Reelle Analysis

in mehreren

und

Komplexe Analysis

in einer Variable

für LAK

Roland Steinbauer
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Sommersemester 2013
5 SWSt / 10 ECTS

[A] VORBEMERKUNGEN ZU TITEL & INHALT DER VO

A.1. RÜCKBLICK (Das Grundthema der Analysis & wo wir stehen – nach EidA + AieVfLAK)

Das Grundthema der Analysis [vgl [9] §0, [3] §0] ist das

VERSTEHEN & BESCHREIBEN DES ÄNDERUNGSVERHALTENS VON FUNKTIONEN

Diesbezüglich haben wir schon viel erreicht; genauer haben wir folgende Begriffe studiert

EidA:
- GRENZWERTBEGRIFF für Folgen in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$]
- STETIGKEIT für Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

entscheidende Schritt vgl [3] 0.3

AieVfLAK:
- DIFFERENTIALRECHNUNG für Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
- INTEGRALRECHNUNG

VERBINDUNG [HsDI]

Insbesondere hat sich herauskristallisiert

> Die Ableitung einer Fkt (in einem Pkt) ist das zentrale Werkzeug zum Verständnis ihres lokalen Änderungsverhaltens.

> Über die Kenntnis der Ableitung an allen Pkten können wichtige Rückschlüsse auf das globale Verhalten einer Fkt gezogen werden.

> Die zentrale Verbindung zwischen lokalen Eigenschaften (meist mittels Ableitung beschrieben) und globalen Eigenschaften (oft mittels Integralrechnung beschrieben) einer Fkt liefert der HsDI.

nett, aber eher oberflächlich

A2. ZENTRALES UNTERTHEMA: APPROXIMATION / NÄHERUNG

Immer wieder ist in unseren Untersuchungen das Thema Approximation bzw. Näherung aufgetaucht.

- für reelle Zahlen: zB $\sqrt{2} \approx 1{,}44$
  $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

  wobei x_n rekursiv definiert ist via

  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2/x_n)$ [vgl [1] 3.24]

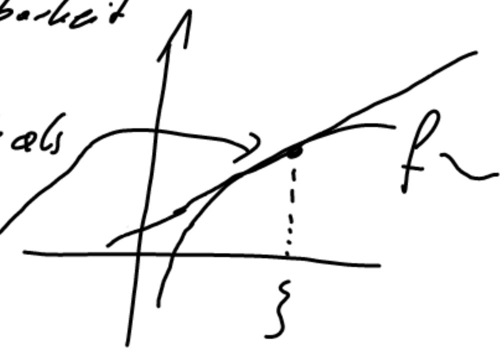
  [Heron-Verfahren]

Sehr subtile Fragen, die oft mit dem „unendlich Kleinen" zu tun haben ... In den Grenzwertbegriff verpackt

• für Fkt z.B. bei der Differenzierbarkeit

Tangente als lin. Bestapprox.

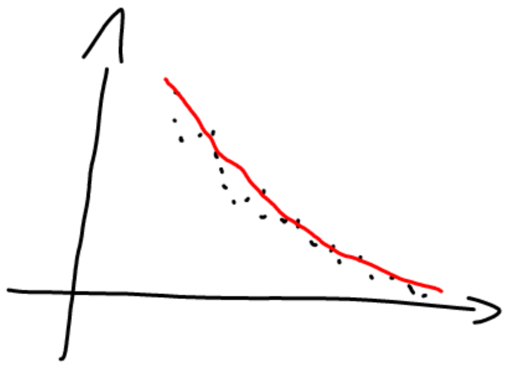
[[B] 1.19 – 1.20]



Wir wollen uns nun etwas allgemeinere Gedanken zum Approximieren von Fkt machen. Die Relevanz des Konzepts steht (auch) in den Anwendungen außer Frage, z.B.

will die komplizierte Fkt durch eine einfachere Fkt gut annähern.

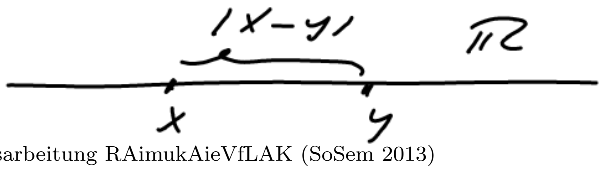
Will durch vorgegebene Pkte (Meßwerte in den NaWi, Schätzungen in den SoWi) möglichst gut eine Fkt legen.

