter Mengen) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt.

(i) Sei  $(o_n)$  Folge in  $A \xrightarrow{\mathbb{B}^4}$   $(o_n)$  hat einen HW  $q$

$(o_n \text{ hat TF } o_{n_k} \text{ und } o_{n_k} \rightarrow q) \xrightarrow{3.30(ii)} q \text{ ist BP von } A$

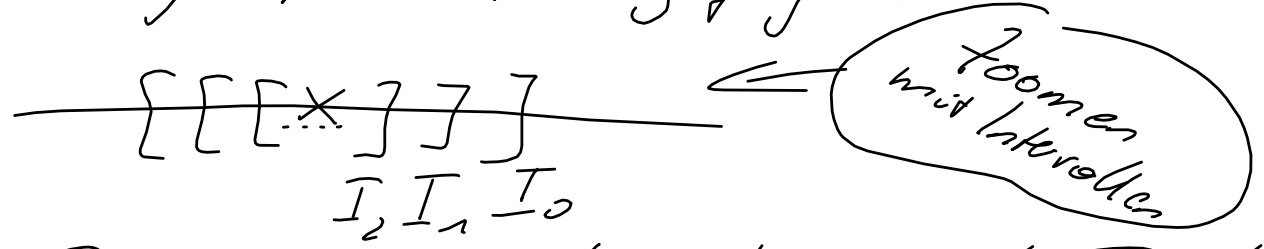
(ii)  $(V) \Rightarrow \exists q = \sup A \xrightarrow[\text{sup}]{\text{Det}}$   $q$  ist BP von  $A$

[Es gilt sogar  $\sup A$  ist Limes einer monoton wachsenden Folge in  $A$ : Wähle  $\alpha - \frac{1}{2} < q_0 \leq q$  und dann induktiv  $\forall n \geq 1: a_n \in A, a_n \geq a_{n-1}, \alpha - \frac{1}{n} \leq a_n \leq q$ . ]

3.32 Motivation (Intervallschichtelungsprinzip)

Wir leiten nun aus dem Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenz-Maschine“ her, die im Gegensatz zum CP sehr anschaulich ist:

Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, abgeschl. Intervalle sich zusammensieht, dann wird dabei ein eindeutiger Punkt in  $\mathbb{R}$  eingefangen.



Dieses Prinzip veranschaulicht nochmal die Tatsache, dass  $\mathbb{R}$  „keine Löcher“ hat

Doch zuerst zu den exakten Begriffen.

3.33 DEF (Durchmesser eines obg. Intervalls)

Seien  $a \leq b \in \mathbb{R}$  und  $I := [a, b]$ . Wir definieren den Durchmesser von  $I$  ob

$$\text{diam } I := b - a$$

3.34 THM (Intervallschichtelungsprinzip, (IP))

Sei  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eig

(i)  $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(ii)  $\text{diam } I_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

Dann existiert genau ein  $a \in \mathbb{R}$ , das in jedem  $I_n$  liegt, d.h.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Beweis. (Existenz) Seien  $I_n = [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N})$

(1) Die Folge  $(a_n)$  der linken Randpunkte ist eine (F.

Sei  $\varepsilon > 0$ . (ii)  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \text{diam } I_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$  (\*)

Seien also  $m, n \geq N$ .  $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} a_m, a_n \in I_N$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq \text{diam } I_N < \varepsilon \quad (*)$$

(2)  $\stackrel{3.18}{\Rightarrow} \exists a = \lim a_n$

(3)  $\forall n \geq k$  gilt:  $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $a_k \quad a \quad b_k$

(n  $\rightarrow$   $\infty$ )

(in n) konstante Folge

$$2.28 \Rightarrow a_k \leq a \leq b_k \quad (\forall k) \Rightarrow a \in \underline{I}_k \quad (\forall k)$$

(Eindeutigkeit). [folgt sofort aus (ii)]

Seien  $a, b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  dann gilt  $\forall n$

$$0 \leq |a-b| \leq \text{diam } I_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |a-b| = 0 \stackrel{(NM)}{\Rightarrow} a = b. \quad \square$$

3.35 BEOBSACHTUNG: Es gilt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$ ,

wobei  $a$  eindeutig festgelegt ist durch  $a = \lim a_n$   
 [und analog  $a = \lim b_n$ ] [NICHT VORGE-  
TRAGEN]

3.36 NACHBETRACHTUNG (Der rote Faden)

Diese  $\S$  war (neben anderen, praktischeren Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit ( $V$ ) gewidmet.

Genauer haben wir bewiesen:

$$(V) \Rightarrow (BW) \Rightarrow (CP) \Rightarrow (IS)$$

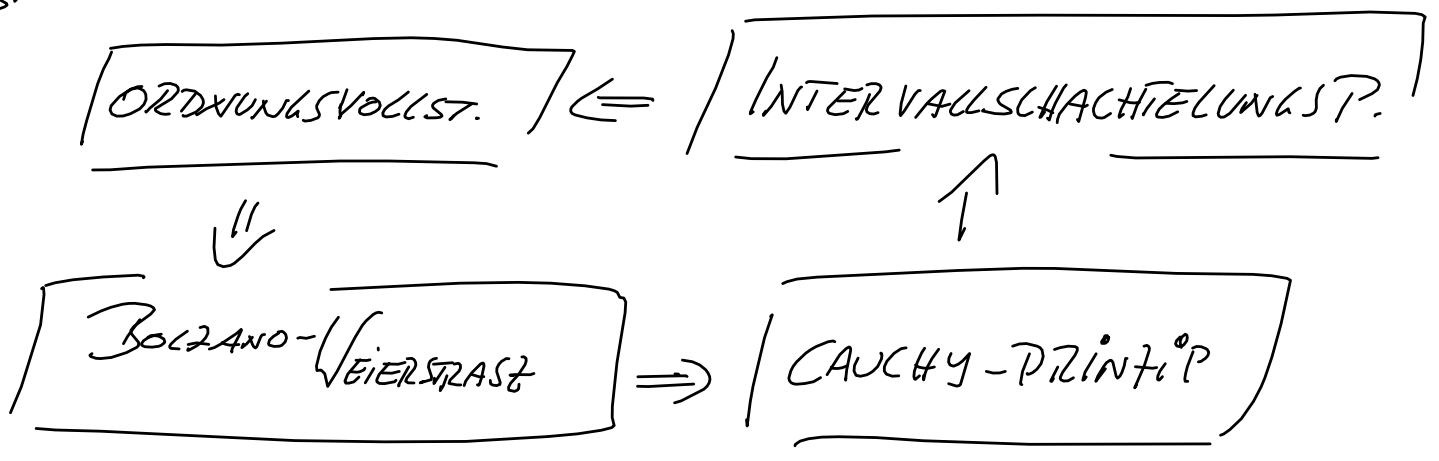
Es gilt aber auch  $(IS) \Rightarrow (V)$  [ohne Beweis; siehe [Hö] 3.16 Thm] und daher sind alle 4 Aussagen äquivalent.  $(BW)$ ,  $(CP)$  und  $(IS)$  sind also nur andere (fr. anschaulichere) Manifestationen der Ordnungsvollständigkeit ( $V$ ) von  $\mathbb{R}$ .



Daher spricht man oft auch einfach von der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , die durch jede der 4 Aussagen charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen zur Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Defs der Vollständigkeit finden [z.B. (CP) in Forster, (V) in Deise und Heuser und noch eine Variante (Konvergenz von Cauchy-Schritten) in Behrends] aber (immer) auch einen Satz der die Äquivalenzen herstellt — also besagt, dass alle diese Zugänge äquivalent sind.

Zum Abschluss des § noch einmal & vñ es so schön ist



# §4 REIHEN & KONVERGENZ

## 4.1. EINLEITUNG & AUSBLICK.

In diesem letzten § von Kap 11] beschäftigen wir uns ausführlich mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def 2.33). Wie bereits in 2.38 angekündigt ist es für Reihen id. schwieriger als für „normale“ Folgen Konvergenz nachzuweisen und i.φ. noch schwieriger den Grenzwert zu bestimmen – also die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der „normale“ Konvergenzbegriff für Reihen zu kurz greift: Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konv. Reihe nicht ebenfalls konvergieren muß – die Konvergenz hängt also von der Reihenfolge der Summanden ab! Dieser wirklich problematische Aspekt löst sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff zurückgeht nimmt. Die sog. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

Sehr  
Eckig?

Das klingt kompliziert; aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit abs. konv. Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir jetzt zum Schluß dieses § sehen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.

# 4.2 ERINNERUNG (Reihen - Sein & Schein) [vgl. 2.32-34]

Sei  $(a_n)$  eine (reelle) Folge,  $m \in \mathbb{N}$ .

Wir definieren die  $m$ -te Partialsumme der Reihe  $\sum a_n$  als

$$S_m = \sum_{n=0}^m a_n$$

und schreiben  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , falls

der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt - Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

oft lästiger als "normale" Folgen

Wir beginnen damit einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Als erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip [Thm 3.18] um auf den Fall von Reihen

4.3 PROP (Cauchy-Prinzip für Reihen) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine reelle Reihe, dann gilt

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  (4.1)

$\forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$

Beweis:  $\sum a_k$  konv  $\stackrel{\text{Def 2.33}}{\Leftrightarrow} S_m$  konvergent  $\stackrel{3.18}{\Leftrightarrow} S_m$  CF

$\stackrel{\text{Def 3.16}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |S_n - S_{m-1}| < \varepsilon \quad \forall n, m-1 \geq N$

$$= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^n a_k \quad \square$$

OBdA  $n \geq m-1$

Wail in 3.16 " $\forall m, n \geq N$ " können hier  $m \& n$  so gewählt werden.

## 4.4 BEW (Änderung endlich vieler Glieder)

(i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern (vgl. 2.10).

4.3. zeigt, dass dies auch für Reihen zutrifft:

Bedingung (4.1) wird von der Änderung endlich vieler  $a_k$ 's nicht berührt.

[exakt: Seien  $(a_n), (b_n)$  (reelle) Folgen und  $\exists M \in \mathbb{N}$   
 $\forall n \geq M: a_n = b_n$  und  $(a_n)$  erfüllt (4.1), dann auch

$(b_n)$ : Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \forall n, m \geq N_1 \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$   
 Wähle  $N := \max\{M, N_1\} \Rightarrow \forall m, n \geq N \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$

(ii) Weiters verändert sich der Limes einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden. Das ist bei Reihen anders. Offensichtlich ändert sich dann der Wert der Reihe, z.B.  $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{2.37}{=} \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \underset{1}{x^0} = \frac{1-1+1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Nun eine weitere wichtige Konsequenz aus 4.3.

## 4.5 KOR (Die Glieder konv. Reihen sind Nullfolgen)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow a_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$ . Setze in (4.1)  $m = n \geq N$

$$\Rightarrow \varepsilon > \left| \sum_{k=n}^n a_k \right| = a_n \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

□

#### 4.6. Prop (Beschränktheit der Partialsummen)

Sei  $\sum a_n$  eine Reihe nicht-negativer Zahlen (d.h.  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ), dann gilt

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow s_m = \sum_{k=0}^m a_k \text{ beschränkt} \right\}$$

Beweis.  $(\Rightarrow)$  folgt sofort aus 2.17

$(\Leftarrow)$  [Auf den ersten Blick überraschend [vgl. 2.18] auf den 2. Blick: Monotonie!]

•  $s_m$  ist mon. wachsend, denn

$$s_{m+1} = s_m + \underbrace{a_{m+1}}_{\geq 0} \geq s_m$$

3.25

$\Rightarrow s_m$  konv.

•  $s_m$  ist beschr. lt. Voraus.,

[Höchste Zeit für ein Bsp?]

#### 4.7 Bsp (konv & div. Reihen)

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1, 0, 1, 0, \dots)$  divergiert, weil [4.5

$$a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0$$

(ii) Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Erbsünde eine div. Reihe

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist  $\left[ \begin{array}{l} \xrightarrow{4.6} \\ a_n = \frac{1}{n} > 0 \end{array} \sum \frac{1}{n} \text{ div} \right]$

Wir betrachten  $S_{2^k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) (das ist der Trick  $\nabla$ )

$$S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n}$$

$n=1=2^0$      $n=2=2^1$      $n=4=2^2$      $n=8=2^3$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$      $\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Anzahl der Terme:  
 $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1)$   
 $= 2^{k-1}$

$$\dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$\geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

k Terme

Also  $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \Rightarrow S_n$  unbeschränkt.

### 4.8 GROSSE FETTE WARNUNG $\nabla$

Bemerk die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert, OBWOHL  $1/n \rightarrow 0$ . Daher ist die Umkehrung von 4.5 FALSCH. Es gilt also

$\sum 0_n \text{ konv.} \xRightarrow{4.5} 0_n \rightarrow 0$   
 ~~$\sum 0_n \text{ konv.} \Rightarrow 0_n \rightarrow 0$~~

einer der beliebtesten Fehler von AnfängerInnen

# 4.9 Bsp $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)$

(i) Sei  $\forall k \geq 2$ , dann ist  $\sum \frac{1}{n^k}$  konvergent

Da alle Glieder  $\frac{1}{n^k} \geq 0$  sind müssen wir mit 4.6 nur zeigen, dass  $S_m$  beschränkt ist. Dazu sei  $m \in \mathbb{N}$  gegeben; wähle  $\ell \in \mathbb{N}$  so dass  $m \leq 2^{\ell+1} - 1$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 S_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{n^k} && n=2^2-1=2^{1+1}-1 && n=2^{2+1}-1 \\
 &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)}_{\leq 2^{1/2^k}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right)}_{\leq 4^{1/4^k} = 2^2 \cdot 1/4^k} + \dots \\
 &\dots + \sum_{n=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{n^k} \leq 2^\ell \frac{1}{2^{\ell k}} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\ell} 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^{\ell} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}
 \end{aligned}$$

geom. Reihe 2.37

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (wortlich) auch für  $\forall k > 1$  - wir haben oben  $n^k$  für  $k \in \mathbb{Z}$  im Rahmen der  $\forall$  noch nicht definiert...

obere Schranke von  $S_m$  unabh. von  $m$

Wie auch immer, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{div für } s \leq 1 \\ \text{konv für } s > 1 \end{array} \right.$$

(iii) Für alle geraden potenzen  $k$  können die Summen sogar explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

wie wir später (Teil 2 des Zyklus) sehen werden

#### 4.10 THM (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei  $a_n \geq 0 \forall n$ . Wir betrachten die sog. alternierende

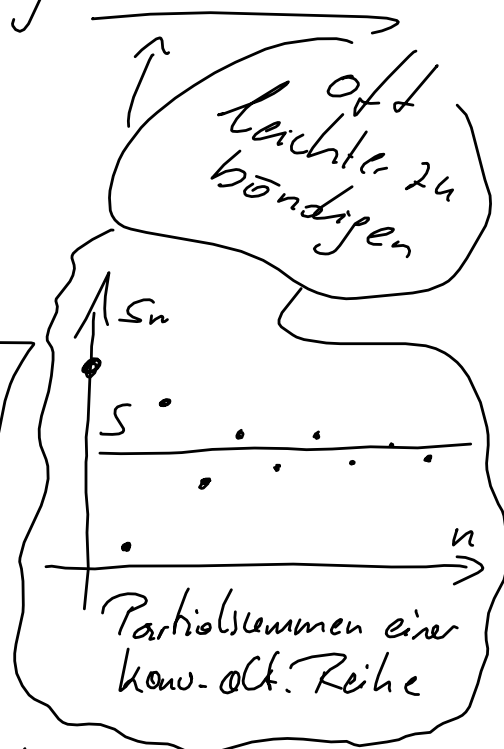
$$\text{Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

Falls gilt, dass

(i)  $a_n$  mon. fällt [ $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ ]

(ii)  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent



Beweis. • Betrachte TF der geraden/ungeraden Partiellsummen  $s_n$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \stackrel{(i)}{\leq} 0 \Rightarrow s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \quad (**)$$

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \stackrel{(i)}{\geq} 0 \Rightarrow s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \quad (***)$$

$$\text{Außerdem } s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \Rightarrow s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad (***)$$

Also  $(s_{2k})$  mon. fallend  $(**)$  & n.u.b. [ $s_{2k} \geq s_1$ ,  $(***)$ ]  $\stackrel{3.25}{\Rightarrow}$  Konv.

$$\text{d.h. } \exists S := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$$



Analog  $S_{2k+1}$  mon. wachsend  $[(**)]$  & n.o.b  $[(***)]$   $\Rightarrow$  konv  
 d.h.  $\int S' := \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1}$

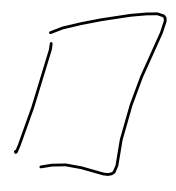
•  $S = S'$  denn  $\underline{S - S'} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 0$

•  $S_n \rightarrow S$ , denn sei  $\epsilon > 0$ .

$S_{2n} \rightarrow S \Rightarrow \exists N_1 \forall n \geq N_1 \quad |S_{2n} - S| < \epsilon$   
 $S_{2n+1} \rightarrow S \Rightarrow \exists N_2 \forall n \geq N_2 \quad |S_{2n+1} - S| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\} : |S_n - S| < \epsilon$

4.11 Bsp Die alternierende harmonische Reihe  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  konvergiert



noch 4.10 weil  $1/n$  mon. fallende Nullfolge.

4.12 Bem (zum Leibnizkriterium)

(i) Bemerk, dass 4.10 eine schwache Form der Umkehrung von 4.5 [ $\sum a_n$  konv  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ ] ist [vgl 4.8] denn 4.10 sagt

$a_n \rightarrow 0$  & mon fallend  $\Rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$  konv

(ii) Der Beweis von 4.10 liefert die folgende Fehlerabschätzung

$|S - S_m| \leq |S_{m+1} - S_m| = a_{m+1}$

$S_m$  läuft ja immer über  $S$  hinaus

[Nicht Vorzutragen]

## 4.13 BEMERKUNG & WARNUNG (Reihenkonv. ist instabil)

Wie bereits in 4.1. angekündigt können Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge

(i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen<sup>ob</sup> benötigen wir die folgende Notation:

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe und  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv, dann  
 $\sum$  heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$  eine Umordnung von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(ii) Umordnung konvergenter Folgen kann den Limes ändern.

Sei z.B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  die alternierende harm. Reihe

Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=1/2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=1/6} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=1/10} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=1/14} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right)$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

(iii) Umordnung konv. Reihen kann sogar zu Divergenz führen!

Wir ordnen nochmals die alt. harm. Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später und später auftreten ( $n \geq 2$ ):

Konv. wegen 4.11

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} + \dots$$

$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0}$ 
 $\underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6}}_{\frac{72}{8} = \frac{1}{4}}$ 
 $\underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8}}_{\frac{24}{16} = \frac{1}{4}}$

$p = 2^3 + 1$        $15 = 2^{3+1} - 1$        $8 = 2 \cdot 3 + 2$

# Terme =  $\frac{2^{n+1} - 2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} = 2^{n-1}$

$$\dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1-1}}\right) - \frac{1}{2^{n+2}}$$

$\rightarrow \geq 2^{n-1} / 2^{n+1} = 1/4$

$$> \frac{n-1}{4} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n+2}}\right) > \frac{n-1}{4} - \frac{n-1}{6} = \frac{n-1}{12}$$

# der Klammern mit pos. Termen  $\hookrightarrow n-1 =$  # der neg. Terme

Also müssen die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt sein  $\Rightarrow$  Reihe divergent

(iv) FAZIT: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff der solche Effekte ausschließt?

4.14 DEF (Absolute Konvergenz) Eine Reihe  $\sum a_n$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum |a_n|$  konvergiert

4.15 BEM (zur abs. Konv.)

(i) Wegen  $|a_n| \geq 0$  ergibt 4.

$$\left(\sum |a_n| \text{ konv.} \Leftrightarrow S_m = \sum_{n=0}^m |a_n| \text{ beschränkt}\right)$$

Reihe der Absolutbeträge der Glieder

(ii)  $\sum a_n$  konv  $\not\Rightarrow \sum |a_n|$  konv denn die harm. Reihe ist ein Gegenbsp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konv. [4.11]} \text{ aber } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div [4.7(ii)]}$$

Die Umkehrung ist aber richtig  $\leftarrow$  obs Konv ist also wirklich stärker als bloße Konvergenz

4.16 PROP (obs Konv  $\Rightarrow$  Konv)

Jede absolut konv. Reihe konvergiert

Bew. [CP für Reihen &  $\Delta$ -Ungl.]

