Blatt 0: EMA—Da Capo![1]

1 *Vollständige Induktion.* Zeige die angegeben Identitäten.

(a) $\sum_{k=0}^{n}(3k-2) = \frac{(1+n)(3n-4)}{2}$ (für alle $n \geq 0$)

(b) $n^2 \leq 2^n$ (für alle $n \geq 4$)[2]

(c) $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$ (für alle $n \geq 2$)

2 *Betrag und Ungleichungen.* Wiederhole die Definition des (Absolut-)Betrags einer reellen Zahl (siehe etwa [EMA, Def. 6.4.11]) und skizzieren den Graphen der Betragsfunktion. Dann löse folgende Ungleichungen rechnerisch, skizziere die Situation aber auch graphisch.

(a) $|3x+4| \leq |x+8|$

(b) $3 - \frac{x+1}{x-2} < \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$

(c) $|3x^2 - 8x - 7| \leq 4$

3 *Betrag, Maximum und Minimum.* Zeige folgende Identitäten für $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,

(b) $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ und

(c) $\max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b|$.

4 *Verkehrte Dreiecksungleichung*[2]. Zeige die beiden Ungleichungen

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a \pm b|.$$

Hinweis: Verwende die (richtige) Dreiecksungleichung und die Tatsache, dass aus $x \leq y$ und $-x \leq y$ schon $|x| \leq y$ folgt.

5 ε-Umgebung. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$ definieren wir die (offene) ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ als das offene Intervall $U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$. Zeige, dass x genau dann in $U_\varepsilon(x_0)$ liegt, falls sein Abstand zu x_0 kleiner ε ist also

$$x \in U_\varepsilon(x_0) \;\Leftrightarrow\; |x - x_0| < \varepsilon.$$

Veranschauliche die Situation graphisch.

[1] Der Ausruf „Da capo!" ist eine Beifallsbekundung durch ein Publikum. Das Stück war so gut, dass man es am liebsten noch einmal von Beginn an hören würde.

[2] Diese Ungleichung wird in der Vorlesung benötigt—Achtung gefährliche Drohung!

Roland Steinbauer, März 2012

$\boxed{6}$ *Schranken—Supremum und Infimum.* Wir gehen von folgender Definition von Supremum (Infimum) für Teilmengen von $\mathbb{R}$ aus (vgl. [EMA, Def. 4.2.32]): Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von A, falls

(i) a obere (untere) Schranke von A ist und

(ii) jedes a' mit $a' < a$ ($a' > a$) nicht obere (untere) Schranke von A ist.

Mache dir diese Definition graphisch klar und löse dann folgende Aufgaben:

(a) Bestimme (falls sie existieren) obere und untere Schranken, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum der folgenden Mengen:

$$A = [0, 1), \quad B = \{1 + (-1)^n |\ n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x-5} \geq 5\}.$$

(b) Wie oben nur schwieriger:

$$D = \{\frac{x}{x+1} |\ x \geq 0\}.$$

Tipp: Mache dir die Situation graphisch (etwa durch Plotten der Funktion) klar, um zu einer Vermutung (vor allem über das Supremum) zu gelangen. Diese versuche dann zu beweisen indem du die beiden Punkte in der Definition extra angehst.

(c) Beweise dass, die Sprechweise von *dem* Supremum gerechtfertigt, dieses also eindeutig bestimmt ist. Genauer zeige: das Supremum einer nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Tipp: Wie bei Eindeutigkeitsbeweisen oft zielführend, nimm an, es gebe ein zweites Supremum. Dann lässt sich mittels Punkt (ii) in der Definition ein Widerspruch basteln—gar nicht so schwer.

$\boxed{7}$ *Diskussion.* Was sind deiner Meinung nach die wichtigsten drei

(a) Begriffe/Definitionen

(b) Sätze

aus der „Einführung in das mathematische Arbeiten" im Hinblick auf die Analysis. Begründe deine Auswahl!

Roland Steinbauer, März 2012