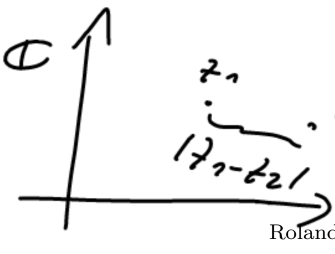


Die entscheidende Frage ist natürlich nun:

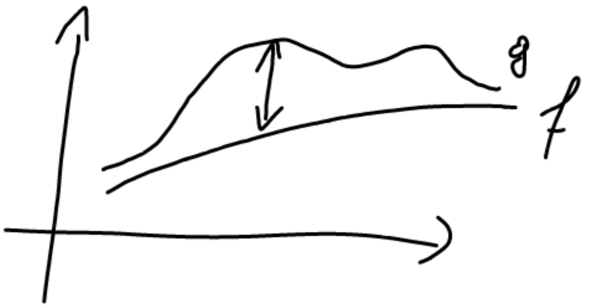
Wie gut ist die Näherung?

Im Fall von Zahlenfolgen messen wir dazu den Abstand von Pkten



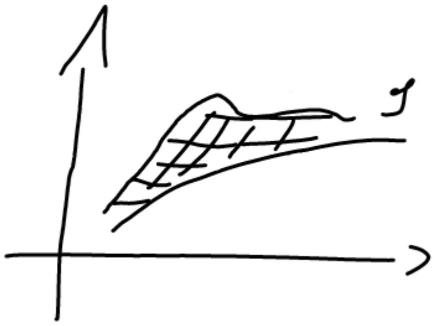


Wie aber messen wir den Abstand von Fkt?
Hier gibt es keine richtige Antwort. Viele Konzepte sind möglich und in verschiedenen Situationen unterschiedlich nützlich, z.B.



max. Abstand, d.h. „dickste Stelle"

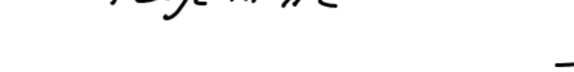
Fläche zw. den Fkt mißt z.B. Arbeit oder Kosten



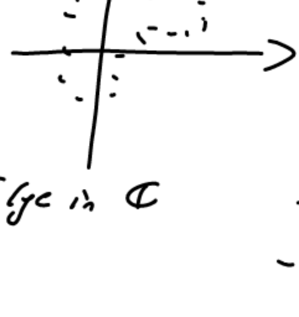
Diese Überlegungen führen zu (verschiedenen) KONVERGENZBEGRIFFEN FÜR FUNKTIONENFOLGEN

dem Thema von $\boxed{\text{KAP 5}}$ [vgl auch [3] 0.5(iii)]

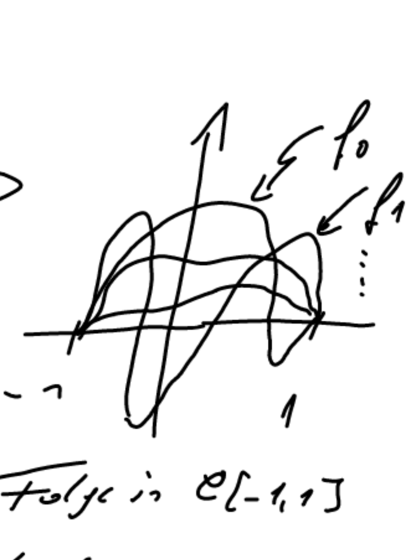
→ also Folgen deren einzelne Glieder nicht Zahlen sind, sondern Funktionen



Folge in $\mathbb{R}$



Folge in $\mathbb{C}$



Folge in $C[-1,1]$

Bevor wir näher auf den Inhalt von Kap 5 eingehen, geben wir einen Ausblick auf die weiteren Themen der VO

A.3 Ausblick 1: Mehrdim. (Reelle) Analysis

Steckt im 1. Teil des langen Titels

Bisher haben wir meist reelle Fkt betrachtet, also Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [oder $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ was aber im Moment nicht der Pkt ist.]

Man spricht auch von 1-dim Fkt oder gleich der 1-dim Analysis.