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt mit 4.3. für  $\sum |a_n|$ :  $\exists N \forall n \geq m \geq N$

$$\varepsilon > \sum_{k=m}^n |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \quad \text{4.3 für } \sum a_n \Rightarrow \sum a_n \text{ konv}$$

$\Delta$ -Ungl. f. endl. Summe von rechts noch links gelesen

Abs Konv. ist stabil bzgl. Umordnungen

4.17 THM (Umordnungssatz)

Sei  $\sum a_n$  absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung  $\sum a_{n_k}$  abs. konvergent und konvergiert gegen denselben Limes.

Bew. 4.16  $\Rightarrow$   $\exists s := \lim \sum a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$

[Jetzt im 3 Schritten ins Ziel]

(1) Abschätzung für den Reihenrest.

$$\stackrel{4.3}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} \forall \ell \geq N \quad \sum_{k=N}^{\ell} |a_k| < \varepsilon/2$$

2.28 [vgl. auch 2.31]

$$\ell \rightarrow \infty \downarrow$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2 \quad (*)$$

Daher  $\forall m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=N}^m a_k \right| \leq \sum_{k=N}^m |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2$$

$$\stackrel{2.28}{\implies} (m \rightarrow \infty) \quad \left| s - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| \leq \varepsilon/2 \quad (**)$$

(2)  $\lim \sum a_{\tau(n)} = s$ .

möglich, weil  $\tau$  bijektiv

Sei  $M \in \mathbb{N}$  so dass  $M \geq N$

und so dass  $\{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(M)\} \supseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$  (A)

Dann gilt  $\forall m \geq M$

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - s \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k - s \right|$$

Wegen (A) fallen alle  $a_k$  mit  $0 \leq k < N-1$  aus der Summe weg. Übrig bleiben gewisse  $a_k$ 's, über die man nur weiß, dass  $k \geq N$  ist. Diese Summe ist sicher durch

$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$  abschätzbar

(\*), (\*\*)

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = s$$

(3)  $\sum a_{\tau(n)}$  konv. absolut.

Folgt sofort aus (1) & (2)

für die Reihe  $\sum b_n$  mit  $b_n := |a_n|$ . □

#### 4.18 MOTIVATION (Absolute Konvergenz: schön, aber wie?)

Nochdem wir gesehen haben, dass abs. Konvergenz der richtige Begriff ist, um Reihen gut umgehen zu können - manchmal sagt man ja bloss konvergentes  $R$ . auch Bedingt konv. - stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich eine Reihe an, ob sie absolut konvergiert? Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

#### 4.19 PROP (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium)

(i) Sei  $\sum c_n$  konvergent und  $c_n \geq 0$ . ( $\sum c_n$  ist eine konv. Majorante)

$\left\{ \begin{array}{l} |0_n| \leq c_n \text{ für fest alle } n \Rightarrow \sum 0_n \text{ absolut konv.} \end{array} \right.$

(ii) Sei  $\sum d_n$  divergent und  $d_n \geq 0$ . ( $\sum d_n$  ist div. Minorante)

$\left\{ \begin{array}{l} 0_n \geq d_n \text{ für fest alle } n \Rightarrow \sum 0_n \text{ divergent} \end{array} \right.$

Beweis. (i) OBdA können wir annehmen, dass  $|0_n| \leq c_n$  für  $n$  gilt (der Reihenansatz ist egal; vgl. 4.4(ii))

Wir verwenden 4.6: ( $\sum |0_n|$  ist Reihe mit nichtneg. Termen)

$$\forall m \text{ gilt } 0 \leq S_m = \sum_{n=0}^m |0_n| \leq \sum_{n=0}^m c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$\Rightarrow S_m$  eschränkt  $\stackrel{4.6}{\Rightarrow} \sum |0_n|$  konv.

(ii) Indirekt ang  $\sum 0_n$  konvergent  $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \sum d_n$  konvergent  $\Leftarrow$



### 4.20 Bsp (Vergleichstest)

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergiert, denn  $\forall n \geq 1: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$   
 $\sum \frac{1}{n}$  div (4.7(iii))  $\xrightarrow[\text{(ii)}]{4.19}$   $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  div

(ii) Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $|a_n| < 1 \forall n$ . Sei  $\rho \in (0, 1)$ ,  
 dann gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$  ist absolut konvergent, denn

$$|a_n \rho^n| \leq \rho^n; \sum \rho^n \text{ konv [2.37]} \xrightarrow[\text{(i)}]{4.19} \sum a_n \rho^n \text{ konv.}$$

### 4.210 Prop (Wurzeltest) Die reelle Reihe $\sum a_n$ ist

(i) absolut konvergent, falls  $\exists \theta: 0 < \theta < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \} \\ \} \end{array} \right\} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \forall n \geq n_0$$

(ii) divergent, falls  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n$

### Beweis [sehr einfach...]

(i)  $|a_n| \leq \theta^n$  für fast alle  $n$ ,  $\sum \theta^n$  konv [2.37]

$$\xrightarrow[\text{(i)}]{4.19} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii)  $|a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$

$\xrightarrow{4.5}$   $\sum a_n$  divergent.

(Dadel-Test)



4.22 Beim (Zum  $\Gamma$ -Test) (i) In der Praxis tritt oft auf, dass  $\sum a_n = \lim |a_n|^{1/n}$ . Dann gilt

- $Q < 1 \Rightarrow$  Bedingung in 4.21(i)  $[0 = 0 + \epsilon < 1] \Rightarrow \sum a_n$  abs. konv.
- $Q > 1 \Rightarrow$  Bedingung in 4.21(iii)  $\Rightarrow \sum a_n$  div

(ii) WARUM? Der  $\Gamma$ -Test benötigt wirklich die Abschätzung

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho < 1$  und nicht nur  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ .

$|a_n|^{1/n}$  hat endlichen Abstand zu 1

$|a_n|^{1/n}$  kann 1 beliebig nahe kommen

Es gilt z.B. nämlich ( $n > 1$ )

$\rightarrow (1/n^2)^{1/n} \rightarrow 1$  und  $\sum 1/n^2$  konv. [4.1(i)]

$\rightarrow (1/n)^{1/n} \rightarrow 1$  und  $\sum 1/n$  div [4.7(ii)]

4.23 Prop (Quotiententest) Sei  $a_n \neq 0$  für fast alle  $n$ . Die reelle Reihe  $\sum a_n$

(i) konvergiert absolut, falls  $\exists \theta: 0 < \theta < 1 \exists n_0 \in \mathbb{N}$   
 $\left\{ \begin{array}{l} | \frac{a_{n+1}}{a_n} | \leq \theta \quad \forall n \geq n_0 \end{array} \right.$

(ii) divergiert, falls  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: | \frac{a_{n+1}}{a_n} | \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$



Zeweis. (i)  $\forall n \geq n_0$  gilt

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \leq \theta^2 |a_{n-1}| \leq \dots \leq \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

$$\Rightarrow \sum \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \theta^{1-n_0} \sum \theta^n \text{ konv. [2.37]}$$

$$\stackrel{4.19(ii)}{\Rightarrow} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) Sei  $n_0 \geq n_0$  und so dass  $a_n \neq 0 \Rightarrow |a_n| = |a_{n_1}| > 0 \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow a_n \neq 0 \stackrel{4.5}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ div.} \quad \square$$

#### 4.24. Bem (zum Quotiententest)

(i) Analog zum WT: Falls  $\rho = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  dann gilt

$$\rho < 1 \stackrel{4.23(i)}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ abs. konv.}$$

$$\rho > 1 \stackrel{4.23(ii)}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

(ii) Warnung! Auch hier ist bei  $\rho = 1$  keine Aussage möglich, denn z.B.

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konv und } (n \geq 1) \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div und } (n \geq 1) \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest. Man kann zeigen,

(i) im Quotiententest  $\Rightarrow$  (i) im Wurzeltest

[d.h. falls der QT positiv ausfällt, dann ist auch der W-T anwendbar]

Die Umkehrung ist falsch [für Details siehe Barner, Flohr Analysis 1, §5.3]

NICHT VORLEGEN

### 4.25 BSP ( $\mathbb{Q}_T, \mathbb{N}_T$ )

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ist abs. konv., denn [4.23(ii), 4.24(ii)]

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

(ii)  $\sum a_n$  mit  $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$  ist abs. konv., denn [4.21(ii)]

$$|a_n|^{1/n} \leq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n$$

Bemerkung, für diese Reihe ist der Quotiententest nicht schlüssig, denn

können  $\theta = 1/2$  wählen

QT bringt hier nichts!

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{1.5(ii)} 0, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \xrightarrow{1.5(ii)} \infty$$

### 4.26 MOTIVATION (Dezimaldarstellung & b-adische Entwicklung)

Als erste Anwendung des entwickelten Zepriffapparates für Reihen werden wir nun die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren

(i) Beginnen wir mit  $\mathbb{Q}$ : Im Alltag sind wir es gewohnt, rationale Zahlen in Dezimaldarstellung zu sehen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt 17,48 EUR. Die entsprechende Bruchzahl  $x \in \mathbb{Q}$  errechnet sich gemäß

$$x = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \frac{1748}{100}$$

(ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

(A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und  $x$  so als Limes einer (unendlichen) Reihe auffassen - und welche Folgen  $x$  können wir so darstellen (mehr als  $\mathbb{Q}$ ?) ?

(B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen  $b \geq 2$  statt 10 ist leicht zu beweisen. In diesem Rahmen (offizielle Def kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

4.27 DEF (b-adische Entwicklung) Ziffern

Sei  $N \geq b \geq 2$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  und  $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ )  
Die Reihe 
$$\pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

(Basis)

heißt b-adische Entwicklung mit Ziffern  $a_n$  ( $N \leq n \in \mathbb{Z}$ )

4.28 Bsp (b-adische Entwicklungen)

(i) Im Bsp in 4.26 ist  $b=10$ ,  $N=-1$ ,  $a_{-1}=1$ ,  $a_0=7$ ,  $a_1=4$ ,  $a_2=8$ ; nochmal

$$17,48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^2 a_n 10^{-n}$$

(ii)  $2^7=128$  (wie hat 128 die Binärdarstellung ( $b=2$ ))  $128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-2} 1 \cdot 2^n$

#### 4.29 MOTIVATION (Konkretisierung von (A) in 4.26(iii))

Die Fragen in 4.26(ii) (A) können wie folgt konkretisiert werden

- (i) Ist jede  $b$ -adische Entwicklung konvergent? Werden
- (ii) Kann jedes  $x \in \mathbb{R}$  als Limes einer  $b$ -adischen Entwicklung dargestellt werden?
- (iii) Ist diese Darstellung eindeutig?

#### 4.30 BEIT (Unäindeutigkeit $b$ -adischer Entwicklungen)

Die Antwort auf 4.29(iii) ist negativ, wie das folgende Bsp zeigt ( $b=10$ )

$$\underline{0,9999\dots} = \sum_{h=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-h} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} (10^{-1})^h$$

$$\stackrel{\text{g.w. R.}}{\uparrow} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{10-1} = 1 = 1,0000\dots$$

Zum Glück lautet die Antwort auf 4.29(i), (ii): JA

#### 4.31 THEM ( $b$ -adische Entwicklung reeller Zahlen)

Sei  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b > 2$ , dann gilt:

- (i) Jede  $b$ -adische Entwicklung konv. absolut.
- (ii) Jede reelle Zahl  $x$  ist Summe (d.h. Limes) einer  $b$ -adischen Entwicklung (wobei die Ziffern rekursiv konstruiert werden können).

Beweis. (i) [leicht & wie gehabt]  $f_n$  gilt:

$|0_n b^{-n}| \leq (b-1) b^{-n}$  und  $(b-1) \sum b^{-n}$  ist konvergente

$0_n \leq b-1 \forall n$

Majorante  
4.19.ii)  $\rightarrow$  obs. konv.

(ii) [technisch anspruchsvoll...]

Es genügt den Fall  $x \geq 0$  zu betrachten. Wir konstruieren eine  $b$ -adische Darstellung für  $x \in \mathbb{R}$  beliebig

(1) Konstruktionsvorschrift

[Wohlbed.]

$b \geq 2 \xrightarrow{1.5} \exists m \in \mathbb{N}: b^m > x \Rightarrow \exists m_0 = \min \{m \in \mathbb{N} : x < b^{m+1}\}$

Setze  $N = -m_0$ .

Wir konstruieren induktiv eine Folge  $0_n$  in  $\{0, 1, \dots, b-1\}$

sodass

$\forall n \geq N \exists \xi_n$  mit  $0 \leq \xi_n < b^{-n}$  und  
$$x = \sum_{k=N}^n 0_k b^{-k} + \xi_n \quad (*)$$

(2) Das genügt, denn  $(*) \Rightarrow \xi_n \rightarrow 0$  s.h.o

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} 0_k b^{-k}$$

wosolich Aussage (ii) beweist.

(3) Konstruktion

Erinnerung: nächst kleinere Ganze  
[UE, Blatt 1, 6]

Wir gehen induktiv vor und bestimmen bei  $n=N$

$L \lfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$L \lfloor y \rfloor := \max \{l \in \mathbb{Z} \mid l \leq y\}$

Es gilt  $0 \leq y - L \lfloor y \rfloor < 1$  ( $\Delta$ )

NICHT VORLESEN

$n=N$ : Def  $N \Rightarrow 0 \leq x b^N < b$ . Wir definieren  $a_N \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  und  $\xi_N$  durch

$$a_N := \lfloor x b^N \rfloor, \quad \xi_N := (x b^N - a_N) b^{-N}$$

Dann gilt  $x = b^{-N} a_N + \xi_N$  und  $0 \leq \xi_N < b^{-N}$  (A)

also (\*) für  $n=N$

$n \rightarrow n+1$ : Aus (\*) für  $n$  folgt  $0 \leq \xi_n b^{n+1} < b$   
 Wir definieren  $a_{n+1}, \xi_{n+1}$  durch

$$a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := (\xi_n b^{n+1} - a_{n+1}) b^{-n-1} \quad (\Delta\Delta)$$

$0 \leq \xi_{n+1} < 1$  (A)

Dann gilt  $\xi_n = a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1}$  und daher

$$(IV) \quad x = \sum_{k=N}^n a_k b^{-k} + a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} a_k b^{-k} + \xi_{n+1}$$

und  $0 \leq \xi_{n+1} < b^{-n-1}$ , also (\*) für  $n+1$ . □

4.32 Koroll (Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , zum Dritten)

Jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist Limes einer Folge in  $\mathbb{Q}$

Vgl. mit 1.11(ii) und 3.30A

Beweis: 4.31  $\Rightarrow$  Dezimaldarstellung für  $x$ , d.h.

$$x = \sum_{h=N}^{\infty} a_h \cdot 10^{-h}$$

Für jedes  $m$  ist die Partialsumme

$$S_m = \sum_{h=N}^m a_h \cdot 10^{-h} \in \mathbb{Q}$$

und  $S_m \rightarrow x$ . □

4.33 BEW. Sei  $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$  eine  $b$ -adische Entwicklung

Man kann zeigen [Aumann, Escher, Analysis 1, II.7]

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$  Die Ziffernfolge  $a_n$  ist ab einem  $K \in \mathbb{N}$  periodisch, d.h.  $\exists K \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   
 $a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq K$

inkludiert den Fall,  
 dass fast alle  $a_n$  verschwinden,  
 die Entwicklung also abbricht.

4.34 MOTIVATION (Das Cauchy-Produkt für Reihen)

- (i) Um zu einer zweiten - noch viel wichtigere - Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen nämlich der EXPONENTIALFUNKTION müssen wir uns noch um Produkte von Reihen kümmern.
- (ii) Um letztere zu motivieren beginnen wir mit einer Überlegung zu Produkten endlicher Summen.

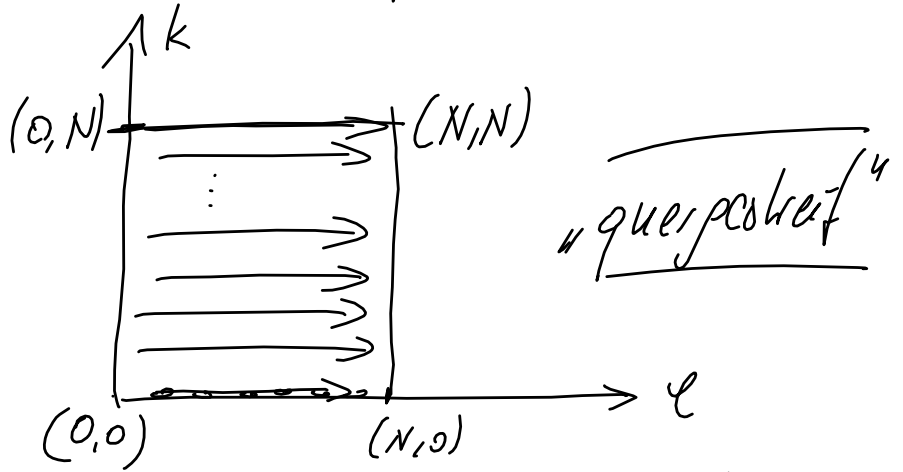
Seien  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n, B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left( \sum_{n=0}^N a_n \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n \right) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k b_l \quad (*)$$

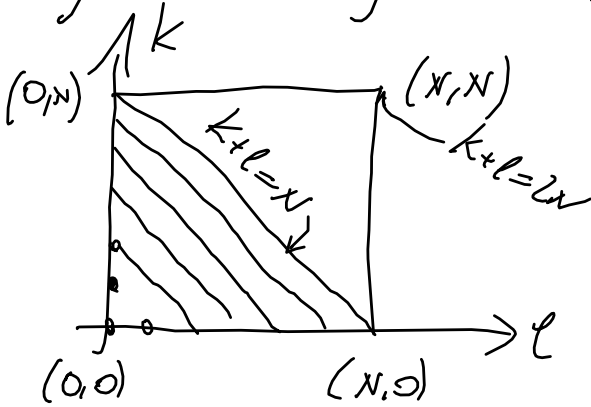
Für die Untersuchung der Konvergenz  $N \rightarrow \infty$  solcher Ausdrücke erweist es sich als günstig, die Summation anders zu arrangieren. Am besten wird das in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich.

Alles läuft darauf hinaus in welcher Reihenfolge wir die Indexpaare  $(k, l)$  in der Doppelsumme in  $(*)$  abkloppen:

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k b_l =$$



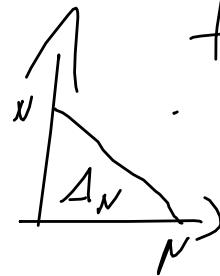
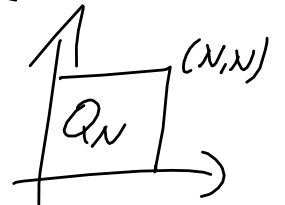
Es erwartet sich für viele Anwendungen das prinzipielle Längs der Diagonalen zu laufen, zumindest bis wir die längste Diagonale erreichen ...



Wir verwenden folgende Abkürzungen für Bereiche des Gitters  $N \times N =: \mathbb{N}^2$

$$Q_N := \{ (k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq k, l \leq N \}$$

$$\Delta_N := \{ (k, l) \in Q_N \mid k+l \leq N \}$$



Damit können wir schreiben

$$A_N \cdot B_N = \sum_{(k,l) \in Q_N} a_k b_l = \sum_{(k,l) \in \Delta_N} a_k b_l + \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l =$$

$$= \sum_{h=0}^N \sum_{k=0}^h a_k b_{h-k} + \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l$$

$$\sum_{h=0}^N \sum_{\substack{(k,l) \in \Delta_N \\ k+l=h}} a_k b_l = \sum_{h=0}^N \sum_{k=0}^h a_k b_{h-k}$$

laufe längs der Diagonalen



(iii) Wozu das ganze? Wenn  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergieren und wir  $(\sum a_n)(\sum b_n)$  betrachten, dann müssen wir in obiger Terminologie  $\lim(A_n B_n)$  bearbeiten. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist, dass

$$\sum_{(k,0) \in \mathbb{Q}_N \setminus A_n} a_k b_n \rightarrow 0$$

und der erste Term also  $a_0 b_n$  ( $\sum a_n$ ) ( $\sum b_n$ ) geht.

Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Schöne Formeln

(iv) Ja, und muß man das so machen?

Nein, jede Form des Durchlaufens erzeugt bei abs. konv.  $\sum a_n, \sum b_n$  eine abs. konv. Reihe [Dazu p 116 ff]

4.35 Prop (Cauchy-Produkt f. Reihen)

Seien  $\sum a_n, \sum b_n$  absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. [Technisch]. Wir verwenden die Notation aus 4.34.

