

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\Sigma$ /40

Note:

## Einführung in die Analysis Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

### 1. Prüfungstermin (19.6.2012)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*

- (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):  
Beschränkte Folge, Häufungspunkt einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  
die allgemeine Potenz  $x^\alpha$  für  $\mathbb{R} \ni x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- (b) Beweise: Jede reelle Cauchy-Folge konvergiert. (5 Punkte)
- (c) Formuliere den Quotiententest für Reihen. (2 Punkte)

2. *Grundideen.*

- (a) *Vollständigkeit.* (6 Punkte)  
Was versteht man unter der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ? Gib mindestens eine der äquivalenten Formulierungen genau an und zähle weitere auf. Worin liegt die Bedeutung der Vollständigkeit? Wo in der Vorlesung wird sie essentiell verwendet?
- (b) *Stetigkeit.* (4 Punkte)  
Was ist die Idee hinter dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt? Gib eine exakte Definition und diskutiere ihre Bedeutung.

3. *Vermischtes.*

- (a) Zeige, dass jede konvergente, reelle Folge genau einen Grenzwert besitzt. (4 Punkte)
- (b) Gib je eine stetige und eine unstetige Funktion auf  $[0, 1)$  an. (2 Punkte)
- (c) Berechne die Grenzwerte: (je 2 Punkte)

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

- (d) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz; liegt auch absolute Konvergenz vor? (je 2 Punkte)

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

**Bitte umblättern!**

4. *Richtig oder falsch?*

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 3 Punkte)

- (a) Jede konvergente (reelle) Reihe konvergiert auch absolut.
- (b) Polynome sind stetig (auf jedem Punkt ihres Definitionsbereichs).