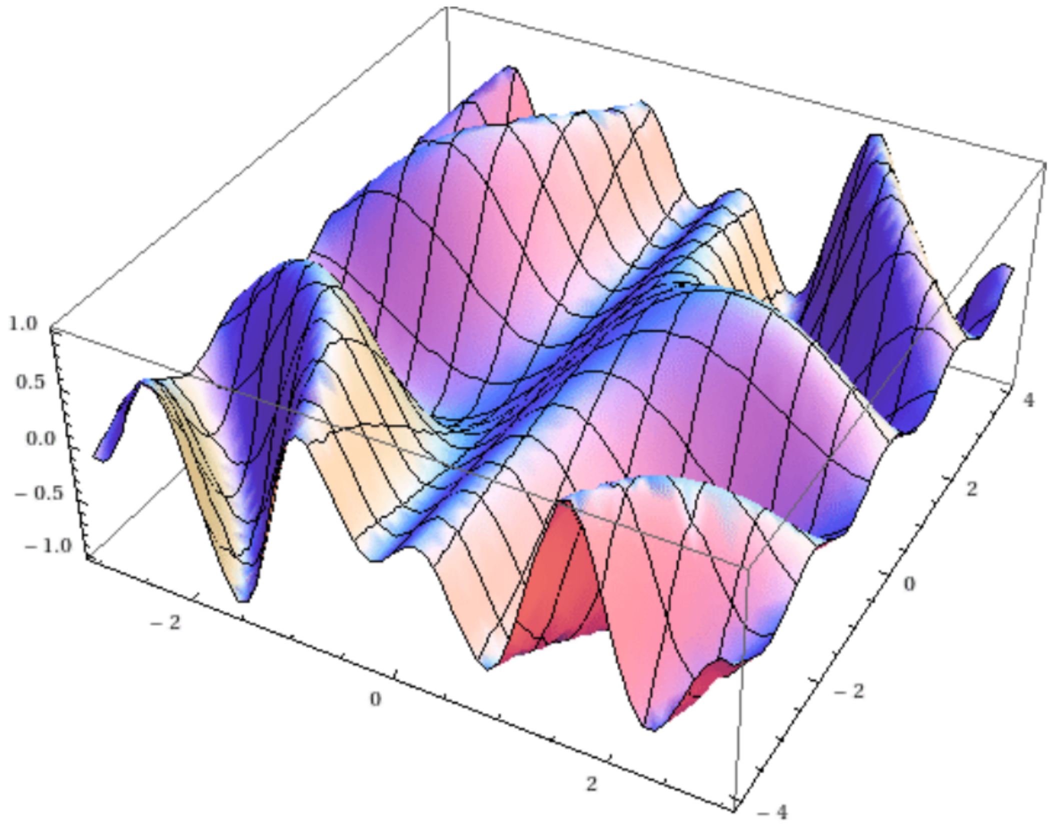
Für die allermeisten Zwecke ist das viel zuwenig !! In den Anwendungen ist man ja nicht bloß an funktionalen Zusammenhängen reeller Zahlen interessiert sondern will/muß viel allgemeinere funktionale Zusammenhänge modellieren. Bsp. gefällig?

Temperatur in Wien heute Früh

Jedem Pkt in Wien – modelliert als eben – aha als Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ – wird die Temperatur an genau diesem Ort heute früh um 6:00 zugeordnet. Das ergibt eine Fkt

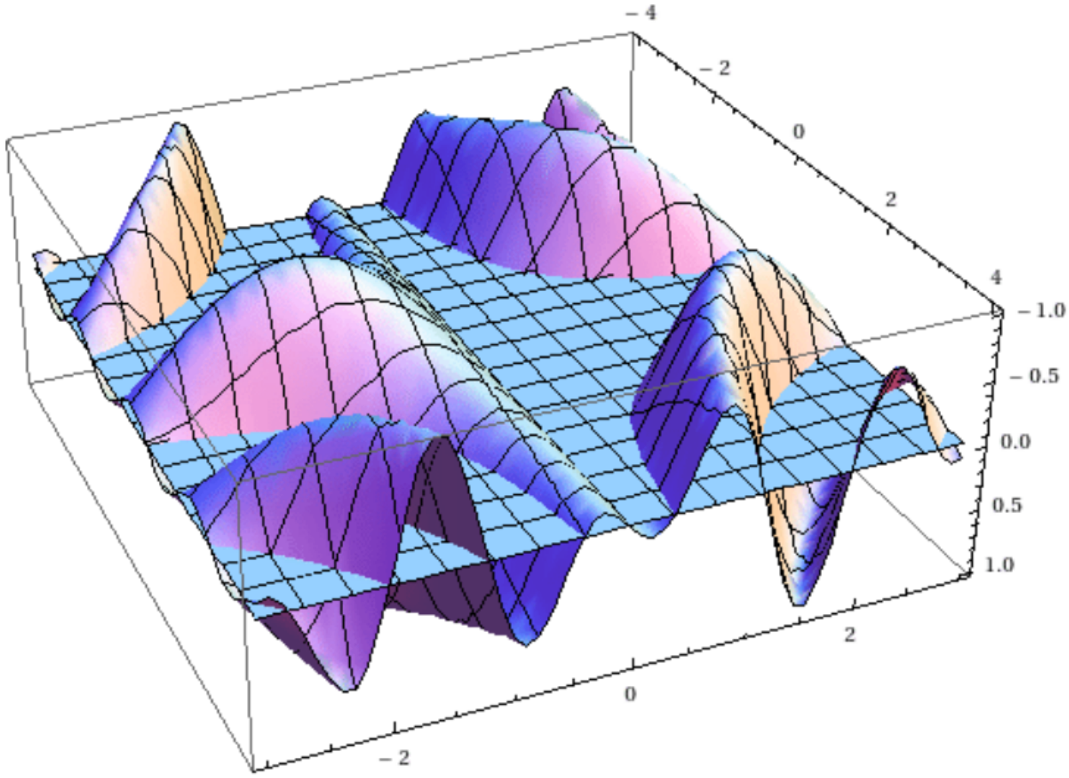
$$T: W \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto T(x,y)$$

Der Graphen $G(T) := \{(x,y,T(x,y))\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Temperaturfkt kann veranschaulicht werden:



möglicher Graph der Temperaturfkt.