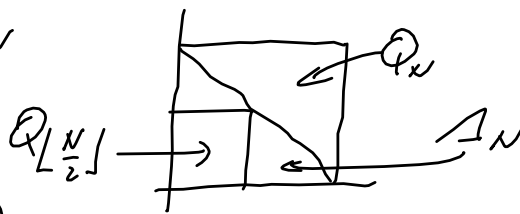
Sei  $S_N := \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , dann gilt

$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l$$

(1)  $\lim S_N = (\sum a_k)(\sum b_l)$ :

Setze  $A_N^* = \sum_{n=0}^N |a_n|$ ,  $B_N^* = \sum_{n=0}^N |b_n| \Rightarrow A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l) \in Q_N} |a_k b_l|$

Es gilt  $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subseteq \Delta_N \subseteq Q_N$  und damit



$$|A_N B_N - S_N|$$

$$\leq \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} |a_k b_l| \leq \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k b_l| \quad (*)$$

$$= A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor}^*$$

Noch voraus.  $(A_N^* B_N^*)_N$  konv  $\Rightarrow$  CF

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor}^* = 0$$

Wegen  $A_N \cdot B_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} S_N \rightarrow (\sum a_k)(\sum b_l)$

(2)  $\sum c_n$  konv. absolut:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}| \iff \text{konv.}$$

(Δ)-Upl

(1) für  $\sum |a_n|, \sum |b_n|$



Jetzt endlich zur Exponentialreihe

#### 4.36 BEW (Exponentialreihe)

(i) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  abs. konv.,  
denn für  $x \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$

und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{QT} \underline{\text{abs. konv.}}$

für  $x=0$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

(ii) [Achtung: NEUE IDEE!]

Daher können wir eine Funktion definieren

offiziell:  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$ ,

#### 4.37 DEF (EXPOENTIALFUNKTION)

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und  $e := \exp(1)$  heißt Eulersche Zahl!

#### 4.38 Motivation (Funktionalgleichung für exp)

Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen exp-Fkt folgen aus der Funktionalgl.  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ .  
[Tatsächlich ist exp dadurch und eine Beschränktheits-

bedingung schon eindeutig charakterisiert [Berner-Flohr, Sec 7.5]  
Wir werden sie jetzt als Folgerung aus dem Cauchy-Produkt herleiten

4.39 THM (Funktionagl. für die exp-Fkt)  
Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$ . (4.2)

Beweis: 4.36  $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$  sind abs konv.

4.35  $\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!} \quad (*)$$

Also

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

4.40 KOR (Wichtige Eigenschaften von exp) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

- (i)  $\exp(x) > 0$
- (ii)  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- (iii) Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $\exp(n) = e^n$

Beweis: (ii) Die Funktionagl. (4.2) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \stackrel{(4.2)}{=} \exp(x) \exp(-x)$$

(i) Für  $x \geq 0$  gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0. \quad (*)$$

Für  $x < 0$  gilt  $\exp(x) = \frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{> 0}} > 0$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{> 0 (*)}$

(iii) Wegen  $\exp(-n) = 1/\exp(n)$  [cii] genügt es die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$n=0$ :  $\exp(0) = 1 = e^0$

$n \rightarrow n+1$ :  $\exp(n+1) \stackrel{(4.2)}{=} \exp(n) \exp(1) \stackrel{(iv)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$

#### 4.41 BEM & MOTIVATION

(i) Thm 4.39 und Kor 4.40(ii) besagen, dass  $\exp$  ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (0, \infty, \cdot)$$

ist; vgl. [ZTA, 5.2.62]

(ii) Zum Abschluß des § und des Kapitels beweisen wir nun eine aber doch nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe - später [WS] werden wir diese noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe]

4.42 Prop (Fehlerabschätzung für  $\exp$ ) Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Für alle

$x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{h=0}^N \frac{x^h}{h!} + R_{N+1}(x)$$

$N$ -te  
Partiellsumme

Wobei der "Rest"  $R_{N+1}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1 + N/2$

die Abschätzung  $|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$  erfüllt.

NICHT VORLESEN

Beweis. Für den Restterm gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!} - \sum_{h=0}^N \frac{x^h}{h!} = \sum_{h=N+1}^{\infty} \frac{x^h}{h!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut. [4.36(ii)]

Daher gilt

$$|R_{N+1}(x)| \leq \sum_{h=N+1}^{\infty} \frac{|x|^h}{h!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \leq \frac{|x|^2}{(N+2)^2}$$

verallgemeinerte  $\Delta$ -Ungl. f. abs. konv. Reihen:  
 $|\sum_{h=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{h=0}^{\infty} |a_n|$   
 Bew.  $|\sum_{h=0}^N a_n| \leq \sum_{h=0}^N |a_n|$   
 $(N \rightarrow \infty) \downarrow$   $|\sum_{h=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{h=0}^{\infty} |a_n|$

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{N+2} \right)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot 2$$

2.37  
 geom. R.  $\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot 2$

$|x| \leq \frac{N+2}{2}$

4.43 BSP (Approximation für e) Es gilt □

$$e = \exp(1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = \sum_{h=0}^N \frac{1}{h!} + R_{N+1}(1)$$

und  $x=1 \leq 1 + N/2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$ . Daher erhalten wir aus 4.42 für  $N=2$

$$e = \sum_{h=0}^2 \frac{1}{h!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und  $0 < R_3(1) \leq 2 \frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} < 3$$

2.83

Tatsächlich gilt  $e \approx 2,71828$  [die ersten 100 Stellen erhält man genau schon nach Summation der ersten 73 Terme]

## [2] STETIGE FUNKTIONEN

In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit FUNKTIONEN und zwar zunächst mit solchen von  $D \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die folgende schöne Eigenschaft haben:

Kleine Änderungen der Argumente verursachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sog. STETIGEN FUNKTIONEN haben einige hervorragende Eigenschaften, z. B.: Jeder stetige  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an (Zwischenwertsatz)
- nimmt Maximum & Minimum an (Satz vom Max).

Noch einem gründlichen Studium des STETIGKEITSBEGRIFFS lernen wir eine wichtige Klasse „einfacher“ Funktionen kennen: die ELEMENTAREN TRANSCENDENTE Funktionen.

Dazu gehört insbesondere die LOGARITHMUSFUNKTION, die die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Ebenfalls mittels exp. potenzen wir zur Definition der allgemeinen POTENZ  $r^s$  ( $r > 0, s \in \mathbb{R}$ ).

Dann erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen & Reihen auf den Fall komplexer Zahlen und gelangen über die komplexe Exponentialfunktion zu den WINKELFUNKTIONEN Sinus & Cosinus.

# §1 STETIGKEIT

In diesem § lernen wir den essenziellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennen. Zuerst wiederholen wir Grundlegendes zu solchen Fkt

## 1.1. ERINNERUNG (Funktionen)

Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  zwischen (beliebigen) Mengen  $A, B$  ordnet jedem  $a \in A$  genau ein  $f(a) \in B$  zu [ETA, 3.4.1]

Wir betrachten hier Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Für solche Funktionen ist der Graph [ETA, 4.3.4]

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

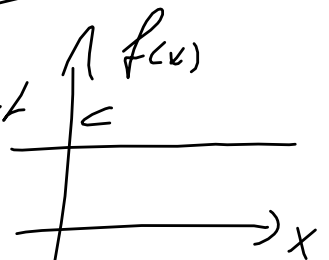
Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und kann in der „üblichen Weise“ bezeichnet werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von

## 1.2. BSP (reelle Fkt)

Defür hätten wir den Begriff nicht gebraucht...

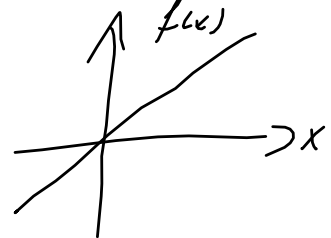
### (i) Konstante Fkt.

Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, dann definiert  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := c \forall x \in \mathbb{R}$  eine konstante Fkt



### (ii) Die identische Abb auf $\mathbb{R}$ [ETA, p. 165]

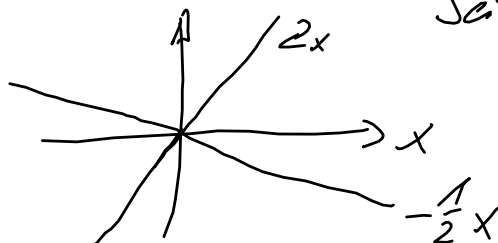
ist gegeben durch  $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x$



### (iii) Lineare Fkt sind also all emere.

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) = qx$$

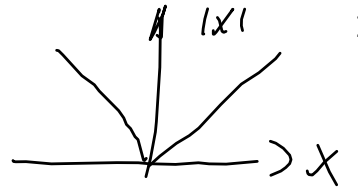


Sei  $q \in \mathbb{R}$  beliebig

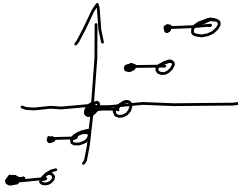
Anstieg



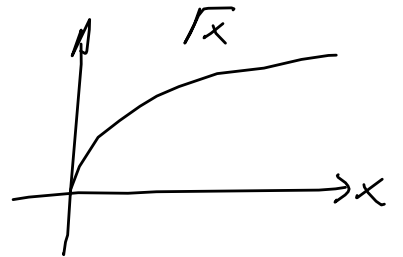
(iv) Die Betragsfunktion [10] 1.7  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x|$



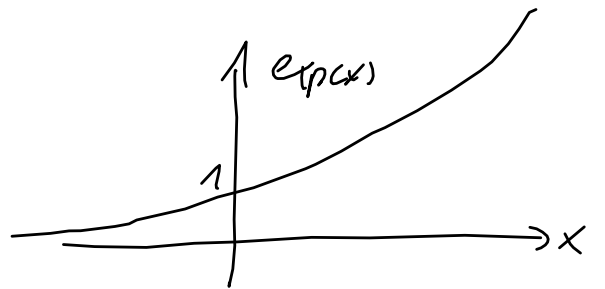
(v) Die Gaußklammer  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  [UE, Blatt 1, [6]]  
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$



(vi) Die Wurzelfkt  $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x}$   
 [10] 1.11(iii)]



(vii) Die Exponentialfkt. [11] 4.37  
 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$

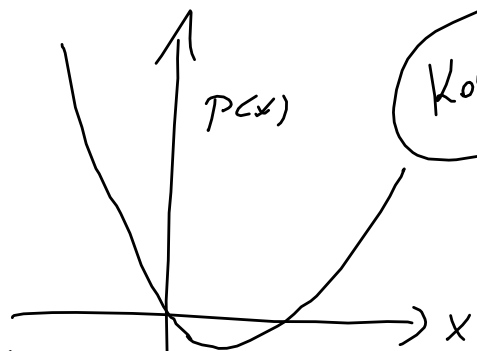


(viii) Polynomfunktionen [ENA, p. 30] Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ ,  
 dann definieren wir  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch ( $x \in \mathbb{R}$ )

Grad, falls  $a_m \neq 0$   $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

z.B.  $m=2, a_0=0, a_1=-1=-a_2$

$p(x) = -x + x^2$



Koeffizienten

(ix) Rationale Fkt. Eine rationale Funktion ist Quotient zweier Polynome;

genauer sei  $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

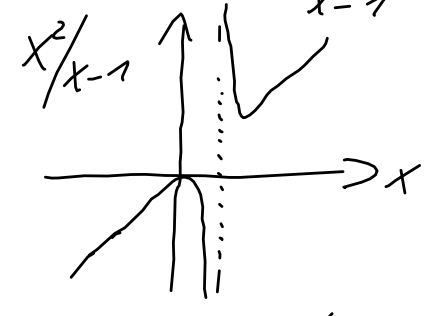
und sei  $D := \{ x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0 \}$ . Wir definieren

$r : D \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$

Ein Bsp einer rat. Funktion ist etwa  $\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{K}$   
oder etwas einfacher mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$r(x) = \frac{1}{x}$



[Bemerkung Polynome sind rationale]  
Fkt mit Nenner  $qx+1=1$ .

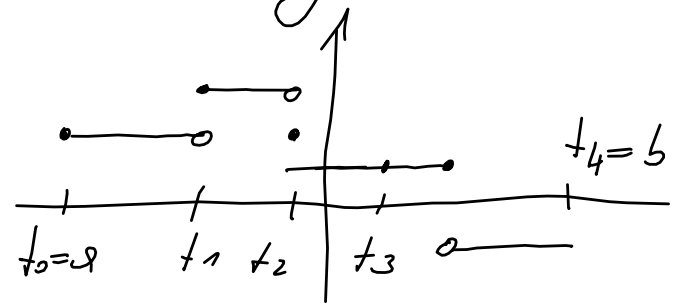
(x) Treppenfunktionen: Eine Fkt  $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

heißt Treppenfunktion, falls

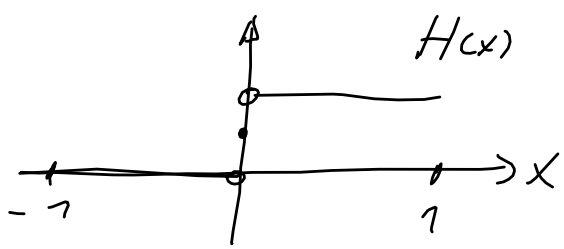
- es eine endliche Zerlegung des Intervalls  $[a,b]$  gibt  $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$
- und Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$

sodass  $\varphi(x) = c_k$  für  $x \in (t_{k-1}, t_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ )

[ $\varphi$  hat auf den offenen Teilintervallen  $(t_{k-1}, t_k)$  den Wert  $c_k$ ; die endlich vielen Werte  $\varphi(t_k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ) können beliebig sein.]



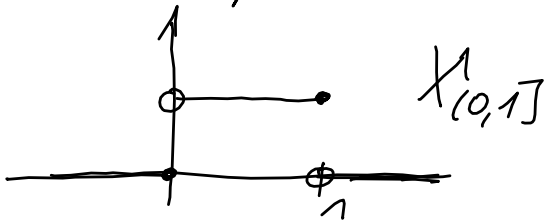
Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer  $[(\cdot)]$  und die Sprungfunktion  $H$  auf  $[-1, 1]$  mit  $t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$  und  $H(0) := 1/2$



Das ist Willkür...

(xi) Charakteristische Funktion einer Menge. Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$

dann definieren wir  $\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



So einfach das klingt, für hässliche  $M$  kann das ganz schön unanschaulich werden, z.B.  $M = \mathbb{Q}$   $\leftarrow$  Dirichlet-Fkt

$$G(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{(p, 1) : p \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r, 0) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

### 1.3 FAKTENSAMMLUNG (Grundoperationen mit Funktionen)

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben kompliziertere Funktionen aus einfacheren Bausteinen zu konstruieren – diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue aber wesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in  $\mathbb{R}$  (Zielraum der Fkt) verwendet werden um Operationen für die Fkt selbst zu definieren – letzteres Konzept werden wir bald als wesentliches Werkzeug schätzen lernen.

Seien also  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen auf  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und sei  $\mathbb{R}$ .

(i) Die Funktionen

$$f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

sind in Termen der punktweisen Operationen in  $\mathbb{R}$  definiert, d.h.

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \\ \forall x \in D \end{array} \right\}$$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x), (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

neues +  
zwischen Fkt

+ in  $\mathbb{R}$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$   
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

defo

Schreibweise  
oft  $f+g(x)$   
statt  $(f+g)(x)$   
etc...

[Nebenbemerkung. Die Menge  $\tilde{F}(D) := \{f: D \rightarrow \mathbb{R}\}$  ist mit  $+$ ,  $\cdot$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

(ii) Sei  $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ . Die Quotientenfunktion von  $f$  und  $g$  ist definiert durch

$\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}; \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(iii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  sodass  $f(D) \subseteq E$  und  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

das Bild  
von  $D$  unter  $f$   
 $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$   
[ETA, 4.3.11]

Dann können wir die Verknüpfung (Zusammensetzung, Komposition) von  $f$  mit  $h$  definieren als [ETA. 4.3.13]

$h \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}; h \circ f(x) = h(f(x))$

1.4 BSP (Ops f. Fkt)

(i) Für  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $q(x) = x^2$  gilt

$q(x) = id \cdot id(x)$  [id(x)=x]

(ii) Allgemein lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , also

konst. Fkt

$P = a_m \cdot (\underbrace{id \cdot id \cdot \dots \cdot id}_{m \cdot m \cdot 1}) + \dots + a_1 \cdot id + a_0 \cdot \chi_{\mathbb{R}}$

konst. Fkt  
1

hier muß  $f(x) \in E$  sein, sonst kann  $h$  nicht zu packen

(iii) Mit  $q$  wie in (i) gilt  $\Gamma \circ q = | \cdot |$ , denn

$$(\Gamma \circ q)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

### 1.5 MOTIVATION (Stetigkeit)

(i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

Eine kleine Änderung der Stelle soll (te) }  
 nur eine kleine Änderung der Funktionswerte  
 zur Folge haben.

natürliche,  
 implizite  
 Vorstellung

Genauer: falls  $x$  nahe  $x_0$  liegt, dann sollte  $f(x)$   
 nahe bei  $f(x_0)$  liegen.

(ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in den Anwendungen  
 wichtig. Am Bsp des Fahrradfahrens [10] 0.3 ]:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden,  
 wenn ich nur ein bisschen schneller fahre

[Zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe [Behrends, p. 199].]

Andererseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft  
 klar nicht erfüllt ist: Die Farbe der Ampel als  
 Fkt der Zeit. Genauer, sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \\ & \text{rot ist.} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \\ & \text{grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Zeitpunkt  $t_0$ , an dem die Ampel umschaltet: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Zeit nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

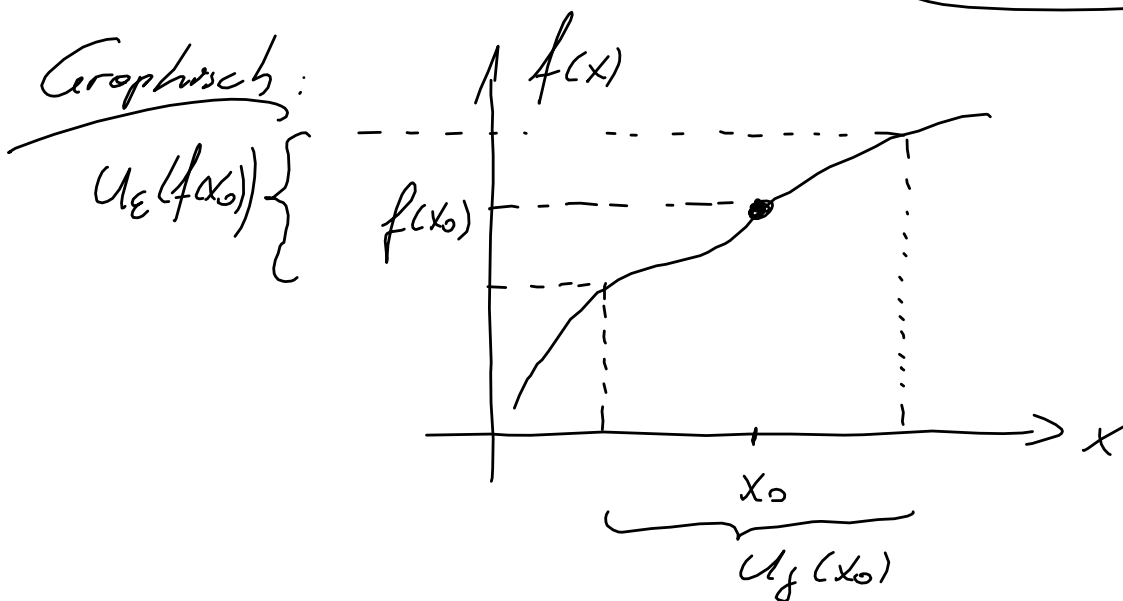
(iii) Wir beginnen nun die intuitive Idee der Stetigkeit von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in D$  zu formulieren:

Es scheint wünschenswert zuerst eine Toleranzgrenze für die Funktionswerte vorzugeben ohne eine beliebige  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(x_0)$  und dann zu fordern, dass es ein Sicherheitsintervall  $U_\delta(x_0)$  um  $x_0$  geben soll, sodass

$$|x - x_0| < \delta \text{ ergibt, dass } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$x$  im Sicherheitsintervall um  $x_0$

$f(x)$  innerhalb der Toleranzgrenze um  $f(x_0)$



Der Witz der Formulierung ist: für jede (noch so kleine) Toleranz  $\varepsilon$  gibt es ein  $\delta$ -Sicherheitsintervall; offiziell

# 1.6. DEF (Stetigkeit) ← mindestens so wichtig Wie Grenzwert def 115

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion  
und sei  $x_0 \in D$  eine Stelle im Definitionsbereich.

