Blatt 1: Wachstum, Archimedes und Folgen

1 *Wachstum, 1.*
Aufgabe 1(b) auf Blatt 0 besagt, dass (für geeignet große n) die Potenz n^2 langsamer wächst als das Exponential 2^n. Hier beweisen wir, dass 2^n (wiederum für geeignet große n) von der Fakultät $n!$ dominiert wird. Der langen Rede kurzer Sinn:

Beweise, dass $2^n < n!$ für alle $n \geq 4$ gilt.

2 *Anwendung der Archimedischen Eigenschaft, 1.*
Betrachte die Menge

$$B := \{1 - \frac{1}{n} :\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Wie sieht die Menge B aus?
Zeige, dass sie beschränkt ist und errate ihr Supremum.

(b) Beweise, dass du richtig geraten hast.

3 *Vertauschen von Summen—Eine Reminiszenz an die Körperaxiome.*
Seien a_{ik} reelle Zahlen für $i, k \in \mathbb{N}$. Argumentiere[1], dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel für die Vertauschung der Summationsreihenfolge in der Doppelsumme gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} a_{ik} \ = \ \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} a_{ik}.$$

Tipp: Betrachte die Menge der vorkommenden Indexpaare $\Delta = \{(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i + k \leq n\}$ und interpretiere die Situation geometrisch in der Ebene; Stichwort längsgestreift vs. quergestreift.

4 *Geometrische Summe—alternativer Beweis.*
Leite die Summenformel für die endliche geometrische Reihe

$$s_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} x^k \ = \ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{für} \quad x \neq 1$$

(Vo. 1.6(ii)) auf rekursivem[2] Weg her.
Anleitung: Finde zwei Formeln für $s_{n+1}(x)$ in Termen von $s_n(x)$ und setze diese gleich.

[1] Für einen formalen Beweis bietet sich (wiedereinmal) die vollständige Induktion an. Das ist aber nicht Teil dieser Aufgabe! Der Tipp führt vielmehr zur Einsicht(!), dass die Formel gilt.

[2] Zur Bedeutung von „rekursiv" siehe [EMA, p. 34, graue Box].

Roland Steinbauer, April 2012

$\boxed{5}$ *Wachstum, 2.*
Zeige, dass für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ die folgenden Abschätzungen gelten

(a) $\displaystyle \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \;\leq\; \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \;<\; 3.$

Anleitung: Für (a) verwende die geschlossene Formel für den Binomialkoeffizienten und (geschickt!) die Darstellung der Fakultät durch ein Produkt. Für die erst Ungleichung in (b) bietet sich die Verwendung des Binomischen Lehrsatzes und die von (a) an. Für die zweite Ungleichung in (b) lassen sich die Fälle $n < 4$ per Hand erledigen. Für den Rest ziehe Aufgabe 1 und die geometrische Summenformel heran.

$\boxed{6}$ *Anwendung der Archimedischen Eigenschaft, 2.—Die Gauß-Klammer*
Ziel dieser Aufgabe ist es die folgende (intuitiv völlig einsichtige[3]) Aussage zu zeigen:

Zu jeder rellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl n mit der Eigenschaft

$$n \leq x < n + 1.$$

Diese Zahl n wird nächst kleinere ganze Zahl zu x genannt und mit der *Gauß-Klammer* $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet.

Anleitung: Nimm zunächst $x \geq 0$ an und überzeuge dich zum Schluss des Beweises davon, dass der Fall $x < 0$ darauf zurückgeführt werden kann. Beweise die Existenz und die Eindeutigkeit von $n = \lfloor x \rfloor$ separat. Die Existenz folgt z.B. aus der Wohlordnung nachdem die Archimedische Eigenschaft bemüht wurde, um der Leere der passenden Menge zu entgehen. Für den Eindeutigkeitsteil erinnere dich an die übliche Vorgehensweise: Angenommen es gibt ein zweites solches...

$\boxed{7}$ *Veranschaulichung von Folgen 1.*
Stelle die folgenden Folgen (vgl. Bsp. 2.5) einmal als ,,Spaziergang in $\mathbb{R}$” und einmal durch ihren Graphen dar (siehe 2.4).
Hinweis: Hier ist die Verwendung von Hilfsmitteln aus der EDV explizit erlaubt. Eine Möglichkeit ist *Mathematica* (Befehle Table, bzw. RecurrenceTable und ListPlot), eine andere ein Folgenplotter im www (z.B. `http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/folgen/`).

(a) $a_n = (-1)^n$ (,,Vorzeichenmaschine”)

(b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

[3]Empfindest du einen gewissen Widerwillen, da dir die „Beweisnotwendigkeit” ((c) Heuser) der Aussage nicht gegeben scheint? Das ist nicht verwunderlich! Mit zunehmender mathematischer Sensibilität wird dieses Gefühl aber verschwinden und jetzt ist es zumindest interessant zu sehen, welche userer Grundannahmen sich dazu ge/miß(?)-brauchen lassen, diese Selbstverständlichkeit zu folgern...

(c) $c_n = \frac{n}{2^n}$

(d) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

(e) $d_n = x^n$ für ein beliebiges aber fixes $x \in \mathbb{R}$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von x?

(f) $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k$ (Geometrische Reihe)
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von x?

$\boxed{8}$ *Fingerübung zur Grenzwertdefinition.*
Seien (x_n) und (y_n) reelle Folgen mit der Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - y_n| < \varepsilon.$$

Zeige: Falls eine der Folgen konvergiert, so auch die zweite und zwar gegen denselben Grenzwert.

$\boxed{9}$ *Veranschaulichung von Folgen 2.*
Wie in Aufgabe 7 für die Folgen

(a) $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in N$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von k?

(b) $b_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(d) $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n$