Schnitt des Graphen der Tempfkt mit der (x,y)-Ebene:
Punkte am Graphen unterhalb der (x,y)-Ebene sind ge-
fährlich: dort friert es!



Strömung in Flüssigkeiten.

Jedem Pkt an der Oberfläche eines Flusses wird die Fließgeschwindigkeit an diesem Pkt zugeordnet – dabei wird die Fließgeschwindigkeit als 2-dim Vektor modelliert, der in Richtung der Strömung zeigt und dessen Länge gleich (dem Betrag) der Geschwindigkeit ist. Es ergibt sich eine Fkt

$$v: F \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto v(x,y)$$

In der Physik ist die Geschwindigkeit immer ein Vektor

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (n,m > 1)$$

zu studieren, also eine Analysis mehrdim Fkt bzw Analysis in mehreren (reellen) Variablen zu betreiben.

Teil des Titels der VO

↳ $m=1=n$ ist dann der einfachste Spezialfall

Wie wirken sich $m>1$, $n>1$ aus?

Man könnte evtl. meinen, dass sich die mehrdim Analysis irgendwie leicht aus der 1-d Analysis „zusammenbauen" lässt. Dem ist aber in vielen Bereichen nicht so und es treten „neue Effekte" auf!

Leitfaden:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$n>1$ bringt neue Effekte (2)

$m>1$ bringt zunächst wenig Neues aber mehr Arbeit (1)

(1) Jede Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m>1)$ kann in m-Stück Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zerlegt werden.

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$$

Komponenten im $\mathbb{R}^m$

$$= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Jedes $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m)$ ist eine „Komponentenfkt" von f und statt einer Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ können wir oft die m-Stück $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten

> Also sind Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die „Grundbausteine" der mehrdim Analysis

ABER

(2) Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haben es in sich & bringen viel Neues

$$\boxed{\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Zwar kann man $x \in \mathbb{R}^n$ in seine Komponenten zerlegen, aber das führt nicht wie in (1) zu einer „Entkopplung" der Variablen $x_1, \dots, x_n$.

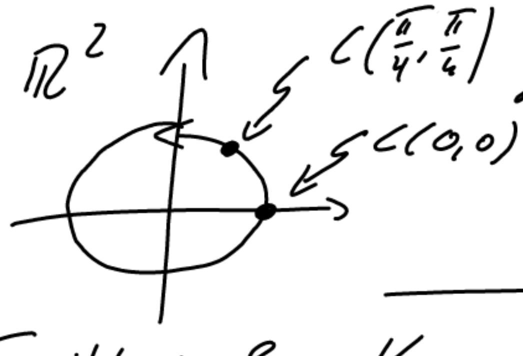
Hier entstehen also die „neuen Effekte“:

sog. ebene Kurve

NICHT VORGETRAGEN

Zur Verdeutlichung 2 Bsp

$$c : \mathbb{R} \supseteq [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



gibt x- & y-Komponente des Funktionswerts an

zB: $t = 0 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = \frac{\pi}{4} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \pi/4 \\ \sin \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Die Zerlegung von $c(x)$ in $c_1(x) = \cos(x)$, $c_2(x) = \sin(x)$ führt zu einer angemessenen Beschreibung von f

$$f : D^2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

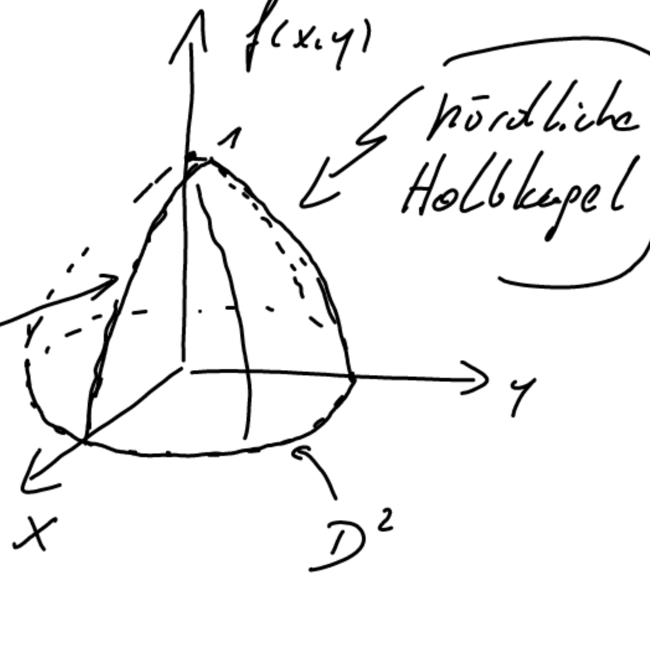
zB: $(0,0) \mapsto 1$

(x,y) mit $x^2 + y^2 = 1 \mapsto 0$

am Rand der Scheibe

$(0,y) \mapsto \sqrt{1 - y^2}$

Halbkreis über x-Achse



Im Ausdruck $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ können die Variablen x, y nicht gut getrennt werden.