(i)  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , falls

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D \text{ mit} \\ \text{(1.1)} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

(ii)  $f$  heißt stetig (auf  $D$ ), falls  $f$  stetig in jedem  $x_0 \in D$  ist.

## 1.7 BEM (Zur Stetigkeit)

(i) Offensichtliche Umformulierungen der Stetigkeit  
im Pkt  $x_0$  sind

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

Bild von  $U_\delta(x_0) \cap D$   
unter  $f$

(ii) Will ich konkret für  $x_0 \in D$  zeigen, dass  $f$  dort stetig ist,  
dann muß ich

für jede noch so kleine  
Toleranz  $\varepsilon$   
um  $f(x_0)$

ein entsprechendes Sicher-  
heitsintervall  $U_\delta(x_0)$   
finden (können)  $[f(\varepsilon)]$

so dass  $|x-x_0| < \delta$  die Abschätzung  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$  ergibt.

Im allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls  $\delta$  von der (zuvor festgelegten) Toleranz  $\varepsilon$  abhängen, also  $\delta(\varepsilon)$ .

GROSSE FETTE WARVUNG: Niemand darf umgekehrt  $\varepsilon$  von  $\delta$  abhängen  
 ~~$\varepsilon(\delta)$~~  (vgl [1] 2.9)

1.8 BSP (stetige Funktionen)

(i) Konstante Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defbereichs)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = c$  für ein fixer  $c \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt  $\forall x_0 \in D \forall x \in D |f(x) - f(x_0)| = 0$ ,  
 also (1.1)  $\forall \varepsilon > 0$  mit  $\delta > 0$  beliebig

Schonmal, dass  $\delta$  unabhängig von  $\varepsilon$  und  $x_0$  gewählt werden kann

(ii) Lineare Fkt sind stetig (in jedem Pkt ihres Defber.)

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \varphi x$  für ein  $\varphi \in \mathbb{R}$

Vorüberlegung: falls  $\varphi = 0$  liegt die konst. Fkt  $f(x) = 0$  vor und diese ist nach (i) stetig

Sei also  $\varphi \neq 0$ . Wir müssen  $|f(x) - f(x_0)|$  abschätzen & es gilt

$|f(x) - f(x_0)| = |\varphi| |x - x_0|$

Wir müssen also  $\delta$  nur  $\varepsilon / |\varphi|$  wählen.

Schonmal, dass  $\delta$  unabhängig von  $x_0$  gewählt werden kann



Nun zum Beweis: Sei also  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta = \varepsilon/|\varphi|$  ( $> 0$ ?)  
dann gilt  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x_0 - x| < \delta$

$$\underline{|f(x_0) - f(x)| = |\varphi| |x - x_0| < |\varphi| \frac{\varepsilon}{|\varphi|} = \varepsilon}$$

(iii) Die Exponentialfunktion ist stetig (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ )

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig und sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} | \exp(x) - \exp(x_0) | &= | \exp(x - x_0 + x_0) - \exp(x_0) | \\ &\stackrel{\text{IV 4.39}}{=} \exp(x - x_0) \cdot \exp(x_0) \quad (\text{IV}, 4.39) \\ &\stackrel{\text{IV 4.40(ii)}}{=} \exp(x_0) | \exp(x - x_0) - 1 | \quad (*) \end{aligned}$$

Wir müssen also  $|\exp(x - x_0) - 1|$  für  $x$  nahe  $x_0$  abschätzen,  
also  $|\exp(y) - 1|$  für  $y$  nahe 0; das erledigt also IV 4.42  
mit  $N=0$  für uns

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \Rightarrow$$

$$|\exp(y) - 1| = |R_1(y)| \leq 2|y| \text{ falls } |y| < 1 \quad (**)$$

Sei also  $\delta := \min\{1, \varepsilon/(2 \exp(x_0))\}$ . Dann gilt  $\forall |x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} | \exp(x) - \exp(x_0) | &\stackrel{(*)}{=} \exp(x_0) | \exp(x - x_0) - 1 | \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \exp(x_0) 2 |x - x_0| \\ &\leq 2 \exp(x_0) \delta \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Weil Ansatz  
 $\alpha = \pm 1$   
vgl. (ii)

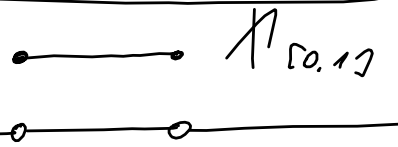
(iv) Der Betrag ist stetig (in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ ) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ ; setze  $\delta = \varepsilon$ ,  
dann gilt  $\forall |x - x_0| < \delta$   $\longleftarrow$  (verkehrte  $\Delta$ -Upl)

$$| |x| - |x_0| | \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

(V) Sprünge sind nicht stetig

Erzbeispiel unstetiger Fkt

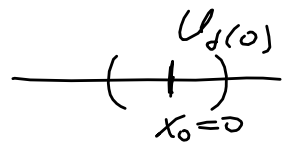
$$\text{Sei } f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Dann ist  $f$  unstetig bei  $x_0 = 0$ :  $f(0) = 1$  aber beliebig nahe „links“ von  $x_0 = 0$  gilt  $f = 0$ ; aber muß schief gehen... } und ebenso bei  $x_0 = 1$ ; überall sonst ist  $\chi$  als konstante Fkt stetig!

Sei also  $\varepsilon = 1/2$ , dann gilt  $\forall \delta > 0$  (egal wie klein!)

$$\exists x \in U_\delta(0), x < 0$$



und somit  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > 1/2 = \varepsilon$

10.9. Bem (Stetige und unstetige Fkt)

(i) Wie wir es in 1.8 (V) gesehen haben muß für einen Beweis der Unstetigkeit einer Fkt  $f$  an einer Stelle  $x_0 \in D$  nur ein „Versager- $\varepsilon$ “ angegeben werden (vgl. [1] 2.P. (ii))  
Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (1.1)

$$\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

$$= \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D$$

$$|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Es gibt zumindest eine Versager-Toleranz  $\varepsilon > 0$

Sodas egal wie klein das Sicherheitsintervall  $U_\delta(x_0)$  gewählt ist

Es immer noch (zumindest) ein  $x \in U_\delta(x_0) \cap D$  gibt

Sodas  $f(x)$  nicht im Toleranzintervall  $U_\varepsilon(f(x_0))$  liegt

(ii) Wie schon in 1.7(ii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung (1.1)

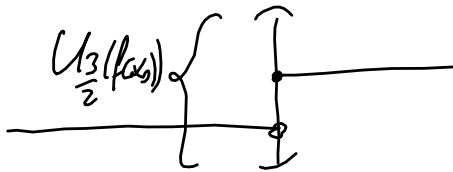
zuerst die Toleranz  $\epsilon$  vorgegeben wird  
und erst dann das Sicherheitsintervall gefunden werden muß.

Kehrt man dies falschweise um zu

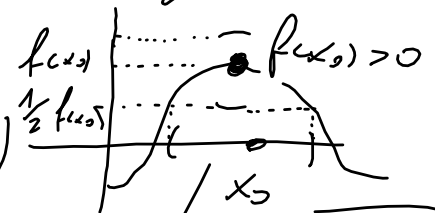
$$(*) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists \epsilon > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

dann wäre z.B. der Sprung in 1.8(vi) stetig. Tatsächlich brauche ich nur  $\epsilon > 1$  zu wählen.

Es gibt sich auch falsch (A.D.) im hinteren Teil  $\epsilon$  mit  $\delta$  verknüpft wird!



(iii) Die Funktionswerte  $f(x)$  einer bei  $x_0$  stetigen Fkt  $f$  bleiben  $\epsilon_0$  für  $x$  nahe bei  $x_0$  in der Nähe von  $f(x_0)$ . Anders ausgedrückt falls  $f(x_0) \neq c$ , dann bleibt  $f(x)$  nahe bei  $x_0$  auch weg von  $c$ . Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden - oft sehr brauchbaren - Lemma für  $c=0$ ; der allgemeine Fall folgt sofort durch Verschieben des Graphen.



1.10 LEMMA (Nichtverschwinden auf Ump.)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$  und sei  $f(x_0) \neq 0$ .  
 Dann  $\exists \delta > 0$  sodass auch

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \text{ gilt } \text{loss } f(x) \neq 0.$$

Umgang von  $x_0$  auf der  $f \neq 0$  (weil  $> f(x_0)/2$ )

Beweis.  $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$

$$(1.1) \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$$

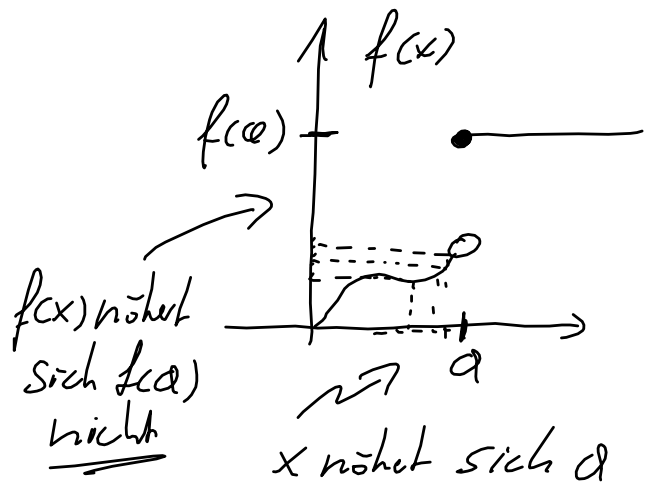
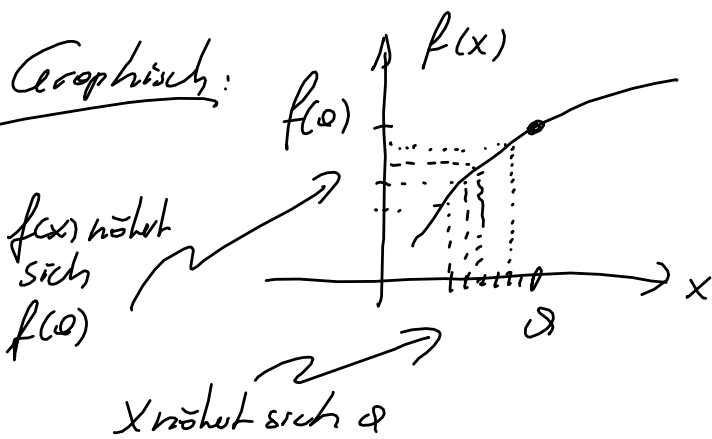
Daher gilt  $\forall x \in (U_\delta(x_0) \cap D)$  verkehrte  $\Delta$ -Ungl.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| \\ \text{Trick} \uparrow & > |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0 \end{aligned}$$

1.1 Motivation (Stetigkeit und Folgen) □

Die intuitive Idee der Stetigkeit von  $f$  in einem Pkt  $a \in D$  lässt sich wie folgt umformulieren

Egal wie sich  $x$  an  $a$  annähert,  
es nähert sich  $f(x)$  an  $f(a)$  an



Diese Idee lässt sich mittels Folgen präzisieren:

$$\forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a), \text{ bzw.}$$

$$\forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow a: \lim(f(x_n)) = f(\lim x_n)$$

und sie funktioniert auch, wie das folgende essentielle Thm lehrt

$f$  vertauscht mit Limiten

1.12 TH7 (Stetigkeit via Folgen) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und

Sei  $a \in D$ . Dann gilt

$f$  ist stetig in  $a \iff$  Für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt  
 $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

Beweis:

" $\implies$ ": Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim x_n = a$ . Wir müssen zeigen, dass  $\lim(f(x_n)) = f(a)$  gilt. Sei obvo  $\varepsilon > 0$

$\stackrel{(1.1)}{\implies} \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a) \cap D: |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (*)$

$x_n \rightarrow a \implies \exists N > 0 \forall n \geq N: |x_n - a| < \delta \quad (**)$

Daher  $\forall n \geq N \stackrel{(**)}{\implies} |x_n - a| < \delta \stackrel{(*)}{\implies} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

Also  $\lim(f(x_n)) = f(a)$

" $\impliedby$ ": Angenommen  $f$  ist unstetig bei  $a \in D$ . Wir konstruieren eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$  aber  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ .

$f$  unstetig bei  $a \implies$

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in U_\delta(a) \cap D: f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$

Wir fixieren dieses  $\varepsilon$  und wählen sukzessive  $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ).  
 Damit erhalten wir eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit ( $n \geq 1$ )

•  $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ , d.h.  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  also  $x_n \rightarrow a$  aber

•  $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$ , d.h.  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ ,

also  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ . ]

## 1.13 BEI (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit)

(i) Zur Terminologie: Bedingung (1.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren; man spricht daher von Umgebungsstetigkeit. Die v.S. in Thm 1.12 hingegen verwendet Folgen und man spricht von Folgenstetigkeit.

(ii) Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken

$$f \text{ vertauscht mit Limiten } [f(\lim x_n) = \lim(f(x_n))]$$

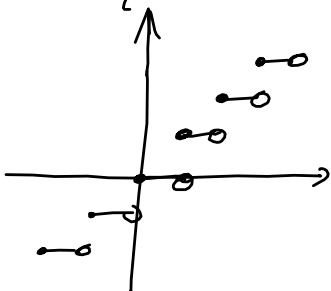
(iii) Thm 1.12 besagt in dieser Terminologie, dass (für Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind. [Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (aber wichtigen) Mengen ist das nicht der Fall; " $\Rightarrow$ " gilt immer, " $\Leftarrow$ " ist i.o. falsch!]

(iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und ob Unstetigkeitsstellen entlocken.

## 1.14 BSP (Sprünge)

(i) Die Gaußklammer ist stetig in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und unstetig in jedem  $q \in \mathbb{Z}$ :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$



• Sei  $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor q \rfloor = q$  und die Folge  $x_n = q - \frac{1}{n}$  erfüllt  $x_n \rightarrow q$

aber  $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor q - \frac{1}{n} \rfloor = q - 1$  daher

$$\lim_n \lfloor x_n \rfloor = \lim_n (q - 1) = q - 1 \neq q = \lfloor q \rfloor = \lfloor \lim_n x_n \rfloor$$

• Für  $a \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}$  gilt  $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$ . Daher gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow a$ :  $\exists N_0 \forall n \geq N_0: \lfloor a \rfloor < x_n < \lfloor a \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor \forall n \geq N_0$  und somit  $\lim \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor = \lfloor \lim x_n \rfloor$

(ii) Die Dirichletfkt  $X_Q$  ist unstetig in jedem  $x \in \mathbb{R}$

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon = 1/2$ . Wir unterscheiden die Fälle

(1)  $0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Dann ist  $X_Q(0) = 0$ . Wegen der Dichtheit (10.1.M(ii)) von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  können wir in jedem Intervall  $U_\delta(0) = (0-\delta, 0+\delta)$  eine rationale Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  finden, d.h.  $\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{Q}: |p-0| < \delta$  also kleiner als  $\delta$  gilt

$$|X_Q(q) - X_Q(0)| = |1 - 0| = 1 > 1/2 = \varepsilon$$

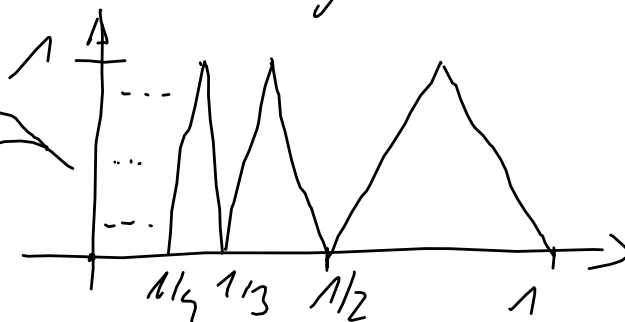
(2)  $0 \in \mathbb{Q}$ . Dann ist  $X_Q(0) = 1$ . Wegen der Dichtheit von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  (10.1.M(ii)) gilt völlig analog zu Fall (1):  $\forall \delta > 0 \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} |r-0| < \delta$  und daher  $|X_Q(r) - X_Q(0)| = |0 - 1| = 1 > 1/2 = \varepsilon$ .

nicht vorgehen

### 1.15 WARNUNG (Zur Stetigkeit)

(i) Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit

Auch „wilde Oszillation“ führt zur Unstetigkeit, denn sei z.B.  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(0) = 0$  und sonst durch die unten dargestellten immer schmaler werdenden „Zacken“.



$\forall x_0 > 0$  gilt:  $f$  stetig in  $x_0$  (vgl. 1.8(ii) und 1.8(iii))

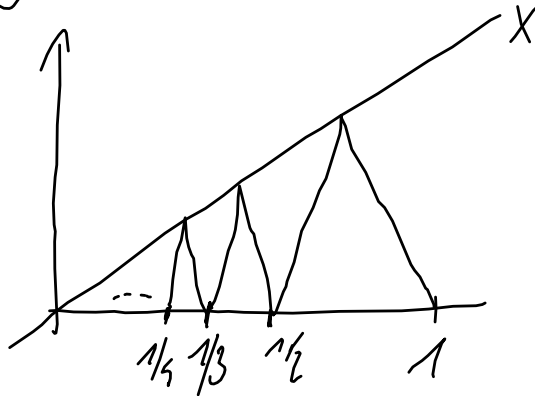
„Kann man schon explizit aufschreiben; bindet aber keine beweisliche Einsicht“

Dann gibt es für jedes  $c \in [0, 1]$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $f(x_n) = c \ \forall n$ . Daher ist  $f$  in  $0$  nicht stetig, obwohl  $f$  dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

(ii) Folgernde „Markregel“, die auch in Schulbüchern zu finden ist, ist sehr problematisch:

⊙ Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn man sie ohne Absetzen zeichnen kann. ⊙

Erstens ist nicht klar, was das heißen soll. Zweitens ist etwa folgende Modifikation von  $f$  aus (i) stetig auf  $[0, 1]$ .



Die Stetigkeit bei  $x_0 = 0$  folgt, da  $\forall x: f(x) \leq x$  und daher  $f(x_n) \rightarrow 0$ :  
 $0 \leq f(x_n) \leq x_n \rightarrow 0$

Beim Zeichnen ergibt sich aber das Problem, dass die Länge des Graphen auf dem endlichen Intervall  $[0, 1]$  nicht endlich ist [daher alle Bleistifte dieser Welt verbraucht werden sind, bevor man  $x_0 = 0$  erreicht]. Genauer gilt für die Länge des Graphen von  $x = 1$  (noch links) bis  $x = 1/n$

$$l\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \text{ divergent nach 4.7(ii)}$$

Die Länge von  $\frac{1}{k-1}$  bis  $\frac{1}{k}$  ist sicher größer als  $2x$  die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion, also  $2 \cdot \frac{1}{k}$



(iii) Es gibt Monster. So anschaulich die Def der Stetigkeit auch sein mag - es gibt völlig unanschauliche „Monster-Funktionen“ mit sehr eigenartigen Stetigkeitsverhalten. So gibt es z.B. eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die in allen irrationalen Pkten stetig ist, in allen rationalen Pkten aber unstetig.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit} \\ & \text{minimalem } p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

(1)  $f$  ist unstetig in allen  $x_0 \in \mathbb{Q}$ : Sei  $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , dann setze  $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{q}$ . Weil  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  dicht liegt (10) 1.11(iii) gilt  $\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $|x - x_0| < \delta$  aber  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q}| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \frac{1}{q} = \varepsilon$

(2)  $f$  ist stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Sei  $\varepsilon > 0$  gewählt.

Von allen Zahlen  $\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q}$  mit  $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$  liegen in jedem Intervall nur endlich viele und keines davon ist gleich  $x_0$  ( $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ !).

$\Rightarrow \exists$  ein  $\frac{p_0}{q_0}$ , das  $x_0$  am nächsten liegt.

