Blatt 6: Funktionen & Stetigkeit

$\boxed{1}$ *Verhalten von Funktionen anschaulich.*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.
Hinweis. Suche dir ein f aus, an dem die Effekte der entsprechenden Operationen gut sichtbar werden. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

(a) $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$

(b) $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(-x)$

(c) $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + 2$
(oder allgemeiner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig)

(e) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(2x)$
(oder allgemeiner $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig)

(f) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x - a)$
(oder allgemeiner $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x - \lambda)$mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig)

$\boxed{2}$ *Stetigkeit 1.*
Zeige direkt aus der Definition der Stetigkeit, dass

(a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ -x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $[-1, 1]$ ist.

(b) $g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ unstetig in $x_0 = 0$ ist.

Tipp: Schreibe f mit Hilfe der Betragsfunktion und fertige Skizzen an!

$\boxed{3}$ *Hyperbelfunktionen.*
In Vo. $\boxed{2}$ 1.19(ii) haben wir den hyperbolischen Sinus, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und den hyperbolischen Cosinus, $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

(a) Wiederhole, warum sinh und cosh stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeige die Formel $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (daher also Hyperbelfunktionen!)

(c) Zeige eines der beiden Additionstheoreme $(x, y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \cosh(x + y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x + y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

Roland Steinbauer, Juni 2012

Hinweis: Das einzig vernünftig zur Verfügung stehende Werkzeug ist die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bzw. deren Eigenschaften. Damit kommst du aber auch schon ins Ziel.

$\boxed{4}$ *Grundoperationen für Funktionen anschaulich.*
Analog zu Aufgabe 1 seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenen von f und g aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.
Hinweis. Suche dir f und g so aus, dass die Effekte der entsprechenden Operationen gut sichtbar werden. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

(a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(b) $f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(c) $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig
(d) $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(e) $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, wobei $D = \{x \in \mathbb{R} : \; g(x) \neq 0\}$

$\boxed{5}$ *Stetigkeit der Grundoperationen.*
Beweise die restlichen Fälle von Vo. $\boxed{2}$ Prop. 1.17(i). Genauer zeige, dass für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$

(a) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.
(b) $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $D' := \{x \in D : \; g(x) \neq 0\}$.

Tipp: Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze!

$\boxed{6}$ *Stetigkeit 2.*
An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig? Begründe deine Aussagen (keine Beweise!).

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x + 1)$
(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$
(c) Inwiefern unterscheiden sich f und g nahe $x_0 = -1$?
(d) $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x) := x/|x| \; x \neq 0$ und $\mathrm{sgn}(0) := 0$.

Hinweis: Das Anfertigen von Skizzen ist ist explizit erwünscht!

$\boxed{7}$ *Stetigkeit 3.*
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir definieren die Funktionen $\varphi := \max(f, g) : D \to \mathbb{R}$ [phi] und $\psi := \min(f, g) : D \to \mathbb{R}$ [psi] punktweise, d.h. durch

$$\varphi(x) := \max\{f(x), g(x)\} \qquad \psi(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

(a) Skizziere von φ und ψ für (sinnvoll) gegebenes f und g.
(b) Zeige, dass φ und ψ stetig auf D sind, falls nur f und g stetig auf D sind.

Tipp: Verwende Blatt 0, Aufgabe $\boxed{3}$ (a),(b).

Roland Steinbauer, Juni 2012