$\Rightarrow$ neue Effekte!

A.4 MEHRDIM ANALYSIS — INHALTE

Der Kern der Analysis ist ja (vgl. A.1) die Differential- und Integralrechnung. Das ist auch in der mehrdim. Analysis so. Das benötigt aber als Grundlage den Konvergenzbegriff im Def- & Zielbereich.
Daher beginnt das

$\boxed{\text{KAP 6}}$ DIFFERENTIALRECHNUNG IM $\mathbb{R}^n$

mit und $\left\{ \begin{array}{l} \text{FOLGEN \& KONVERGENZ in } \mathbb{R}^n \\ \text{STETIGKEIT VON FKT } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{array} \right.$

1. Überraschungen

Dann gehts zur MEHRDIM DIFFERENTIALRECHNUNG

Diese kann offensichtlich nicht mittels Differential-quotienten aufgebaut werden:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2)}{(h_1,h_2)}$$

$x=(x_1,x_2)$
$h=(h_1,h_2)$

HOPPALA: was soll das heißen?
[dividieren durch Vektor?]

Vielmehr muss die
Kernidee der Ableitung als lin Bestapproximation
[vgl [3] 1.19, 1.20] verwendet werden

Das nachfolgende

KAP 7 | MEHRDIM INTEGRALRECHNUNG

widmet sich vor allem den Verallgemeinerungen des Integralbegriffs und des HsDI – den Integralsätzen von Gauß & Stokes.

Um einen ersten Eindruck davon zu erhalten betrachten wir folgenden Teil des HsDI:

$$\left\{ \int_a^b f'(t)\,dt = f(x)\Big|_a^b \right\}$$

Integral über die Ableitung

Funktion am Rand

In größter Allgemeinheit sagen die Integralsätze

$$\left\{ \int_M df = \int_{\partial M} f \right\}$$

„schönes" n-dim „Gebiet"

geeignete Ableitung von f

Rand von M ≙ „schönes" (n-1) dim „Gebiet"

A.5 Ausblick 2: Komplexe Analysis

Auch Teil des looongen Titels der VO

Als Menge gilt natürlich $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
Aber $\mathbb{C}$ hat zusätzlich eine „eigene" Körperstruktur [$\mathbb{C}$ ist ein Körper; vgl [0] 1.4]

[Nebenbemerkung: Auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ gibt es keine Körperstruktur. Es gibt (immer) schwächere Ersatzstrukturen, die weit nicht soviel bringen [vgl. auch EMA, Abschnitt 6.6]

$n=4$: QUATERNIONEN (Schiefkörper, d.h. Mult. nicht kommutativ)
$n=8$: OKTAVEN (Mult nicht assoz.)]

Also: Eine Fkt

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist mehr als eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Insbesondere kann in der Differentialrechnung der Differenzenquotient verwendet werden

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$ Division in $\mathbb{C}$ geht klar

Es ergibt sich eine reiche [soll heißen: mit viel schöner Struktur] Theorie, die KOMPLEXE ANALYSIS (in einer Variable) deren Grundzüge wir am Ende der VO kurz kennenlernen werden.

A.6 „BLÖDE" FRAGE:

Und warum nicht gleich $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$?

Da wird es schnell viel schwieriger – meist auch nicht Teil des Bachelor-Studiums.

15 Funktionenfolgen & -Reihen

In diesem Kapitel wollen wir also Funktionenfolgen & Funktionenreihen – also Folgen bzw Reihen deren Glieder Fkt sind – und vor allem ihre Konvergenz studieren

Nach einer Begriffsbestimmung werden wir uns in §1 um die 2 grundlegenden Konvergenzbegriffe kümmern: punktweise Konvergenz & gleichmäßige Konvergenz
Wie in A2 angedeutet gibt es hier nicht den einen richtigen Begriff, sondern viele Möglichkeiten mit jeweils anderen Eigenschaften. Insbesondere werden wir uns die Frage nach „Permanenzeigenschaften" stellen: Welche Eigenschaften der Folgenglieder (z.B. Stetigkeit) bleibt im Limes erhalten?
Wir werden die glm. Konvergenz mittels einer Norm beschreiben & diese dazu verwenden ein zentrales Konvergenzkriterium f. Funktionenreihen zu beweisen: den Satz v. Weierstraß. Dann werden wir uns ausführlich mit der Frage beschäftigen, ob der Limes von Fktionenfolgen mit Ableitung bzw Integral vertauscht, also der Frage ob etwa $f_n \to f \Rightarrow f_n' \to f'$ gilt.

da steckt ein allg. Prinzip dahinter

In einem Zwischenspiel werden wir dann 2 Bsp sehr gründlich studieren – Bsp die später immer wieder auftauchen werden.