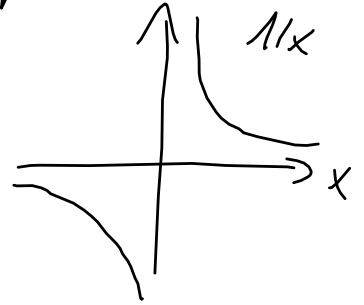
Definiere  $\delta = |x_0 - \frac{p_0}{q_0}|$ . Nun gilt  $\forall x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dass  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , denn folgt

- $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$
- $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p'}{q'}$  (gekürzt) mit  $q' > \frac{1}{\varepsilon}$  [denn in  $U_\delta(x_0)$  liegt noch Wohl von  $\delta$  keine Zahl  $\frac{p'}{q'}$  mit  $q' \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ]  $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{q'} < \varepsilon$  und daher  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q'}| = \frac{1}{q'} < \varepsilon$ .

nicht rasen

(iv) Offensichtlicher Unfug: Wir betrachten die Fkt  
 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$  (1.2(ii))

Ist  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  stetig?



Diese Frage ist Unfug, weil  $x_0 = 0 \notin D$ ,  
 daher ist  $f$  in  $x_0$  gar nicht definiert und  
 die Frage nach der Stetigkeit kann gar nicht gestellt  
 werden. <sup>?</sup> Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass  
 alle rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Defbereich  
 stetig sind.

### 1.16 MOTIVATION (Grundoperationen und Stetigkeit)

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele  
 (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der  
 Grundoperationen für Funktionen aus 1.3 bedienen ( $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ) und  
 zeigen dass diese aus stetigen Fkt wiederum stetige Fkt machen.  
 Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus  
 der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine  
 sehr elegante Methode zum Bauen vieler neuer stetiger Fkt.

1.17 Prop (Ausg. von  $f$  stetige Fkt.) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(i) Falls  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $\alpha \in D$  sind, dann sind auch

$$f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $\alpha$ . Falls  $\alpha \in D' := \{x \in D: g(x) \neq 0\}$ , dann  
 ist auch

$$\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $\alpha$ .

(ii) Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subseteq E$  und  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls  $f$  stetig in  $a \in D$  und  $h$  stetig in  $b := f(a) \in E$  dann ist auch die Zusammensetzung

$$h \circ f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad [D \xrightarrow{f} f(a) \in E \xrightarrow{h} \mathbb{R}]$$

stetig in  $a$ .

Beweis (i) Wir beweisen nur die Aussage für die Summe; die anderen Fälle sind ähnlich [UE]

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Wir zeigen  $(f+g)(x_n) \rightarrow (f+g)(a)$ , woraus mit 1.12 die Stetigkeit von  $f+g$  in  $a$  folgt.

$$(f+g)(x_n) \stackrel{1.3(ii)}{=} f(x_n) + g(x_n) \stackrel{\substack{f, g \text{ stetig} \\ 1.12}}{\rightarrow} f(a) + g(a) \stackrel{1.3(ii)}{=} (f+g)(a) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Wir verwenden so wie oben 1.12. Sei also  $(x_n)$  Folge in  $D$ ,  $x_n \rightarrow a$ .

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } a &\stackrel{1.12}{\Rightarrow} f(x_n) \rightarrow f(a) = b \\ &\Rightarrow (y_n) := (f(x_n)) \text{ ist Folge in } E \text{ mit } y_n \rightarrow b \\ h \text{ stetig in } b &\stackrel{1.12}{\Rightarrow} h(y_n) \rightarrow h(b) \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \rightarrow h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$$

1.18 KOR (Stetigkeit v. Polynomen & rat. Fkt) □

Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Beweis: [vgl. Mo. rat. - 1.16]

Polynome sind endliche Summen endlicher Produkte konstanter Fkt mit id [1.6(ii)]. Alle "Bauklötze" sind stetig [1.8(i), 1.8(ii) mit  $\varnothing=1$ ], daher folgt aus 1.17(i) [+, ·] die Stetigkeit von Polynomen in jedem Pkt ihres Definitionsbereichs.

Rationale Fkt sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, wo der Nenner nicht verschwindet [1.2(iii)]. Polynome sind nach obigem stetig auf ihrem Defbereich  $\varnothing$  oder nach 1.17(ii) [ / ] auch rat. Funktionen in jedem Pkt ihres Defbereichs. ]

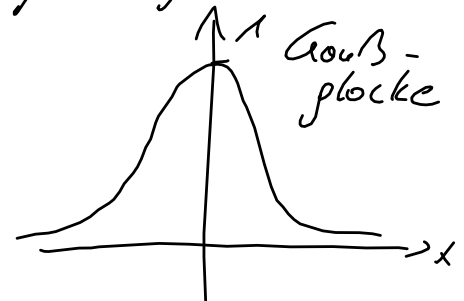
### 1.18 BSP (Stetige Fkt aus 1.17)

(i)  $p(x) = -x^2$  ist ob Polynom stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  [1.18]  $\exp$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$  [1.8(iii)]. Also gilt wegen 1.17(ii)

$$\exp \circ p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \exp(-x^2)$$

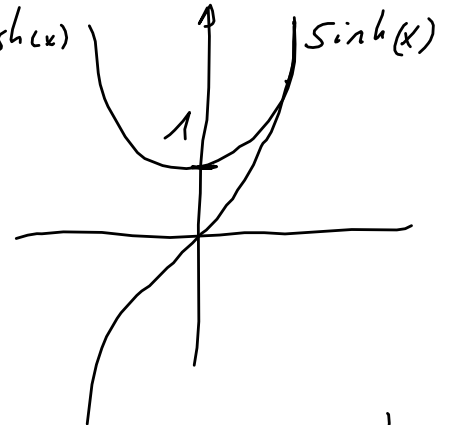
ist stetig auf  $\mathbb{R}$



(ii) Der hyperbolische Sinus & Cosinus sind stetig  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x))$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} (\exp(x) + \exp(-x))$$



[Diese Fkt parametrisieren die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$

in Analogie zum Kreis  $x^2 + y^2 = 1$   $\begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{pmatrix}$   
[UE]

## 1.20 MOTIVATION (Grenzwerte von Fkt)

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffs führen.

Genauer wollen wir eine Fkt  $f$  entlang beliebiger konvergenter Folgen  $(x_n)$  in  $D$  auswerten oder  $f(x_n)$  betrachten. (Diese Idee liegt sehr nahe zur Folgenstetigkeit, vgl. 1.11, 1.12). Als technischer Punkt ergibt sich, dass eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$ , die (als Folge in  $\mathbb{R}$ ) konvergiert ihren Limes nicht notwendigerweise in  $D$  haben muß, z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in (0,1] \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0,1] \quad \text{---} \left[ \begin{array}{c} \infty \\ \dots \\ 0 \end{array} \right]_1$$

Grenzwerte von Folgen in  $D$ , die (in  $\mathbb{R}$ ) konvergieren sind daher genau die Berührungspunkte (vgl. [17] 3.27) von  $D$  [17] Prop. 3.30 (ii)].

Die grundlegende Def ist daher.

1.21 DEF (Grenzwert einer Fkt) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt und sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $D$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad \text{falls für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt, dass } f(x_n) \rightarrow c$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ oder } \pm \infty$$

## 1.22 BEOBSACHTUNG (Zum Grenzwert von Fkt)

(i) Wie in 1.20 wiederholt gibt es wegen [17] 3.30 (ii) für jeden Berührungspunkt  $a$  von  $D$  mindestens eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow a$  [i.e. wird es aber viele solcher Folgen geben...]

(ii) Wie oben gesagt, muß  $a$  nicht in  $D$  liegen. Falls dem aber so ist, so ist  $x_n = a \forall n$  (also die konstante Folge  $x_n = a$ ) eine gemäß Def 1.21 erlaubte Folge. Falls dann  $\lim f(x)$  überhaupt existiert, muß er schon  $f(a)$  sein [denn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_n) = \lim_{x_n = a} f(x) = f(a)$ ]

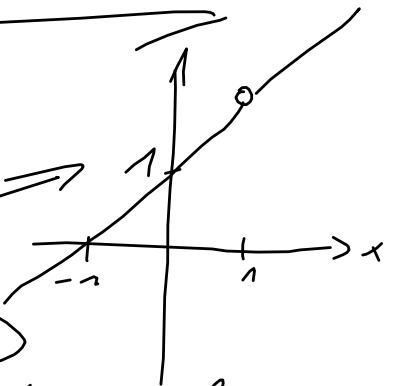
1.23 BSD (Limes rationaler Fkt)

(i)  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

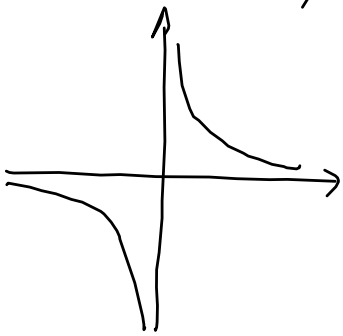
denn sei  $x_n \in D \Rightarrow x_n \neq 1 \forall n$  und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

Ist ja nur eine verknappte lineare Fkt



(ii)  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 1/x$



$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  weil  $\exists B f(1/n) \rightarrow \infty, f(-1/n) \rightarrow -\infty$

Wir sollten also unseren Begriffsbegriff erweitern:

(1) Wir brauchen einen Begriff, der auch "einseitiges" Annähern erlaubt, also Folgen  $x_n \rightarrow 0, x_n > 0$  bzw  $x_n \rightarrow 0, x_n < 0$

(2) Wir sollten auch Grenzwerte für  $f$  längs Folgen  $x_n \rightarrow +\infty, x_n \rightarrow -\infty$  zulassen.

Also formulieren wir wie folgt

1.24 DEF (Einseitige & unendliche Grenzwerte v. Fkt)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

(i) Sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $D$  in  $(0, \infty)$ . Wir schreiben

$\lim_{x \downarrow a} f(x) = c$  oder  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c$  verstehen  
 es ist der rechtsseitige Grenzwert von  $f$  gegen  $a$ , falls

für alle Folgen  $(x_n)$  in  $D$ ,  $x_n > a, x_n \rightarrow a$ :  $\lim_{x_n \rightarrow a} f(x_n) = c$  gilt

(ii) Analog dazu definieren wir den linksseitigen  
 Limes  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

(iii) Falls  $D$  noch oben unbeschränkt ist und für  
 jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt, dass  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$   
 dann schreiben wir

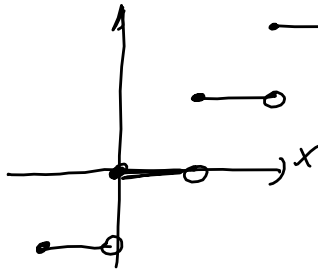
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

(iv) Analog definieren wir  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  für noch unten unbeschränkte  
 Definitionsbereiche  $D$ .

1.25 BSD (Nochmals Grenzwerte von Fkt)

(i)  $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$$

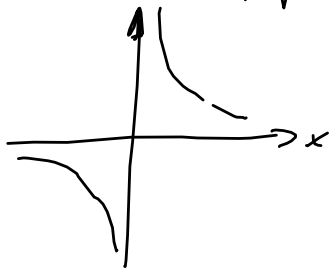


$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$$

$0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$

$1 < x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$

(ii)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 1/x$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$0 > x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lfloor 2.47(ii) \rfloor f(x_n) = 1/x_n \rightarrow -\infty$

detto  $\lfloor 2.47(ii) \rfloor$

$\forall K > 0 \exists N \forall n \geq N |x_n| > K \Rightarrow 1/|x_n| < 1/K$

(iii) Sei  $m \geq 1$  und  $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$  ein Polynom. Dann gilt

$$\left. \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{p(x)} = 0 \right\}$$

Tatsächlich gilt:

$$p(x) = x^m \left( 1 + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^m} \right) \geq x^m \left( 1 - \frac{|a_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^m} \right)$$

Sei  $x \geq M := 2m \cdot \max(|a_{m-1}|, \dots, |a_0|)$  dann gilt

$$p(x) \geq x^m \left( 1 - m \frac{1}{2m} \right) = \frac{x^m}{2} \quad (*)$$

Sei nun  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \geq M \forall n \geq N$

und somit 
$$p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

also 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty.$$

Um die 2. Behauptung zu zeigen bemerke dass (\*) impliziert, dass  $p(x) \geq 1/2 \forall x \geq M$ , daher ist  $1/p(x)$  für alle  $x \geq M$  definiert und das Resultat folgt aus [1] 2.47(ii).

in 1.20  
angekündigt

### 1.26 Prop (Grenzwert & Stetigkeit)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ ist stetig in } a \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{array} \right\}$$

Beweis [geht einfach die Begriffe zusammensetzen & 1.12]

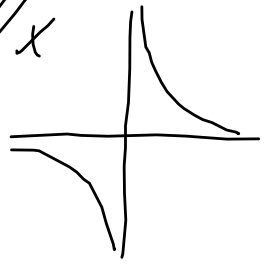
$$f \text{ stetig in } a \stackrel{1.12}{\Leftrightarrow} \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a) \stackrel{1.20}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

□



1.27 BEM (Nochmal  $1/x$  - für Erbsenrettung von 1.15 (ii))

Wir betrachten nochmal  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$   
 In 1.15 (ii) haben wir bemerkt, dass es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0 = 0 \notin D$  zu fragen.



Tatsächlich hat es aber etwas mit dem „unstetigen Aussehen“ von  $1/x$  bei  $x_0 = 0$  auf sich, und zwar:

$f(x) = 1/x$  kann nicht stetig von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden.

Das bedeutet  $\exists \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den beiden Eigenschaften

- $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$
- $\tilde{f}$  stetig auf  $\mathbb{R}$

Dann angenommen es gäbe so ein  $\tilde{f}$  so müsste wegen 1.26  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x)$  existieren (und gleich  $\tilde{f}(0)$  sein).  
 Dieser Limes existiert aber nicht, da [vgl. 1.25 (ii)] es Nullfolgen  $(x_n), (y_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) \stackrel{x_n \rightarrow 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \quad \text{aber}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(y_n) \stackrel{y_n \rightarrow 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

[siehe auch weitere [UE]-Aufgaben dazu]

## § 2 SÄTZE ÜBER STETIGE FUNKTIONEN

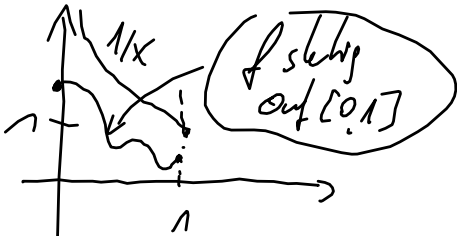
Nach den eher praktischen Ausführungen (zum Schluss) des § 1 lernen wir nun die wesentlichen theoretischen Aussagen über stetige Funktionen (auf obg. beschr. Intervallen) kennen

- den Zwischenwertsatz
- die Annahme von Minimum & Maximum
- die gleichmäßige Stetigkeit
- Umkehrsatz f. stetige, streng mon. Fkt.

### 2.1. Motivation (Die Sonderrolle obg. beschr. Intervalle)

Bisher haben wir stetige Fkt auf beliebigen  $\mathbb{T}$   $D \subseteq \mathbb{R}$  betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den obgenannten & beschränkten Intervallen  $[0, b]$  eine Sonderrolle zukommt; solche Intervalle heißen auch KOMPAKT.

Ein einfacher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Fkt auf  $[0, 1]$  im Gegensatz zu solchen auf  $(0, 1)$  betrachten: Etwa nimmt  $f(x) = 1/x$  auf  $(0, 1)$  beliebig große pos Werte an [1.21(ii)]. Für eine stetige Fkt auf  $[0, 1]$  ist ein solches Verhalten nicht vorstellbar und wir werden zeigen, dass tatsächlich

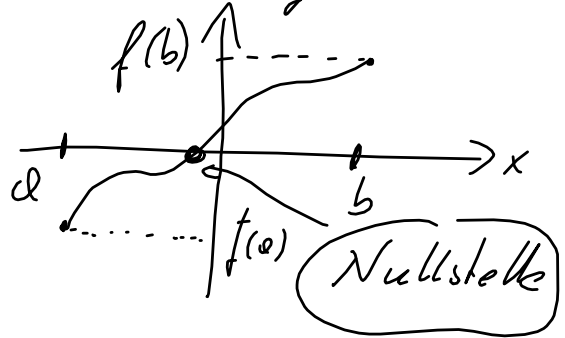


jede stetige Fkt auf  $[0, 1]$  nur beschränkte Werte annehmen kann

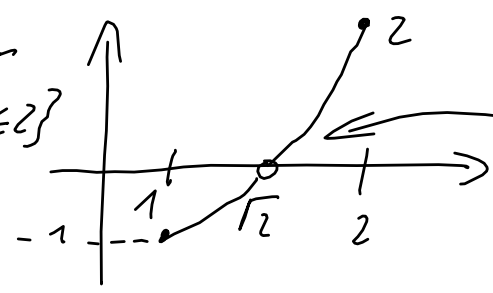
beschränkte Fkt

Wir beginnen mit einer anschaulich klaren Aussage, die oben wieder einmal -essentiell die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  verwendet.  $\emptyset$

2.2 Motivation (Der Zwischenwertsatz) Wir betrachten ein stetiges  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Es scheint dann klar zu sein, dass  $f$  eine Nullstelle haben muß. Tatsächlich



ist aber auf  $\mathbb{R}$  richtig - wie wir gleich sehen werden - aber etwa auf  $\mathbb{Q}$  falsch, denn mit  $D = \{p \in \mathbb{Q} : 1 \leq p \leq 2\}$   
 $f(x) = x^2 - 2$   
 $f(1) = -1, f(2) = 2$



Nullstelle wäre  $x_0 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} = D$

2.3 THM (Zwischenwertsatz)

Ein Hauptresultat der VO

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) < 0, f(b) > 0$  (bzw.  $f(a) > 0, f(b) < 0$ ).  
 Dann  $\exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$  ← d.h.  $f$  hat eine Nullstelle in  $p$

Vor dem Beweis ein Bsp einer Anwendung

2.4 KOR (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad)

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mind. eine reelle Nullstelle.

Beweis. Sei  $p(x) = b_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + b_0$  mit  $b_{2n+1} \neq 0$ . Klarerweise

können wir schreiben 
$$p(x) = b_{2n+1} \left( x^{2n+1} + \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}}x^{2n} + \dots + \frac{b_0}{b_{2n+1}} \right) = b_{2n+1} q(x)$$

und  $q$  ist von der Form

$$q(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_j = b_j/b_{2n+1} \quad j=0, \dots, 2n)$$

und damit wie  $q$  in 1.25 (iii)

$\xrightarrow{1.25(iii)} \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \Rightarrow \exists x_+ > 0$  mit  $q(x_+) > 0$

Andererseits gilt

$$p(-x) = -x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} - \dots = -(x^{2n+1} - a_{2n}x^{2n} + \dots - a_0)$$

$$\stackrel{1.25 \text{ (ii)}}{\implies} \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \implies \exists x_- < 0 \text{ mit } p(x_-) < 0$$

$q|_{[x_-, x_+]} : [x_-, x_+] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig

$$\stackrel{\text{Thm 2.3}}{\implies} \exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$$

$$\implies p(x_0) = 0 \quad \square$$

die Einschränkung von  $p$   
auf  $[x_-, x_+]$  - Verstoß den Rest  
außerhalb von  $[x_-, x_+]$

Beweis des Zws. Sei also  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) < 0 < f(b)$   
Wir benutzen die Intervallschachtelung 1] 3.34 um mittels  
Intervallhalbierung eine Nullstelle  $x_0$  zu "finden".

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von obg. Intervallen  $[a_n, b_n]$   
( $n \in \mathbb{N}$ ) mit den Eigenschaften

$$(a) [a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$$

$$(b) b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$(c) f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Schachtelung  
d. Intervalle

Intervalllänge in jedem  
Schritt halbiert

"Folgen" der  $x_n$

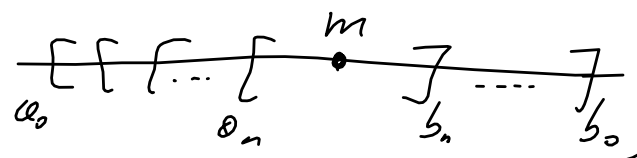
Induktionsanfang:  $n=0$ : setze  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , dann sind  
(a)-(c) offensichtlich erfüllt

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n+1$ : Angenommen wir haben

$[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$  bereits konstruiert, sodass (a)-(c)  
gelten. Wir müssen  $a_{n+1}, b_{n+1}$  finden, sodass (a)-(c)  
auch für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  gelten.

