Blatt 3: Folgen & Konvergenz, Teil 2

$\boxed{1}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 3.*

(a) Zeige direkt aus der Definition der Konvergenz, dass $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$.

(b) Zeige, dass auch $\sqrt{1-\frac{1}{n}} \to 1$.
Hinweis. Nachdem dir hier die Methodenwahl überlassen ist, kannst du etwa das Sandwich-Lemma in Kombination mit der Monotonie der Wurzelfunktion ([EMA], 6.4.9) verwenden.

$\boxed{2}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 4.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\sqrt{n^2+n}-n$ (b) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$ (c) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

Tipp: Zunächst stelle fest, dass immer Differenzen von bestimmt divergenten Folgen auftreten und daher nach Vo. $\boxed{1}$ 2.46 keine allgemeine Hilfe zu erwarten ist. Der Trick besteht nun darin, den Ausdruck zu einem Bruch zu erweitern, indem man die Differenz mit der analogen Summe multipliziert. Dann erhält man mittels $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ im Zähler eine Differenz, die besser zu bearbeiten ist und im Nenner eine Summe.

$\boxed{3}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 5—Achtung: trickreich.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\frac{n^k}{2^n}(k \in N$ fix aber beliebig$)$ (b) $\frac{2^n}{n!}$ (c) $\frac{n!}{n^n}$

(d) Was sagen die Ergebnisse aus (a)–(c) über das relative Wachstum der Potenz n^k, dem Exponential 2^n, der Fakultät $n!$ und von n^n aus?

$\boxed{4}$ *Linearkombination konvergenter Reihen.*
Beweise Vo. $\boxed{1}$ Prop. 2.39. Genauer zeige, dass für die konvergenten Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) \;=\; \lambda\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;+\; \mu\sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Tipp. Wende Vo. $\boxed{1}$ 2.25 (Linearkombination konvergenter Folgen) auf die Partialsummen an.

[1] Wie schon gesagt: Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels Mathematica zu überprüfen.

Roland Steinbauer, Mai 2012

$\boxed{5}$ *Der Folgenanfang ist wirklich egal.*
Betrachte die Folgen ($n \geq 1$)

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n}.$$

(a) Skizziere (plotte) die drei Folgen.

(b) Zeige, dass $a_n > b_n > c_n$ für alle $n < 1\,000\,000$.

(c) Berechne die Grenzwerte der drei Folgen.

$\boxed{6}$ *Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte.*
Beweise Vo. $\boxed{1}$ Prop. 2.45. Genauer, seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n, c_n \to \infty$. Zeige dass die folgenden Rechenregeln gelten:

(a) $\lim(a_n + b_n) = \infty$ (b) $\lim(b_n + c_n) = \infty$ (c) $\lim(a_n - b_n) = -\infty$
(d) $\lim(a_n\, b_n) = \infty$ falls $a > 0$ (e) $\lim(b_n\, c_n) = \infty$

$\boxed{7}$ *Wurzelfolgen—Ein Standardbeispiel, aber trickreich!*

(a) Sei $1 < a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\sqrt[n]{a} \ \to \ 1 \qquad (n \to \infty).$$

Tipp: Bemerke zuerst, dass $\sqrt[n]{a} > 1$ gilt (wiederum wegen der Monotonie der Wurzel) und du somit $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$ mit $x_n > 0$ schreiben kannst. Das ist der 1. Trick und somit genügt es $x_n \to 0$ zu zeigen. Um das zu bewekstelligen, schreibe $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1+x_n)^n$ (das ist der 2. Trick) und verwende die Bernoulli-Ungleichung um x_n abzuschätzen. Jetzt brauchst du nur mehr das Sandwich-Lemma...

(b) Zeige, dass

$$\sqrt[n]{n} \ \to \ 1 \qquad (n \to \infty).$$

Tipp: Diese Aufgabe kann mit denselben Tricks wie oben begonnen werden. Allerdings wird dann statt der Bernoulli-Ungleichung eine stärkere Abschätzung benötigt, nämlich $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, die sich mit Induktion leicht beweisen lässt—das ist aber nicht Teil dieser Aufgabe.

Roland Steinbauer, Mai 2012