In $\boxed{\S 2}$ werden wir <u>Potenzreihen</u> studieren; diese sind von der Form (*) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($a_k \in \mathbb{R}$, die sog. Koeffizienten, $x \in \mathbb{R}$)

Sie verallgemeinern Polynome in dem Sinn, dass in (*) die Summe nicht abb. Wir werden uns intensiv mit dem Konvergenzverhalten von PR beschäftigen — dabei wird es sich als <u>natürlich</u> erweisen „ins Komplexe zu gehen", also statt (*) Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C})$$

zu betrachten. Daher werden wir auch Einiges in §1 schon <u>vorsorglich</u> für $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ formulieren — Aber <u>keine Angst</u>: $\mathbb{C}$ sorgt hier nicht für zusätzliche Probleme, sondern für zusätzliche Klarheit

In $\boxed{\S 3}$ beschäftigen wir uns dann mit Taylorreihen. Wir werden dabei schöne Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus ihren (höheren) Ableitungen an einer einzigen Stelle rekonstruieren — und zwar in Form einer Potenzreihe.

Hier ist schon wieder Schluss mit $\mathbb{C}$

Alle diese Themen sind bisher schon aufgeblitzt — am deutlichsten bei der Exponentialreihe [vgl. [H] 4.37, [R] 3.12]

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$$

das ist eine PR & auch TR

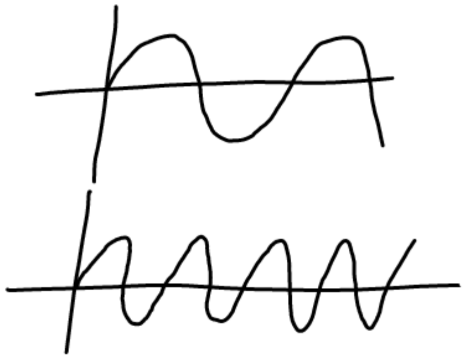
Im abschließenden $\boxed{\S 4}$ werden wir einen kurzen Abriss der

Theorie der <u>Fourier-Reihen</u> geben. Sie ermöglicht es periodische Fkt durch „Polynome in Sin & Cos" den sog. <u>trigonometrischen Polynome</u> anzunähern. Wir betrachten also Fkt der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

$k=1$: Grundschwingung

$k>1$: Oberschwingungen



Das entspricht einer Zerlegung von f in Grund- und Oberschwingungen – also in ihre <u>Frequenzanteile</u>.

Dieses Prinzip eröffnet eine ganze Welt von <u>Anwendungen</u> [Physik, Elektrotechnik, Signalübertragung, Mobilkommunikation, mp3-Format, ...] und auch weitgehende theoretische Entwicklungen im Rahmen der <u>FUNKTIONALANALYSIS</u>.

in gewissem Sinne die Zusammenführung von (lin. Algebra & Analysis)

Studium von VR von Fkt, diese sind unendlichdimensional und benötigen $\sum^{\infty}$ statt $\sum^{\dim}$

§1 PUNKTWEISE & GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ

1.1. MOTIVATION (Funktionenfolgen und -reihen)

(i) Begriffsbestimmung. Cf [1] Def 2.1. ist eine Folge in (einer Menge) M eine Abb