Intervallhalbierung

Wir setzen  $m = \frac{b_n + a_n}{2}$   
 und machen eine  
 Fallunterscheidung:



Ist  $f(m) \geq 0$  dann setze  $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m$   
 Ist  $f(m) < 0$  dann setze  $a_{n+1} = m, b_{n+1} = b_n$

NST links von m  
 NST rechts von m

Offensichtlich gelten (a)-(c) für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip [A] 3.34 impliziert

$$\exists! x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n] \text{ und } x_0 \in [a, b] \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(3) Weil  $f$  stetig auf  $[a, b]$  ist gilt mit 1.12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

(4) Aus der Eigenschaft (c) in (1) folgt mit [A] 2.28

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$$

Damit also  $f(x_0) = 0$  und wir haben eine NST gefunden

2.5 KOR (Zwischenwertsatz)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und liege  $c \in \mathbb{R}$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  [d.h.  $f(a) \leq c \leq f(b)$  oder  $f(a) \geq c \geq f(b)$ ].

Dann  $\exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = c$

Nonchmal wird 2.4 als Nullstellensatz bezeichnet und nur 2.5 als ZWS

Jeder Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  wird angenommen

Beweis. Wende 2.3 auf  $g(x) := f(x) - c$  an. [Genauer:  
 oBdA gelte  $f(a) < c < f(b)$  (falls auch nur einmal  $\leq$   
 statt  $<$  ist nichts zu zeigen denn  $x_0 = a$  oder  $x_0 = b$ ; falls  $\{x$   
 $\} > \text{statt } <$  gilt verläuft der Beweis völlig analog.)

Setze  $g(x) = f(x) - c$ , dann ist  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  
 $g(a) < 0 < g(b) \xrightarrow{2.3} \exists x_0 \in [a, b]: g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$  ]  $\square$

2.6 Kor (Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (nichtleeres, möglicherweise unbeschränktes)  
 Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I) \subseteq \mathbb{R}$  wieder  
 ein Intervall oder enthält nur einen Punkt

Beweis. (1) Sei  $A := \inf(f(I))$ ,  $B := \sup(f(I))$ , wobei  
 $A = -\infty$ , falls  $f(I)$  nicht n.u.b und  $B = \infty$ , falls  $f(I)$   
 nicht n.o.b.

auf Folie vorlesen

Falls  $A = B$  enthält  $f(I)$  nur einen Punkt und wir  
 sind fertig. Sei also  $A < B$

(2)  $(A, B) \subseteq f(I)$ , denn sei  $y \in (A, B)$  dann  $\exists r, s \in I$   
 mit  $f(r) < y < f(s)$  [ $A, B$  sind inf, sup]  
 oBdA können wir annehmen, dass  $r < s$  [ $r = s$  ist  
 nicht möglich und  $r > s$  ist analog zu behandeln]  
 $\xrightarrow{2.5} \exists x_0 \in [r, s] \subseteq I$  mit  $f(x_0) = y \Rightarrow y \in f(I)$

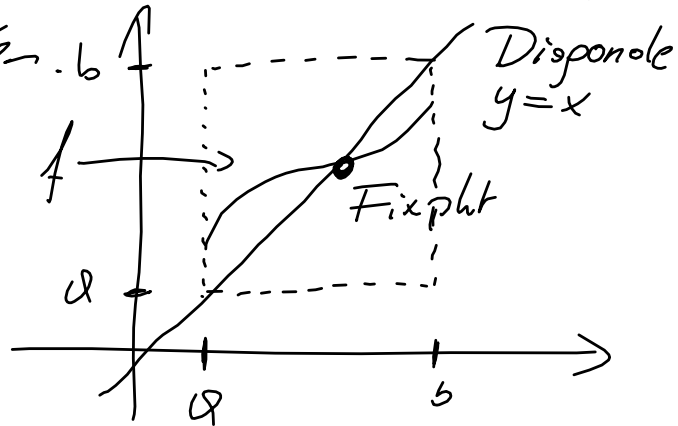
(3) Also gilt  $(A, B) \subseteq f(I) \subseteq [A, B]$  (bzw.  $(-\infty, B]$  oder  
 Daher ist  $f(I)$  eines der Intervalle  $[A, \infty)$   
 $(A, B), [A, B), (A, B], [A, B]$  (bzw.  $(-\infty, B), (-\infty, B]$   
 oder  $(A, \infty), [A, \infty)$ .  $\square$

2.7 Kor (Fixpunktsatz) Sei  $f: [0, b] \rightarrow [0, b]$  eine stetige Fkt. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt,  
 d.h.  $\exists x_0 \in [0, b]$  mit  $f(x_0) = x_0$

## 2.8 BEW (Zum Fixpunktsatz)

(i) Die Aussage von 2.7. kann im Quadrat  $[0, b] \times [0, b]$  in  $\mathbb{R}^2$  veranschaulicht werden.

Der Graph von  $f$  beginnt bei  $x=0$  oben an der linken Kante des Quadrats und endet bei  $x=b$  an der rechten Kante; daher muß er die Diagonale schneiden & dort gilt dann  $f(x_0) = x_0$ .



(ii) Wozu das ganze? Fixpunktsätze dienen meist allgemein dazu Lösungen von Gleichungen zu finden (im Sinne von: die Existenz einer Lsg zu beweisen vor allem in dem Fall, dass man die Gleichung nicht explizit lösen kann! - Und das ist eine der roten Fäden der Analysis: Existenzmaschinen)

In diesem Sinne ist schon Thm 2.3 die Existenzmaschine und die Korollare 2.6, 2.7 Varianten davon.

[Wenig überraschend spielt die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  wiederum die zentrale Rolle vgl. 2.2.]

Inwiefern ist nun insb. solche 2.7 nützlich?

Oft kann man das Lösen einer Gleichung z.B.  $p(x) = a$

gewinnbringend in ein Fixpunktproblem verwandeln, etwa  
 $f(x) = p(x) - q + x$ ; Dann gilt nämlich für einen Fixpunkt  
 $x_0$  von  $f$   $p(x_0) = f(x_0) - x_0 + q = x_0$ .

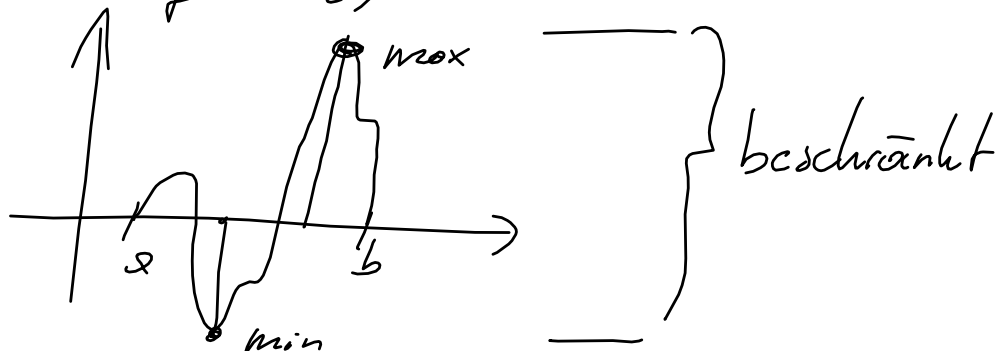
(iii) Die Tatsache, dass 2.7 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.3 ist sieht man auch daran, dass ein Kippen der Skizze in (i) um  $90^\circ$  genau die Skizze in 2.2 liefert.

Beweis (Fixpunktsth.). Wandle 2.3 auf die Fkt  $g(x) = f(x) - x$  an. [UE] □

## 2.8. MOTIVATION (Annahme von Max & Min)

Der JWS lehrt uns, dass eine stetige Fkt auf dem  $k_p$  Intervall  $[0, b]$  jeden Wert zwischen  $f(0)$  und  $f(b)$  annimmt also der Graph von  $f$  keine Lücken besitzt.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph auch nicht beliebig große oder kleine Werte beinhalten kann und außerdem  $f([0, b])$  ein Max und ein Min hat, also:



Zunächst etwas Terminologie

2.10 DEF (Beschränkte Fkt) Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fkt.

Falls das Bild  $f(D)$  von  $f$  beschränkt ist, d. h.

$$\exists M > 0 \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M,$$

dann heißt  $f$  beschränkt.



### 2.11 THM (Setze Fkt nehmen auf $k_p$ Intervollen $\text{Max} \& \text{Min}$ on.)

Sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h.

$$\exists x_1 \in [a,b] \quad f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \min f[a,b]$$

$$\exists x_2 \in [a,b] \quad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \max f[a,b]$$

$$= \inf f[a,b]$$

$$= \sup f[a,b]$$

natürlich auch

### 2.12 WARNUNG ( $[a,b]$ beschr & obg, D)

(i) Es ist essentiell, dass das Intervoll in 2.11 auf dem  $f$  stetig ist obg und beschränkt ist. Sonst muß  $f$  nicht beschränkt sein...

$$\hookrightarrow f_1: (0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 1/x$$

Intervoll nicht obg,  $f$  nicht n.o.b.

$$\hookrightarrow f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

Intervoll unbeschränkt,  $f$  nicht n.o.b.

und auch weder  $\text{Min}$  noch  $\text{Max}$  annehmen:

$$f_3: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

ist zwar beschränkt hat aber weder  $\text{Max}$  noch  $\text{Min}$

(ii)  $x_1, x_2$  oben müssen keinesfalls eindeutig sein, z.B. wenn  $f$  konstant ist.

NICHT VORGETRAGEN

auf Folie verschieben

Beweis. Wir beweisen nur, dass  $f$  nach oben beschränkt ist ( $\exists M: f(x) \leq M \forall x$ ) und das  $\text{Max}$  angenommen wird. Der Beweis für n.u.b und  $\text{Min}$  ist analog (bzw kann durch Übergang zu  $-f$  gezeigt werden)

(1) Sei  $A := \sup f[0, b]$  (Es gilt  $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ )

$\Rightarrow \exists$  Folge  $(a_n)$  in  $[0, b]$  mit  $f(a_n) \rightarrow A$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
 $\leftarrow$  [Def sup]

(2)  $a_n \in [0, b] \Rightarrow a_n$  beschränkt  $\xRightarrow{\text{Bolzano}}$   $\exists$  konvergente TF  $(a_{n_k})_k$   
 $\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$

Sehe  $x_2 := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$   $\square$  2.28

Wegen  $a \leq a_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq \lim a_{n_k} = x_2 \leq b$

also  $x_2 \in [0, b]$

(3)  $f$  stetig  $\Rightarrow$

$$f(x_2) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[0, b]$$

Also ist  $f$  durch  $f(x_2) = \sup f[0, b]$  n. o. b  
 und das Sup wird in  $x_2$  angenommen, also ist  
 $f(x_2) = \max f[0, b]$ . □

### 2.13 MOTIVIERENDES BSP (Die Abhängigkeit $\delta$ von $x_0$ )

Ist eine Fkt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf part  $D$  stetig so gilt nach (1.1)

$$\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass  $\delta$  i. o. nicht

nur (und teilweise vgl. 1.7ciii) von  $\varepsilon$  abhängt, sondern auch  
von  $x_0$ . Diese Abhängigkeit wollen wir nun in einem

Bsp explizit machen.

Sei dazu  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 1/x$

Nun fixieren wir  $\varepsilon > 0$ .

Dann ist anschaulich klar,

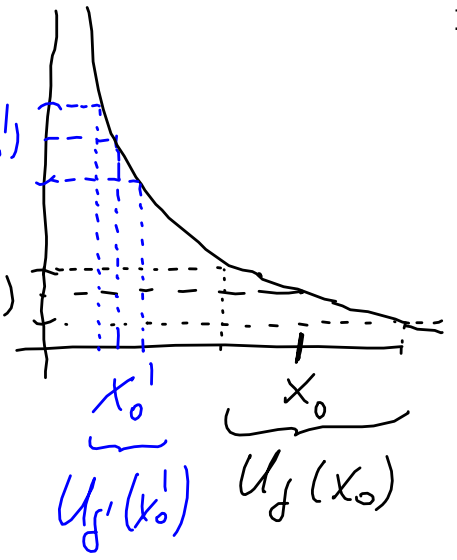
dass für ein  $x_0$  näher bei

0 das entsprechende Sicherheitsintervall

$U_f(x_0)$  kleiner gewählt werden muß.

$U_\varepsilon(f(x_0')) \{ f(x_0') \}$

$U_\varepsilon(f(x_0)) \{ f(x_0) \}$



[Rechnerisch: Wir brauchen nur jenseit  $x < x_0$  zu betrachten, da dort der Anstieg steiler und  $\delta$  potentiell kleiner wird. Setze also  $x_\delta = x_0 - \delta$  und betrachte

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_\delta}{x_\delta x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

Soll nun  $|f(x_\delta) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  sein, so muß gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x_0^2 - \varepsilon x_0 \delta > \delta$$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

Also  $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$  und das bedeutet, dass bei kleinerem  $x_0$  auch  $\delta$  kleiner werden muß.]

Wenn wir nun für eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  fordern, dass  $f$  unabh. von  $\delta$  (für ein  $Pkt x_0 \in D$ ) sein soll so erhalten wir eine stärkere Stetigkeits Eigenschaft: Für je 2 Pkte  $x, x' \in D$  soll wenn sie nur  $\delta$ -nahe beieinander liegen (d.h.  $|x - x'| < \delta$ ) – und zwar egal wo die beiden liegen – schon die Abschätzung  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  gelten. Offiziell:

2.14 DEF (Gleichmäßige Stetigkeit) Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Achtung: wieder in die Reihenfolge der Quoten

2.15 BEM (Stetigkeit vs. glm. Stetigkeit)

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ glm. stetig} \implies f \text{ stetig auf } D$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.13 zeigt, also

$$f \text{ glm. stetig} \not\iff f \text{ stetig in } D$$

[Gibt explizit:  $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ . Folgt  $x_n = \frac{1}{n}$  und  $x_n' = \frac{1}{2n}$  ( $n \geq 1$ ) dann gilt

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \text{ aber}$$

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 2n - n = n$$

der Abstand der Platte  $x_n, x_n'$  geht gegen 0 wenn die Platte nach links rutscht

ist unbeschränkt und daher sicher nicht unterhalb eines fixen  $\epsilon$ -Toleranz.]

(iii) Esentlich am Gegenbsp ist, dass  $D = (0, 1]$  also bei 0 offenes Intervall ist. [Für jedes Intervall der Form

$[\eta, 1]$  mit  $0 < \eta < 1$  kann dieser Effekt nicht auf-

ETA

treten, denn  $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$  könnten nie kleiner als  $\eta$  werden. Und tatsächlich sind auf abg. & beschr. Intervallen beide Begriffe äquivalent, wie das nächste Thm lehrt.]

nach links unmöglich

2.16 THM (Glm Stetigkeit auf  $\mathbb{K}$  Intervallen)

Sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  auch glm. stetig (auf  $[a,b]$ ).

Beweis. (1) Indir. ang.  $f$  ist nicht glm. stetig

auf Folie schreiben  $\Rightarrow \neg (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a,b] \text{ mit } |x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \epsilon)$   
 $= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in [a,b] \text{ mit } |x-x'| < \delta \text{ und } |f(x)-f(x')| \geq \epsilon$

(2) Wir fixieren dieses  $\epsilon$  und konstruieren Folgen  $(x_n), (x'_n)$  indem wir sukzessive  $\delta = 1/n$  ( $n \geq 1$ ) setzen. [vgl. Beweis 1.12. "⇐"] So erhalten wir

(\*)  $(x_n), (x'_n)$  in  $[a,b]$  mit  $|x_n - x'_n| < 1/n$  aber  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$

(3)  $(x_n)$  ist beschränkt  $\xrightarrow[\text{Weirstr.}]{\text{Bolzano}}$   $\exists$  konvergente TF  $(x_{n_k})_k$   
 Setze  $\tilde{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a,b]^\oplus$

$n_k$  sind die Indizes der TF  $(x_{n_k})_k$  von  $x_n$

(4) Die TF  $(x'_{n_k})_k$  von  $(x'_n)$  konvergiert auch gegen  $\tilde{x}$ , denn  
 $|x_{n_k} - x'_{n_k}| \leq 1/n_k \rightarrow 0$

(5) Die Stetigkeit von  $f$  in  $\tilde{x}$  liefert einen Widerspruch:

(\*)  $0 < \epsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0$

$\oplus \tilde{x} \in [a,b]$  wegen  $[a,b]$  z.z.P.; genauer  
 $x_n \in [a,b] \forall n \rightarrow a \leq x_n \leq b$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $a \quad x_0 \quad b$

(4) + 1.12

□

2.17 Motivation (Stetige inverse Fkt) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f: A \rightarrow B$  bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}: B \rightarrow A, f(x) \mapsto x$  [ETA, 4.3.29].

Falls  $f$  stetig ist, folgt dann auch  $f^{-1}$  stetig?  
In allgemeinen NEIN! Für ein Gegenbsp. siehe

Die Umkehrfunktion:  
Lineare Abbildung & bijektiv  
Situationsfragen & bijektiv  
f: V -> W  
f^-1: W -> V  
linear

Durch zwei zusätzliche Annahmen an  $f$  [UE]  
können wir über ein  $[JA]$  erreichen, nämlich

(1)  $f$  streng monoton [d.h.  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  bzw.  $f(x) > f(y)$ ]

Bemerkung: str. monoton  $\Rightarrow$  injektiv

wachsend      fallend

(2)  $A$  ist ein Intervall

2.18 Thm (Umkehrsatz f str-mon & stetige Fkt)

Sei  $I$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & streng mon. wachsend [fallend]  
Dann gilt (i)  $J := f(I)$  ist ein Intervall  
(ii)  $f: I \rightarrow J$  ist bijektiv  
(iii)  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ist stetig & streng mon. wachsend [fallend]

2.19 BEW (zur Notation) Gen streng genommen  
müßten wir für die Abb  $f$  mit eingeschränktem Ziel-  
bereich  $f(I)$  eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B

$$\tilde{f}: I \rightarrow J := f(I)$$

$$x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müßten wir dann  $\tilde{f}^{-1}$  schreiben.  
Gemäß einem allg. üblichen Mißbrauch der Notation schreiben  
wir aber wiederum  $f$  und  $f^{-1}$  [vgl. ETA, 2. Aufl. pr. Box p.]

NICHT VORLESEN

Beweis von 2.18. Wir beweisen nur den Fall "streng monoton wachsend". Der fallende Fall ergibt sich, wenn man  $f$  durch  $-f$  ersetzt.

auf Folie versetzt

(i) Kor 2.6  $\Rightarrow f(I) =: J$  ist ein Intervall

[der Fall "einpunktig" ist wegen der str. Monotonie unmöglich]

Jede Abb ist surj. auf ihr Bild

(ii)  $f$  str. mon wachsend  $\Rightarrow f$  injektiv und daher  $f: I \rightarrow J$  bijektiv

(iii)  $f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$  [= Widerspruch Injektivität,  $x > y$  da mon.]

Bleibt ??  $f^{-1}$  stetig  $\Rightarrow f^{-1}$  streng mon wachsend

Foll 1:  $b$  ist kein Randpunkt von  $J$

Sei  $a := f^{-1}(b) \Rightarrow a$  ist kein Randpunkt von  $I$

[sonst wäre wegen der str. Monotonie  $b$  ein Randpht von  $J$ ]

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  sodass  $a - \varepsilon, a + \varepsilon \in I$

$f$  str. mon  $\Rightarrow f(a - \varepsilon) < f(a) = b < f(a + \varepsilon)$

Also  $\exists \delta > 0$  mit  $f(a - \varepsilon) < b - \delta < b + \delta < f(a + \varepsilon)$ .

Das bedeutet aber  $f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b))$

und somit ist  $f^{-1}$  stetig in  $b$  (vgl. A.7ci)

Foll 2:  $b$  ist linker Randpht von  $J \xRightarrow{\text{Mon}}$   $a = f^{-1}(b)$  ist linker

Randpht von  $I$  und wir können den Beweis wie in Foll 1

führen aber mit "einseitigen Umgebungen"  $U_\delta(b) \cap J, U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$  und  $f(a) = b < b + \delta < f(a + \varepsilon)$

Foll 3:  $b$  ist rechter Randpht von  $J$ . völlig analog zu Foll 2 ]

## 2.20 BEM (Umkehrsatz f. str. mon. Fkt)

Im Beweis von 2.18 haben wir die Stetigkeit von  $f$  nur in cis verwendet. Daher gilt folgende Variante des Thms:

$I$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton (nicht notwendigerweise stetig)  
 $\implies f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  stetig & str. mon

Falls  $f$  unstetig ist, dann ist i.o.  $f(I)$  aber kein Intervall, z.B.

