Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

2. Prüfungstermin (28.9.2012)

Gruppe A

1. *Formulierungen.*

   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   Häufungswert einer Folge, Grenzwert einer Funktion, die Sinusfunktion

   (b) Formuliere und beweise das Intervallschachtelungsprinzip. (6 Punkte)

   (c) Definiere den (natürlichen) Logarithmus und gib drei seiner grundlegenden Eigenschaften an. (3 Punkte)

2. *Begriffe & Ideen.*

   (a) *(Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit)* (5 Punkte)
   Für eine Funktion $f:\ \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ definiere die Begriffe Setigkeit (auf D) und gleichmäßige Stetigkeit. Erkläre die Bedeutung dieser Begriffe und diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.

   (b) *(Konvergenz vs. absolute Konvergenz)* (3 Punkte)
   Für (reelle) Reihen definiere die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz. Diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.

   (c) *(Umkehrsatz)* (2 Punkte)
   Formuliere den Umkehrsatz für streng monotone und stetige Funktionen. Für welche der Aussagen im Satz ist die Stetigkeit notwendige Bedingung?

3. *Vermischtes.*

   (a) Sei $f:\ \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Zeige, dass f stetig in a ist, falls für jede Folge $(x_n)_n \in D$ mit $x_n \to a$ gilt, dass $f(x_n) \to f(a)$. (4 Punkte)

   (b) Gib je ein Beispiel einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ an, die stetig nach $x_0 = 1$ fortgesetzt, bzw. *nicht* stetig nach $x_0 = 1$ fortgesetzt werden kann. (2 Punkte)

   (c) Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ und interpretiere das Ergebnis. (2 Punkte)

   (d) Untersuche auf Konvergenz und berechne den Grenzwert, falls er existiert. (je 2 Punkte)

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \qquad \text{(ii)} \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$$

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 3 Punkte)

(a) Jede beschränkte Folge mit genau einem Häufungswert konvergiert.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ ist stetig in $x_0 = 0$.