$$a : \mathbb{N} \to M$$

Schreibweise $a_n = a(n)$
$(a_n)_n$ für die ganze Folge

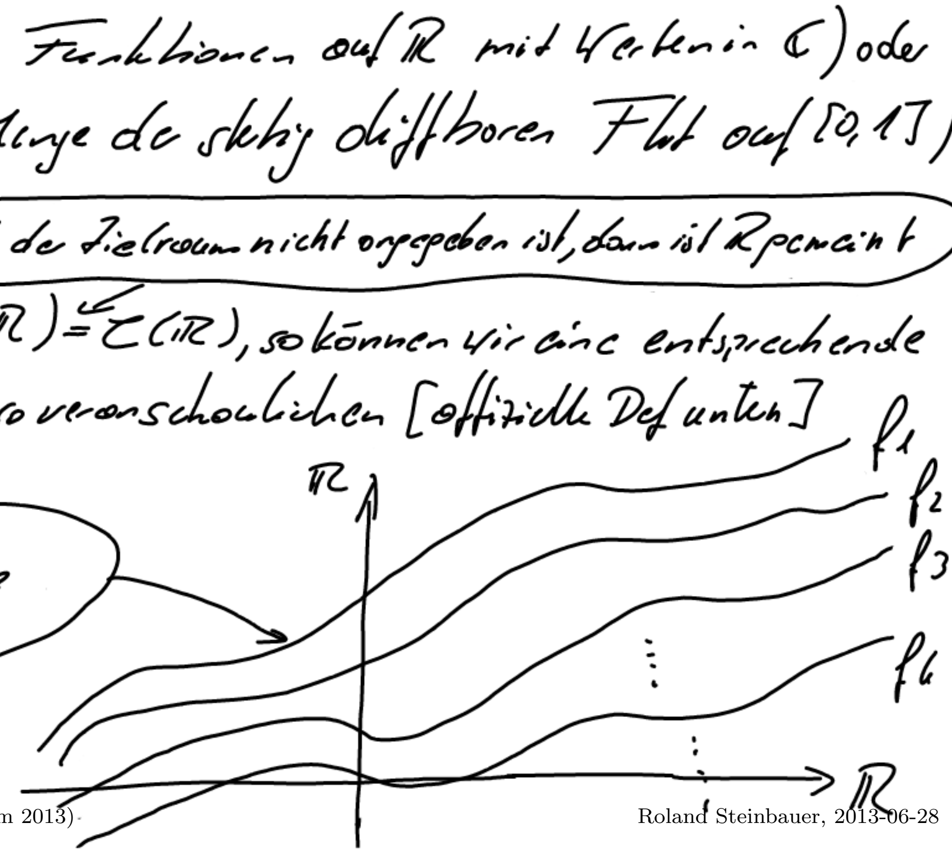
Bisher haben wir in den allermeisten Fällen $M = \mathbb{R}$ gesetzt und somit sog. reelle Folgen betrachtet. Den Fall $M = \mathbb{C}$ haben wir in [2] Exkurs 3.10. betrachtet. Dieser weist keinerlei konzeptuelle Neuigkeiten auf da jede komplexe Folge in Real- & Imaginärteil - also in zwei reelle Folgen - zerlegt werden kann [nichts Neues aber doppelt so viel Arbeit vgl. [2] 3.10(E)]

Jetzt wollen wir Funktionenfolgen betrachten also den Fall, dass M eine Menge von Funktionen ist, z.B. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (Menge aller reellen Fkt), $M = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{C}$) oder $M = \mathcal{C}^1([0,1])$ (Menge der stetig diffbaren Fkt auf $[0,1]$).

Falls der Zielraum nicht angegeben ist, dann ist $\mathbb{R}$ gemeint

Setzen wir z.B. $M = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =: \mathcal{C}(\mathbb{R})$, so können wir eine entsprechende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ etwa so veranschaulichen [offizielle Def unten]

1. Folgenglied ist die ganze Fkt $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usw.



(ii) <u>Wozu Funktionenfolgen?</u> Reelle Folgen und ihre Konvergenz haben wir als essentiellen Begriff und als wichtiges Werkzeug kennengelernt. Ähnlich zentral für die Analysis sind Funktionenfolgen.

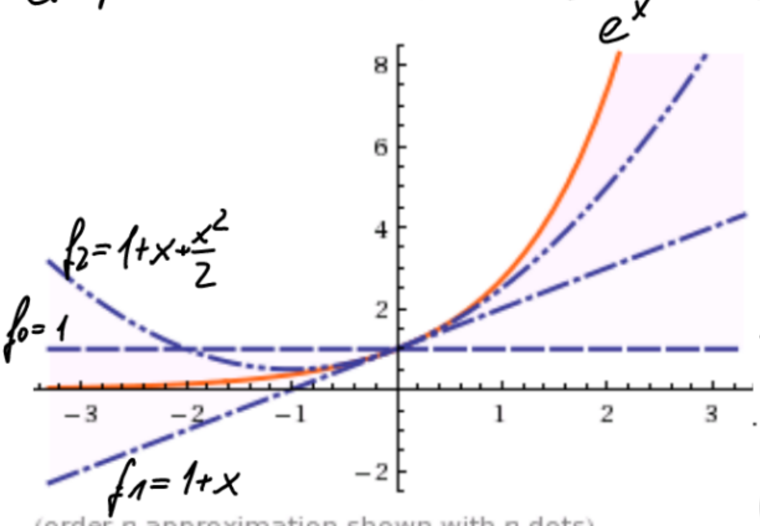
(iii) <u>Okay, Konvergenz von Funktionenfolgen, aber wie?</u> Eine naheliegende Idee ist es, die Konvergenz der Bildpkte ins Spiel zu bringen, also für fixes x die Folge $(f_n(x))_n$ in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$] zu betrachten. Diese Idee führt auf den Begriff der <u>punktweisen Konvergenz</u> von Funktionenfolgen [offizielle Def unten].