## 2.21 BSP (Stetigkeit der Wurzel)

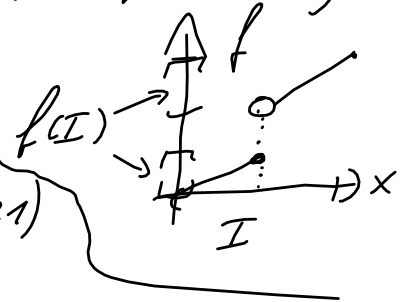
Als Anwendung von Thm 2.18 betrachten wir (k21)

$$f_{2k}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \mapsto x^{2k}$$

$$f_{2k+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^{2k+1}$$



Beide Fkt sind auf einem Intervall definiert  $[\mathbb{R} = (-\infty, \infty)]$   
 stetig [1.18] streng mon. wachsend und bijektiv [auf  $[0, \infty)$   
 bzw  $\mathbb{R}$ ]

$$\xrightarrow{2.18} f_{2k}^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad f_{2k+1}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sind stetig & streng mon wachsend

Kleinerweise sind  $f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1}$  gerade die Wurzelfunktionen  
 bzw  $\sqrt[2k]{\phantom{x}}$   $\sqrt[2k+1]{\phantom{x}}$  [vgl. [0] 1.11ciii)].



## §3 ELEMENTARE TRANSZENDENTE FUNKTIONEN

3.1 EINLEITUNG. In diesem § definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir allgemeine Potenzen  $x^\alpha$  ( $0 < x, \alpha \in \mathbb{R}$ ) definieren.

Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in  $\mathbb{C}$ -gerade soweit, dass wir die komplexe Exponentialfunktion ( $\exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) analog zu  $\mathbb{R}$  über die Reihendarstellung definieren können. Diese verwenden wir, um die Winkelfunktionen Sinus & Cosinus zu definieren. Dann Grundeigenschaften studieren wir gründlich, um schließlich die Tangensfunktion und die Arcus-Funktionen betrachten zu können.

### 3.2 PROP & DEF (Logarithmus)

(i) Die Exponentialfkt  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng  
 } monoton wachsend und  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

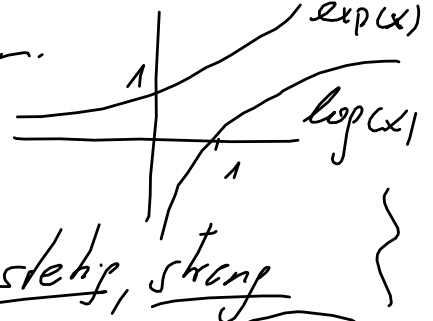
(ii) Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

und nennen sie den (natürlichen) Logarithmus.  $\log$  ist stetig und streng mon. wachsend.

(iii) Die Logarithmusfkt erfüllt die folgende Funktionsgleichung ( $x, y \in (0, \infty)$ )

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$



d.h.  $\exp(\log x) = x$   
 $\Leftrightarrow x = \exp(\log x)$

Beweis. (i)  $\exp$  ist stetig nach 1.8(iii). Wir zeigen die Monotonie.

Sei  $\xi > 0$ , dann gilt

$$\uparrow [xi] \quad \exp(\xi) = 1 + \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 1 + \xi. \quad (*)$$

Sei nun  $x_1 < x_2$  und setze  $\xi = x_2 - x_1 > 0$ , dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \stackrel{1.1(4.2)}{=} \exp(x_1) \exp(\xi) \stackrel{(*)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist  $\exp$  streng monoton wachsend.

Wir zeigen  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ :

1] 4.40(i)  $\Rightarrow \exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ .

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es z.z.

$n \in \mathbb{N}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0$ , (\*\*)

denn dann werden wegen der Zus 2.3 alle Werte in  $(0, \infty)$

angenommen. [genauer sei  $y \in (0, \infty) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $\exp(-n) < y < \exp(n) \stackrel{\text{Zus}}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = y$ ]

Die Grenzwerte in (\*\*) sind aber leicht zu kriegen:

$n \in \mathbb{N} \stackrel{1] 4.40(ii)}{\Rightarrow} \exp(n) = e^n$

1] 4.43  $\Rightarrow e > 2 > 1 \stackrel{1] 1.5(ii)}{\Rightarrow} e^n \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$

und schließlich

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} \stackrel{1] 2.47(i)}{\rightarrow} 0 \ (n \rightarrow \infty)$

(ii) Mit (i) besagt nun 2.18:

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv und  $\exp^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig & str. mon. wachsend

(iii) [Die Funktionsgl für  $\log$  folgt aus der für  $\exp$ .] [etc]

Seien  $x, y \in (0, \infty)$ ; setze  $\xi := \log x$ ,  $\eta := \log y$

1.3.39

$$\implies \exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y$$

$$\implies \underline{\log(xy)} = \xi + \eta = \underline{\log(x) + \log(y)}. \quad \square$$

### 3.3 BEW (Logarithmen von Potenzen)

Als unmittelbare Konsequenz von 3.2(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k \log(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}).$$

### 3.4 MOTIVATION (allg. Potenzen)

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalem Exponenten definiert, d.h.  $x^q$  für  $\mathbb{R} \ni x > 0$ ,  $q \in \mathbb{Q}$ .

Genauer haben wir folgende Definitionen

- $x^n := x \cdot \dots \cdot x \quad (n \in \mathbb{N})$
- $x^{-n} := 1/x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- $x^{1/n} := \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N})$  [vgl. [10] 1.11(iii)]

und damit für  $\mathbb{Q} \ni p = m/n$

$$\left. \vphantom{\int} \right\} x^p := \sqrt[n]{x^m}$$

Vir werden nun die allg. Potent, also  $x^a$  ( $x > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ) definieren also  $x^q$  ( $q \in \mathbb{Q}$ ) zu  $x^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) verallgemeinern. Als Leitfaden benutzen wir folgende Eigenschaft von  $x^n$

$$x^n = \exp(\log(x^n)) \stackrel{3.3}{=} \exp(n \log(x)).$$

3.5 DEF (Allg. Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfkt)

(i) Sei  $x > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die allg. Potenz

als  $x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$

(ii) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren wir die allg. Potenzfunktion

$\omega_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^\alpha (= \exp(\alpha \log(x)))$

(iii) Die Exponentialfkt mit Basis  $a \in (0, \infty)$  definieren

wir als  $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \exp_a(x) = a^x (= \exp(x \log(a)))$

3.6 Bem (zu allg. Potenz- & Exp-Fkt)

(i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 3.5(i) ist ( $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ )

$\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$  [ $\log(x^\alpha) = \log(\exp(\alpha \log(x)))$ ]

also eine Verallgemeinerung von 3.3 von  $k \in \mathbb{Z}$  zu  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(ii) Bemerk, dass  $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ) gilt,

denn  $\stackrel{1.4.37}{e := \exp(1)} \Rightarrow \log(e) = 1 \Rightarrow e^x = \stackrel{3.5(iii)}{\exp(x \log e)} = \exp(x)$ .

(iii) Als nächstes fassen wir die Grundeigenschaften von allg. Potenz- & Exp-Fkt in einer Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den jeweiligen Definitionen [siehe für auch [UE]]

Ab jetzt können wir  $e^x$  statt  $\exp(x)$  schreiben

3.7 Prop (Die allg. Exp-Fkt) Sei  $\mathbb{R} \ni a > 0$ .

Die allg Exp-Fkt  $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (auf  $\text{spann } \mathbb{R}$ ) und es gilt:

(i) Falls  $a > 1$ , dann ist  $\exp_a$  str. mon. wachsend.

Falls  $a < 1$ , dann ist  $\exp_a$  str. mon. fallend.

(ii) Es gilt die Funktio. n. pl.  $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}$

Konsistent mit natürlichen Potenzen  
mit rationalen Potenzen

(iv) Für  $p \in \mathbb{Z}, \mathbb{N} \ni q \geq 1$  gilt  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{1/q}$

(v) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

(vi) Für alle  $b > 0, x \in \mathbb{R}$  gilt  $a^x b^x = (ab)^x$

(vii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

3.8 BSP (Nützliche Grenzwerte)

(i) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$

oBdA  $x > 0$ , dann

$$\text{gilt } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

Und daraus folgt sofort [11] Prop 2.47(ii)]

(ii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

et p wächst  
stärker ob  
jede Potenz

(iii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{1/x} = \infty$ ,

denn setze  $y = 1/x$ ,

dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y}{y^k} \stackrel{(i)}{=} \infty$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$ ,

denn wegen Prop 3.2(ii) ist  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und str. mon. wachsend.

(v) Für alle  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} = \infty$

Wieder wegen [1] Prop. 2.47 folgt die 2. Aussage aus der 1. Um dies zu beweisen schreiben wir  $x = e^{-y/x}$  (d.h.  $y = -\alpha \log(x)$ ) und rechnen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

↑  
[1] 2.47

(vi) Für alle  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$

ObdA  $x > 0$  und mit  $x^\alpha = e^y$

(d.h.  $y = \alpha \log(x)$ ) erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = 0 \quad (ii)$$

*log wächst als jede Potenz*

*x geht gegen 0, y geht gegen unendlich*

(vii) Für  $\alpha > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log(x) = 0$ ,

$0 = \log(1) = \log(x \cdot \frac{1}{x}) = \log(x) + \log(1/x) \Rightarrow \log(x) = -\log(1/x)$

denn setze  $x = 1/y$  dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} \stackrel{(vi)}{=} 0$$

$$(viii) \left| \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right|$$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus [1] Prop. 4.42

für  $N=1$ :

$$|e^x - 1 - x| = |R_2(x)| \leq 2 \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{für } 0 < |x| < 3/2$$

$$\text{und daher } \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - 1 - x|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

### 3.9 MOTIVATION (Die komplexe Exp-Fkt - Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$ )

Wir wollen nun die Exp-Fkt nicht nur  $\forall x \in \mathbb{R}$  sondern sogar  $\forall z \in \mathbb{C}$  definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen [vgl. [1] Bem. 4.36]. Um deren (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von  $\exp$  heranziehen zu können, müssen wir diese Begriffe in  $\mathbb{C}$  definieren.

Eine Betrachtung der resp. Begriffe in  $\mathbb{R}$  zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw. die  $\varepsilon$ -Umgebungen in  $\mathbb{R}$  durch ihre Analogon in  $\mathbb{C}$  ersetzen müssen.

Daher stellt der folgende Exkurs über die Unvollkommenheit der Analysis in  $\mathbb{C}$  auch eine Wiederholung derselben in  $\mathbb{R}$  dar - wobei wir seine Verallgemeinerungsfähigkeit schonlos voraussetzen werden.

### 3.10 EXKURS: Grundlagen der Analysis in $\mathbb{C}$

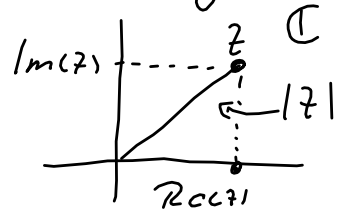
(A) Wiederholung:  $\mathbb{C}$  [vgl. 10] 1.4] (von Folie vorgelesen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  und wir verwenden die Schreibweisen

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y), \quad z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

Die komplex konjugierte  $\bar{z}$  ist gegeben durch  $\bar{z} = x - iy$  und das Produkt  $z\bar{z}$  erfüllt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$



(B) DEF (Betrag in  $\mathbb{C}$ ). Der (Absolut-) Betrag  $|z|$  von  $z \in \mathbb{C}$  ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

Noch 10] 1.4 (iv) identifizieren wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x + i0 \in \mathbb{C}$  und daher ist der Betrag von  $x$  als reelle Zahl identisch mit dem Betrag von  $x$  als komplexe Zahl

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$

(C) Lemma (Grundigenschaften der Betrag)

Die Abb 1.1:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaften ( $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ )

(N1)  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  (pos definit)  $\leftarrow$

(N2)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$  (multiplikativ)  $\leftarrow$

(N3)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  ( $\Delta$ -Ungl.)  $\leftarrow$

Wie in  $\mathbb{R}$

Weiters gilt

(i)  $|\bar{z}| = |z|$

(ii)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$



Beweis. Sei  $z = x + iy$ ,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j=1,2$ )

(N1)  $|z| \geq 0$  und  $|0| = 0$  sind klar.

Falls  $|z| = 0$ , dann  $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0$  und

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0 = y$$

(N2)  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$

(i) klar per Def.

(ii)  $|\operatorname{Re}(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2$  und ebenso für  $\operatorname{Im}(z)$

(N3)  $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + z_2 \overline{z_2}$

$$= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2$$

$$\stackrel{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$



(D) DEF (Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{C}$ )

(i) Eine komplexe Folge bzw. eine Folge in  $\mathbb{C}$  ist eine Abb

$c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Analog zum reellen Fall schreiben wir

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für die Folge und  $c_n = c(n)$

(ii) Eine Folge  $(c_n)$  konvergiert gegen  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c_n \rightarrow c$ ,

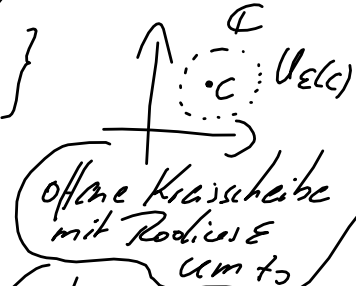
falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |c_n - c| < \varepsilon$$

bzw äquivalent dazu mit der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $c \in \mathbb{C}$

definiert als  $U_\varepsilon(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon\}$

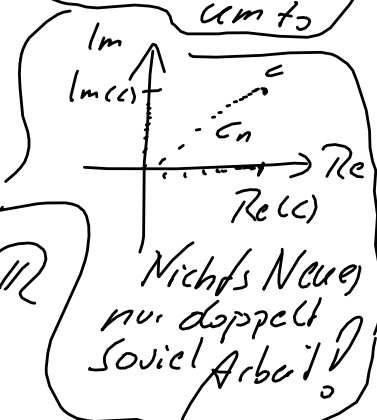
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N c_n \in U_\varepsilon(c)$$



(E) PROP (Konvergenz in  $\mathbb{C}$  ist Konvergenz von  $\operatorname{Re}$  &  $\operatorname{Im}$ )

Für eine Folge  $(c_n)$  in  $\mathbb{C}$  gilt

$$c_n \rightarrow c \text{ in } \mathbb{C} \iff \begin{matrix} \operatorname{Re}(c_n) \rightarrow \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c_n) \rightarrow \operatorname{Im}(c) \end{matrix} \text{ in } \mathbb{R}$$



Beweis. Wir setzen  $a_n = \operatorname{Re}(c_n)$ ,  $b_n = \operatorname{Im}(c_n)$  und  
 $a = \operatorname{Re}(c)$ ,  $b = \operatorname{Im}(c)$

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\varepsilon > 0 \stackrel{\text{D(iii)}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |c_n - c| < \varepsilon$   
 und daher  $\forall n \geq N$  (C(ii))

$$|a_n - a| = |\operatorname{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$$

$$|b_n - b| = |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon,$$

also  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon/2, |b_n - b| < \varepsilon/2$   
 und daher  $\forall n \geq N$

$$|c_n - c| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)|$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

also  $c_n \rightarrow c$  □

(F) KOR (Limes und Komplexkonjugation)

$$\left\{ c_n \rightarrow c \Rightarrow \overline{c_n} \rightarrow \overline{c} \right\}$$

Beweis  $\overline{\lim c_n} = \overline{\lim (\operatorname{Re}(c_n) - i \operatorname{Im}(c_n))} \stackrel{(F)}{=} \overline{\lim \operatorname{Re}(c_n) - i \lim \operatorname{Im}(c_n)}$   
 $= \lim \operatorname{Re}(\overline{c_n}) + i \lim \operatorname{Im}(\overline{c_n}) = \lim \overline{c_n}$  □

(G) KOR (Grenzwertsätze) Seien  $(c_n), (d_n)$  konvergente komplexe Folgen  
 und sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann gilt

(i)  $\lim (c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$

(ii)  $\lim (\lambda c_n) = \lambda \lim c_n$

(iii)  $\lim (c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$

(iv)  $\lim c_n/d_n = (\lim c_n)/(\lim d_n)$  falls  $d_n \neq 0$

Beweis. Aufspalten in Re & Im und reelle Grenzwertsätze

[1] Satz 2.23, Satz 2.26 [Ue] □

(H) THM (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ ) Sei  $(c_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$(c_n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow (c_n)$  ist Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N |c_n - c_m| < \varepsilon$$

Beweis:  $(c_n)$  konv.  $\stackrel{(\mathbb{C})}{\Leftrightarrow}$   $(\operatorname{Re}(c_n))$  &  $(\operatorname{Im}(c_n))$  konv. in  $\mathbb{R}$

$\stackrel{\text{CP für } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$   $(\operatorname{Re}(c_n))$  &  $(\operatorname{Im}(c_n))$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (c_n)$  ist Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$

Wie im Beweis von (E): " $\Rightarrow$ " mit  $\varepsilon/2$ , " $\Leftarrow$ " mit (Cii) ]

(I) DEF (Konvergenz komplexer Reihen) Sei  $(c_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$ .

Die komplexe Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  heißt

(i) konvergent, falls die Folge der Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k \quad (\text{in } \mathbb{C}) \text{ konvergiert.}$$

(ii) absolut konvergent, falls die reelle (?) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \quad (\text{in } \mathbb{R}) \text{ konvergiert.}$$

(J) Prop (Konvergenztests & Cauchy-Prod. f. komplexe Reihen)

(i) (Majorantenkriterium) Sei  $(o_n)$  eine Folge mit  $o_n > 0 \forall n$  (dabei  $o_n \in \mathbb{R}$ ?) und sei  $\sum o_n$  konvergent.

Ist  $(c_n)$  eine komplexe Folge und

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |c_n| \leq o_n,$$

dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent.

(ii) Der Wurzeltest und der Quotiententest gelten wortwörtlich wie für reelle Reihen. Insbesondere sei  $(c_n)$  komplexe Folge mit  $c_n \neq 0$  für fast alle  $n$  und

$$\exists \theta \in (0, 1) \text{ mit } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta, \leftarrow \text{Theto}$$

dann ist  $\sum c_n$  absolut konvergent.

(iii) Die Proposition zum Cauchy-Produkt f. Reihen [1] Prop 4.35 gilt wortwörtlich für komplexe Reihen.

Beweis. Inspektion der Beweise im Reellen zeigt, dass sie wortwörtlich richtig bleiben.  $\square$

(K) DEF (Stetigkeit in  $\mathbb{C}$ ) Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  und  $z_0 \in D$  und sei  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion

(i)  $f$  heißt stetig in  $z_0$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

(ii)  $f$  heißt stetig auf  $D$ , falls  $f$  stetig in jedem  $z_0 \in D$  ist.

(L) Ben (zu Stetigkeit)

(i) Die Bedingung in K(ii) kann umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0))$$

(ii) (Stetigkeit ist Folgenstetigkeit) Wie in  $\mathbb{R}$  kann die Stetigkeit in  $\mathbb{C}$  via Folgen charakterisiert werden (selber Beweis)

$$\left. \begin{aligned} f \text{ stetig in } z_0 \in D & \Leftrightarrow \forall \text{ Folgen } (c_n) \text{ in } D \text{ mit } c_n \rightarrow z_0 \text{ gilt} \\ & \lim f(c_n) = f(z_0) (= f(\lim c_n)) \end{aligned} \right\}$$

3.11. BEW: (komplexe Exponentialreihe) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  absolut konvergent, denn

für  $z=0$  ist die Aussage trivial und für  $z \neq 0$  verwenden wir den Quotiententest 3.10 (J) (ii): für alle  $n$  mit  $n > 2|z|$  gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Analog zum reellen Fall definieren wir

3.12 DEF (komplexe Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

3.13 BEW (komplexe und reelle Exp-fkt)

Wenn wir  $\exp$  aus 3.12 auf  $\mathbb{R}$  einschränken, so erhalten wir klarerweise  $\exp$  aus [1] Def 4.32, daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden; wir haben fetsichtlich  $\exp$  von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  ausgedehnt

$$\left[ \exp(x+iy) = \sum \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!} \right]$$

3.14 THM (Eigenschaften von  $\exp$ ) Die Exponentialfkt erfüllt

(i) (Funktionsgleichung)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

(ii) (Fehlerabschätzung)

Für alle  $N \in \mathbb{N}$  und  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z) \quad \text{mit} \quad |R_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

für  $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}$

$$(iii) \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(iv) \exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(v) \lim_{z \neq 0, z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

(vi)  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig (in jedem  $z \in \mathbb{C}$ )

Beweis (i), (ii) Wortwörtlich wie in  $\mathbb{R}$  [1] Thm 4.39, [1] Prop. 4.42

(iii) folgt aus 3.10(F): Setze  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k/k!$ , dann gilt  

$$\exp(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\bar{z}) \stackrel{\text{endl. } \Sigma}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n(z)} \stackrel{3.10(F)}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)} = \overline{\exp(z)}$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z) \exp(z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0$$

(v) Wegen (ii) mit  $N=1$  gilt  $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \leq 2 \frac{|z|^2}{2} = |z|^2 \quad \forall |z| \leq \frac{3}{2}$   
 und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$$

Genau wie  
in 3.8(viii)

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit  $N=0$ , denn  $\forall |z| \leq 1$   
 $|e^z - 1| = |R_1(z)| \leq 2|z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$  und daher  
 $\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 = e^0$  und mit 3.10(L)(ii) ist  $\exp$  stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei  $w \in \mathbb{C}$  folgt nun mittels Funktionalgleichung:

Sei  $(z_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $z_n \rightarrow w$ , dann  $z_n - w \rightarrow 0$  und

$$1 = \exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n - w) \stackrel{(i)}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) \right) \exp(-w),$$

exp stetig bei 0

Q.E.D. (nochmal mit (ii))  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$ .

