

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\Sigma$ / 40

Note:

**Einführung in die Analysis**  
**Roland Steinbauer, Sommersemester 2012**  
**2. Prüfungstermin (28.9.2012)**  
Gruppe B

1. *Formulierungen.*

- (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):  
Beschränkte Funktion, die Cosinusfunktion, charakteristische Funktion einer Menge, die allgemeine Potenz  $x^\alpha$  ( $x > 0$   $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- (b) Definiere die (reelle) Exponentialfunktion und gib drei ihrer grundlegenden Eigenschaften an. (2 Punkte)
- (c) Formuliere und beweise das Intervallschachtelungsprinzip. (6 Punkte)

2. *Vermischtes.*

- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $a \in D$ . Zeige, dass, wenn  $f$  stetig in  $a$  ist, für jede Folge  $(x_n)_n \in D$  mit  $x_n \rightarrow a$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . (3 Punkte)
- (b) Berechne  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und interpretiere das Ergebnis. (2 Punkte)
- (c) Gib je ein Beispiel einer stetigen Funktion auf  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  an, die stetig nach  $x_0 = 2$  fortgesetzt, bzw. *nicht* stetig nach  $x_0 = 2$  fortgesetzt werden kann. (2 Punkte)
- (d) Untersuche auf Konvergenz und berechne den Grenzwert, falls er existiert. (je 2 Punkte)

(i)  $\sqrt{9n^2 + n + 3} - 3n$       (ii)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

3. *Ideen & Begriffe.*

- (a) (*Umkehrsatz*) (2 Punkte)  
Formuliere den Umkehrsatz für streng monotone und stetige Funktionen. Für welche Aussagen im Satz ist die Stetigkeit notwendige Bedingung?
- (b) (*Konvergenz vs. absolute Konvergenz*) (3 Punkte)  
Für (reelle) Reihen definiere die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz. Diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.
- (c) (*Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit*) (5 Punkte)  
Für eine Funktion  $g : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  definiere die Begriffe Stetigkeit (auf  $D$ ) und gleichmäßige Stetigkeit. Erkläre die Bedeutung dieser Begriffe und diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.

**Bitte umblättern!**

4. *Richtig oder falsch?*

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 3 Punkte)

- (a) Jede Folge mit genau einem Häufungswert konvergiert.
- (b) Eine stetige Funktion kann man „ohne abzusetzen zeichnen“.