Blatt 2: Folgen & Konvergenz

$\boxed{1}$ *Konvergenz aus der Definition.*
Zeige direkt aus der Definition des Grenzwerts, dass $a_n = 1/\sqrt{n}$ eine Nullfolge ist.

$\boxed{2}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 1.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{2n^2+3n}{2n-3n^2}$ (b) $\dfrac{2n^2+3n}{2n-2n^3}$ (c) $\dfrac{2n^3+3n}{3n-2n^2}$

(d) Formuliere deine Rechenerfahrung aus (a)–(c) in einer allgemeinen Aussage.

$\boxed{3}$ *Divergenz der Vorzeichenmaschine—Da Capo.*
In Vo. $\boxed{1}$ 2.11(iii) haben wir mittels eines indirekten Beweises gezeigt, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert. Zeige dieses Resultat nun direkt aus der Definition (durch Finden von Versager-ε's).

$\boxed{4}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 2.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ (b) $\dfrac{1+2\cdot 3^n}{5+4\cdot 3^n}$ (c) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k-2)}{n^3+2n}$

$\boxed{5}$ *Alternative Formulierungen der Konvergenz?*
Sei (x_n) eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen äquivalent zu $x_n \to x$? Gib einen Beweis oder finde ein Gegenbeispiel.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \ |x_n - x| \leq \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \ |x_{2n} - x| < \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \ |x_n - x| < \varepsilon$

(e) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(h) $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \ |x_n - x| < 1/k \qquad (N^* := \mathbb{N} \setminus \{0\})$

[1] Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels Mathematica zu überprüfen.

Roland Steinbauer, April 2012

$\boxed{6}$ *Nochmals Archimedes.*
Wie in Vo. $\boxed{1}$ 2.11(ii) bemerkt, ist die Tatsache, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ eine unmittelbare Folge aus der Archimedischen Eigenschaft. Es gilt aber auch die Umkehrung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Archimedische Eigenschaft.}$$

Finde einen Beweis für diese Behauptung.

$\boxed{7}$ *Technische Abschätzung—Fingerübung im Weglassen von Termen.*[2]
Zeige für jedes $\mathbb{R} \ni x \geq 0$ und jedes $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \;\geq\; \frac{n^2}{4}\, x^2.$$

Tipp: Verwende den Binomischen Lehrsatz und lasse großzügig(st) alle Terme weg, die du nicht benötigst, um die gewünschte rechte Seite zu erhalten. Da diese alle positiv sind, erhältst du eine Abschätzung nach unten.

$\boxed{8}$ *Verbale Umformulierungen der Grenzwertdefinition.*
Diskutiere welche der folgenden Umformulierungen der Grenzwertdefinition für eine reelle Folge zutreffend sind. Begründe oder gib ein Gegenbeispiel!

Eine Folge x_n konvergiert gegen x, falls

(a) sie sich x immer mehr annähert.
(b) sie sich x immer mehr annähert, ohne x je zu erreichen.
(c) sie x schließlich beliebig nahe kommt.
(d) in einer ε-Umgebung von x alle Folgenglieder x_n liegen.
(e) in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder x_n liegen.
(f) in einer ε-Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n liegen.
(g) in jeder ε-Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n liegen.

[2]Vgl. den Beweis der Bernoulli-Ungleichung (Vo. $\boxed{1}$ 1.4)—nur noch viel brutaler!.