□

Genau wie  
1.8(ii) nur  
anders herum  
aufgezeigt

3.15 Motivation (Winkelfunktionen) Jetzt (endlich!) sind wir in der Lage die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exp-Fkt zu definieren. Sinus & Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht gerade unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den eindeutigen Vorteil innehoht unser deduktives Vorgehen konsistent zu sein und keine undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

Kommt später basierend auf dem Integralbegriff

Wir werden aber noch die Def den Anschluss an unsere Intuition suchen!

3.16 DEF (Sinus & Cosinus) Wir definieren Cosinus & Sinus durch

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

3.17 BETI (Grundeigenschaften von sin & cos)

(i) Wegen  $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix})$  erhalten wir die Eulersche Formel

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}$$

Außerdem sind sin & cos stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ , da  $x_n \rightarrow x$  in  $\mathbb{R}$   
 $\xrightarrow{3.14(vi)} e^{ix_n} \rightarrow e^{ix} \xrightarrow{3.10(vi)} \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{ix})$  und genauso für Im.

(ii) Geometrische Interpretation. Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

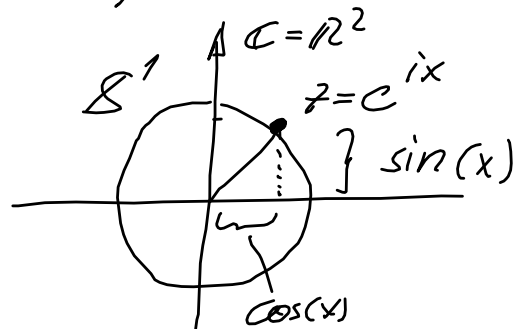
$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1 \quad \text{und daher}$$

$|e^{ix}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet also, dass alle komplexen Zahlen der Form  $e^{ix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

liegen. Darüberhinaus sind  $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$  und  $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$  genau die Cartesischen Koordinaten von  $z = e^{ix}$ ; insbesondere ergibt sich

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



(iii) Cosinus ist gerade, Sinus ungerade

[d.h.  $\cos(x) = \cos(-x)$ , also der Graph ist symmetrisch bzgl. der y-Achse und  $\sin(-x) = -\sin(x)$  also der Graph ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.]

Tatsächlich gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$ :  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$   
Daher folgt aus der Def. der Winkel Funktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

und damit

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iv) Es gelten die Additionstheoreme:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \sin(x) - \sin(y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Tatsächlich ergeben sich die ersten beiden Formeln aus Real- bzw. Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$



Die 3. bzw. 4. Gleichung ergibt sich aus der 1. bzw. 2. Gleichung mittels der Substitution  $u = \frac{1}{2}(x+y)$ ,  $v = \frac{1}{2}(x-y)$ . |]

### (v) Reihendarstellung für sin & cos

Die natürlichen Potenzen von  $i$  folgen einem einfachen Muster:  
 $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  und somit

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{4}) \\ i & \text{falls } n = 4m+1 \quad \text{---} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{4}) \\ -1 & \text{falls } n = 4m+2 \quad \text{---} \quad (\Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{4}) \\ -i & \text{falls } n = 4m+3 \quad \quad \quad (\Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \sin(x) &\stackrel{(i)}{=} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left( 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}}_{\operatorname{Re}(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\operatorname{Im}(e^{ix})} \end{aligned}$$

und daher

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}, & \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \right.$$

d.h.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

(vi) Verhalten nahe  $x=0$

Für kleine  $x$  ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung  $x^2$  oder höher

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \approx 1 \\ \sin x \approx x \end{array} \right\} (|x| \text{ klein})$$

Tatsächlich gelten die folgenden Grenzwerte für  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Denn zunächst folgt aus 3.14 (vi)

$$1 = 1 + i0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) + i \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \quad (*)$$

und daher

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = -\operatorname{Im} \left( \frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} -\operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(*)}{\rightarrow} 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$\frac{1}{i} = -i$

sonst

$$\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Re} \left( \frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(*)}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

### 3.18 MOTIVATION ( $\pi$ )

Wie schon den Winkelfunktionen wurden wir uns der Kreiszahl  $\pi$  auf etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Weg nähern. Wir werden  $\pi$  als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von  $\cos$  auf  $[0, 2\pi]$  definieren – erst später werden wir mithilfe der Integralgeometrie sehen, dass  $\pi$  die halbe Umfang des Einheitskreises ist.

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten  
3.19 Lemma (Technisches zu sin & cos)

- (i)  $\cos(0) = 1$  und  $\cos(2) \leq -1/3$
- (ii)  $\sin(x) > 0 \quad \forall 0 < x \leq 2$
- (iii)  $\cos(x)$  ist streng mon. fallend auf  $[0, 2]$

Beweis:

(i)  $\cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = 1$ . Um  $\cos(2)$  abzuschätzen verwenden wir die Potenzentwicklung aus 3.17(v):

$$\cos(2) \stackrel{\text{3.17(v)}}{=} 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

1. Term herausgehoben

$$= -1 + \frac{2^4}{4!} \left( 1 - \frac{2^2}{5 \cdot 6} + \frac{2^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots \right)$$

$1 \leq 1 \leq \frac{2^2}{5 \cdot 6}$  usw.

$$\leq -1$$

vpl. Bew  
Leibniz-Kriterium  
& Bem 4.12(ii)  
[nicht versetzen]

$$\leq -1 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

(ii) Wir verwenden wieder 3.17(v). Sei  $0 < x \leq 2$ , dann gilt

$$\sin(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} \left( 1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{9 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \right)$$

$1 \leq 1 \leq \frac{x^2}{4 \cdot 5}$  usw.

$$\leq 1$$

$x \leq 2$

$$\frac{x^3}{3!} \leq x \frac{x^2}{6} \leq x \frac{4}{6} = \frac{2x}{3}$$

$$\geq x - \frac{x^3}{3!} \geq x - \frac{2x}{3} = x/3 > 0$$

(iii) Sei  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2 \Rightarrow 0 < \frac{x_1+x_2}{2} \leq 2$  (\*)  
 $0 < \frac{x_2-x_1}{2} \leq 2$  und daher

3.17(iv)  
 $\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2 \underbrace{\sin \frac{x_2+x_1}{2}}_{\geq 0 \text{ (*)}} \underbrace{\sin \frac{x_2-x_1}{2}}_{\geq 0 \text{ (*)}} < 0$

□

3.20 Prop (1. Nullstelle des Cosinus)

$\exists! x_0 \in [0, 2]$  mit  $\cos(x_0) = 0$

Beweis. 3.19(iii)  $\Rightarrow \cos$  str. mon. fallend auf  $[0, 2]$   
 $\Rightarrow \cos|_{[0, 2]}$  ist injektiv

3.19(i)  $\Rightarrow \cos(0) > 0, \cos(2) < 0$

$\stackrel{ZWS}{\Rightarrow} \exists x_0, 0 < x_0 < 2$  mit  $\cos(x_0) = 0$

Wegen der Injektivität ist  $x_0$  die einzige NST. □

3.21 DEF ( $\pi$ )

Sei  $x_0$  die eindeutige NST von  $\cos$  in  $[0, 2]$  (gemäß 3.20)  
 Wir definieren die reelle Zahl  $\pi$  ob

$\pi = 2x_0$

3.22 BEM (Ein bisschen in Richtung Gewohntes)

Mit unserer Def werden einige der obigen Aussagen  
 verknüpft.

(i) Lemma 3.19 (i) und Def 3.11 liefern

$$\begin{aligned} \cos(x) > 0 & \text{ für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos(x) < 0 & \text{ für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $\sin\frac{\pi}{2} > 0$  (3.19(ii))  
und daher

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ und } \underbrace{e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i}_{(*)} \quad (*)$$

(ii) Extrema & Nullstellen f. Sin & Cos

Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  folgt mit  $(*)$   $e^{ik\pi/2} = (e^{i\pi/2})^k = i^k$   
und damit insbesondere

$$e^{i0} = 1 = \cos(0) + i\sin(0)$$

$$e^{i\pi/2} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{i\pi} = -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$$e^{i3\pi/2} = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$e^{i2\pi} = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

und damit ergibt sich folgende Wertetabelle

x	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

3.23 KOR (Weitere Eigenschaften von Sin & Cos) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

(i)  $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ ,  $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$  (Periodizität mit Periodenlänge  $2\pi$ )

(ii)  $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ ,  $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$  (halbe Periode)

(iii)  $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ ,  $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$  ( $\pi/2$  Verschiebung ergibt jeweils die andere Fkt)

(iv)  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ ,  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z} = \left\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Beweis. (i)-(iii) folgt unmittelbar aus den Additionstheoremen  
& der W/tabelle [genauer:

$$(i) \cos(x+2\pi) \stackrel{3.17(iv)}{=} \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) \stackrel{3.22(ii)}{=} \cos(x)$$

und analog für sin.

$$(ii) \cos(x+\pi) \stackrel{3.17(iii)}{=} \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \stackrel{3.22(ii)}{=} -\cos(x)$$

und analog für sin.

$$(iii) \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \stackrel{3.17(ii)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \stackrel{3.17(iii)}{=} \cos(-x) = \cos(x)$$

und analog für cos. ]

(iv) Wegen der  $2\pi$ -Periodizität (ii) genügt es die Aussage für  $x \in [0, 2\pi)$  zu zeigen. Wir beginnen mit sin.

Die zwei behaupteten Nullstellen in  $[0, 2\pi)$  nämlich  $0, \pi$  haben wir schon in 3.22(ii) gefunden. Es genügt daher zu zeigen, dass es keine weiteren NST in  $[0, 2\pi)$  gibt. Das tun wir indem wir zeigen, dass  $\sin(x)$  auf  $(0, \pi)$  positiv und auf  $(\pi, 2\pi)$  negativ ist. Sei dazu  $x \in (0, \pi)$ :

$$\underline{0 < x < \pi} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ und daher } \stackrel{3.22(ii), 3.17(iii)}{\sin(x) \stackrel{(ii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0} \quad (*)$$

Wegen  $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$  gilt

$$\sin(x + \pi) \stackrel{(ii)}{=} -\sin(x) \stackrel{(*)}{<} 0 \text{ also } \underline{\sin(x) < 0 \text{ für } \pi < x < 2\pi}.$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus

$$\cos(x) \stackrel{(ii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

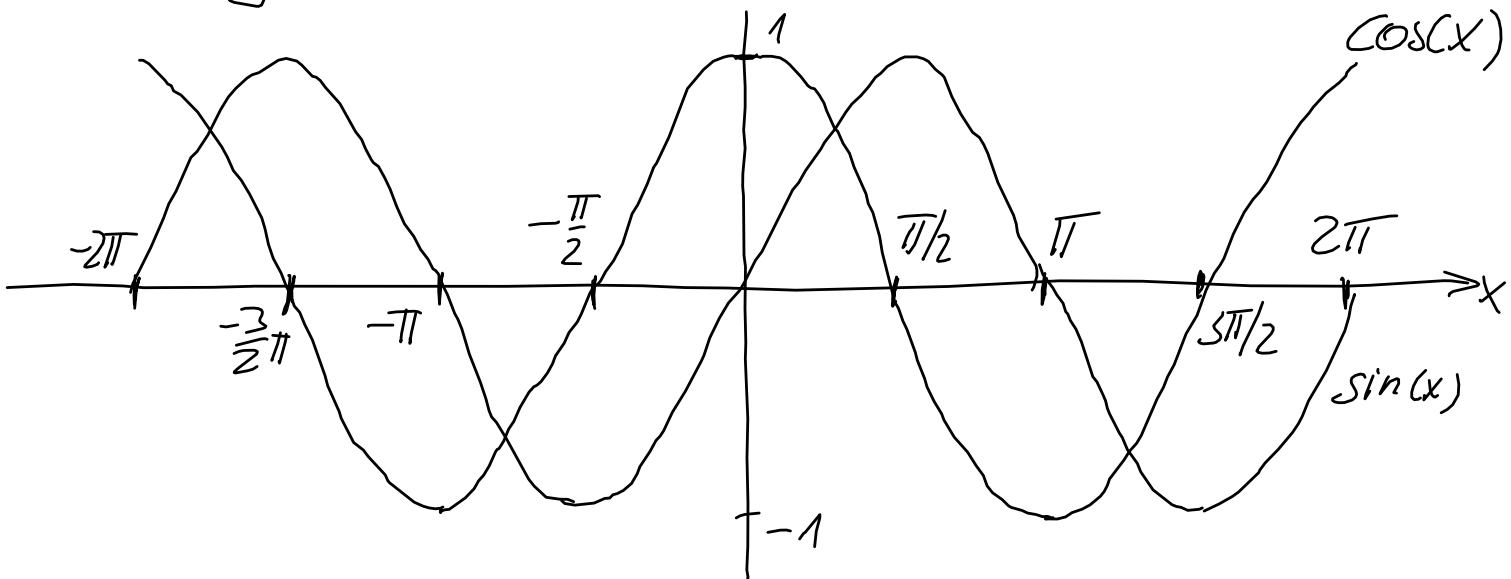
] ]

### 3.24 DER GRAPH von Sinus & Cosinus

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein gutes qualitatives Bild der Graphen der Fkt  $\sin$  &  $\cos$  gewinnen; insbes

pielt (i) Eine Verschiebung der Graphen von  $\cos$  um  $\pi/2$  nach rechts ergibt den Graphen des  $\sin$   
 [3.23(iii) & 3.17(iii):  $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$ ]

(ii) Neben den NST [3.23(iv)] kennen wir die Maxima und Minima [jeweils die NST der anderen Fkt wegen 3.17(ii)], wo die Fkt jeweils das Monotonieverhalten ändern.



### 3.25 DEF (Tangens & Cotangens) Wir definieren die Fkt

(i) Tangens,  $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

genau die NST von  $\cos$

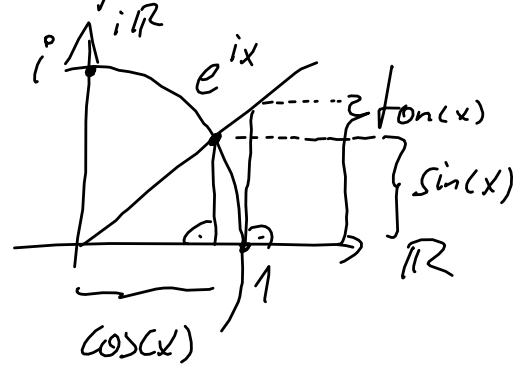
(ii) Cotangens,  $\cot: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{R}$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

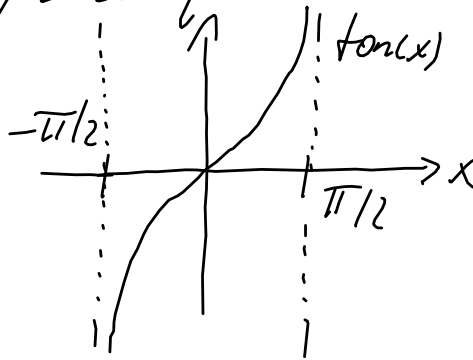
genau die NST von  $\sin$

### 3.26 BEW (Eigenschaften des Tangens)

(i) Eine geometrische Interpretation von  $\tan(x)$  für  $-\pi/2 < x < \pi/2$  ergibt sich mit dem Strahlensatz:



(ii) Der Graph auf  $(-\pi/2, \pi/2)$  ergibt sich aus den Eigenschaften von  $\sin$  &  $\cos$  zu



(iii) Periodizität. Es gilt

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \stackrel{3.23(ii)}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

also ist  $\tan$  periodisch mit Periode  $\pi$ ; der gesamte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben des Graphen in  $(-\pi/2, \pi/2)$  um  $\pi \mathbb{Z}$ .

### 3.27 MOTIVATION (Arcusfunktionen) zu späterer Zeit behandeln

wir die Umkehrfunktionen von  $\cos$ ,  $\sin$  &  $\tan$ . Sie geben dazu gegebenem Winkelfunktionswert den jeweiligen Winkel (im Bogenmaß) an, also die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis an - daher die Namen Arcus sinus/cosinus/tangens. Wesentliches Werkzeug

↑  
lot. Bogen

ist hier - wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus - der Umkehrsatz 2.18.



## 3.28 Prop & Def (Arccos/sin/tan)

173

(i)  $\cos$  ist stetig, str. mon. fallend auf  $[0, \pi]$  und  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ .  
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

und nennen sie Arccosinus.  $\arccos$  ist stetig und str. mon. fallend.

(ii)  $\sin$  ist stetig, str. mon. wachsend auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ .  
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

und nennen sie Arccsinus.  $\arcsin$  ist stetig und str. mon. wachsend.

(iii)  $\tan$  ist stetig, str. mon. wachsend auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ .  
Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

und nennen sie Arctangens.  $\arctan$  ist stetig & str. mon. wachsend.

Bew. Es sind jeweils die Voraussetzungen des Umkehr-  
satzes 2.18 zu zeigen - diesu besorgt dann jeweils den  
Rest.

(i) 3.17(ii)  $\Rightarrow \cos$  stetig

3.19(ii)  $\Rightarrow \cos$  str. mon. fallend auf  $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned}
 3.23 \text{ (ii)} &\Rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
 &\Rightarrow \cos \text{ str. mon fallend auf } [\pi/2, \pi] \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \Rightarrow \cos \text{ str. mon} \\ \text{fallend auf } [0, \pi] \end{array} \right\} \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.22 \text{ (ii)} &\Rightarrow \cos(0) = 1 = -\cos(\pi) \\
 &\text{ZWS} \Rightarrow [-1, 1] \subseteq \cos([0, \pi]) \\
 &(*) \Rightarrow \cos([0, \pi]) \subseteq [-1, 1] \quad \left. \right\} \Rightarrow \cos([0, \pi]) = [-1, 1]
 \end{aligned}$$

2.18

$\Rightarrow$  cos hat str. mon fallende & stetige Inverse  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

(ii) Mit  $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$  erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von sin auf  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

(iii)  $\tan$  ist str. mon wachsend auf  $[0, \pi/2)$ , denn für  $0 \leq x < x' < \pi/2$

$$(i) \Rightarrow \cos(x) > \cos(x')$$

$$(ii) \Rightarrow \sin(x) < \sin(x')$$

und damit  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x')$

$\tan$  ist auch str. mon wachsend auf  $(-\pi/2, 0]$ , denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad (*)$$

$\tan$  ist stetig (als Quotient stetiger Fkt; 1.17(ii))

und schließlich gilt  $\tan(-\pi/2, \pi/2) = \mathbb{R}$ ,

denn  $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0 \quad \forall x \in (0, \pi/2)$  und  $\lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \stackrel{(1.26)}{=} \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} \stackrel{(3.22(ii))}{=} 0$

$$\stackrel{2.47(ii)}{\Rightarrow} \lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = \infty \quad \text{ZWS} \Rightarrow \tan([0, \pi/2]) = [0, \infty)$$

$$(*) \Rightarrow \tan((-\pi/2, 0]) = (-\infty, 0].$$

□

### 3.29 BEM (zu den Arcosfunktionen)

↖ cos

(i) Natürlich hätten wir den „Umkehrprozess“ statt auf  $[0, \pi]$  bzw.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  auf jedem Intervall durchführen können, wo die jeweilige Funktion str. monoton ist.

(sin) (cos)

(ii) Als Graphen ergeben sich (durch Spiegelung an der 1. Medianen)