(iv) <u>Ja, aber hatten wir sowas nicht schon?</u> Ja klar, bei der Exponentialfkt. Diese ist ja [[1] 4.37] definiert als der Limes der Exponentialreihe, genauer ($x \in \mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{C}$ [2] 3.12)

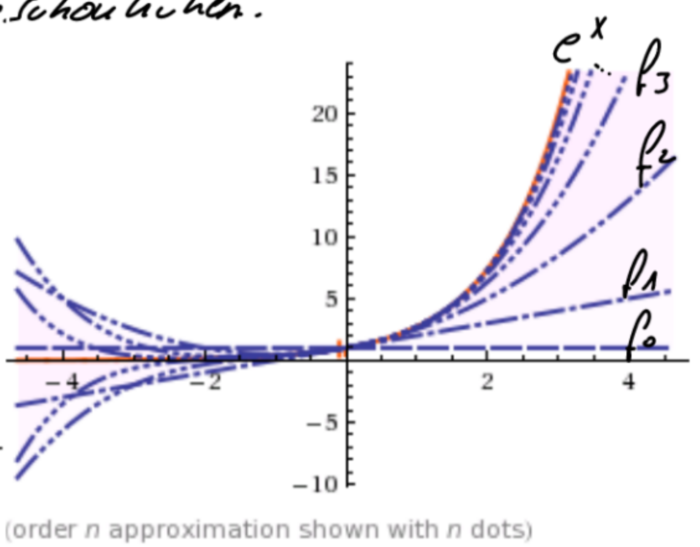
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{f_n \text{ n-te Partialsumme der Exp-Reihe}} \Big)$$

Graphisch können wir das so veranschaulichen.



(order n approximation shown with n dots)



(order n approximation shown with n dots) das schließt insbesondere $A\subseteq\mathbb{R}$ mit ein

1.2 DEF (Funktionenfolge) Sei M eine Menge von Funktionen, die alle auf $A\subseteq\mathbb{C}$ definiert sind und Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ annehmen. [d.h. $M=\{f:A\to\mathbb{R}[\mathbb{C}] \mid f \dots\}$]

evtl. bestimmte Eig wie etwa stetig, ...

Eine Folge in M [vgl. [1] 2.1] heißt <u>Funktionenfolge auf A</u>.

Wir schreiben für die Folge meist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_n$ oder (f_n). [Jedes $f_n\in M$ also $f_n: A\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$]

1.3. DEF (Punktweise Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf A konvergiert punktweise gegen eine Fkt $f: A\to\mathbb{R}\,[\mathbb{C}]$, falls

$$\forall x\in A:\quad f_n(x)\to f(x) \quad \text{in } \mathbb{K}$$

Betrag in $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$

d.h. $\forall x\in A\ \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(x,\varepsilon)\ \forall n\geq N\ \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

N hängt von ε <u>und x</u> ab!

1.4 BSP (Pktw konv. Funktionenfolgen)

(i) Sei $A=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$ $(n\geq 1)$

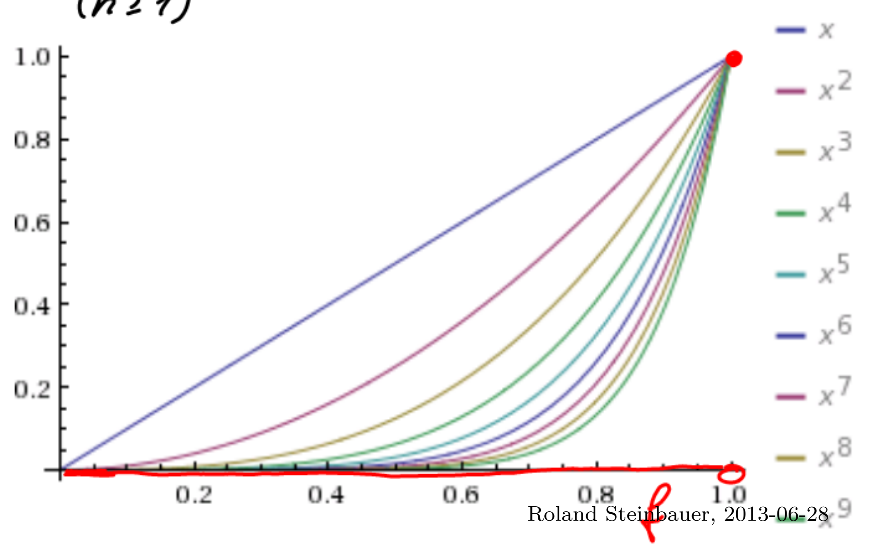
Es gilt

$f_n(0)=0\ \forall n$

$f_n(1)=1\ \forall n$

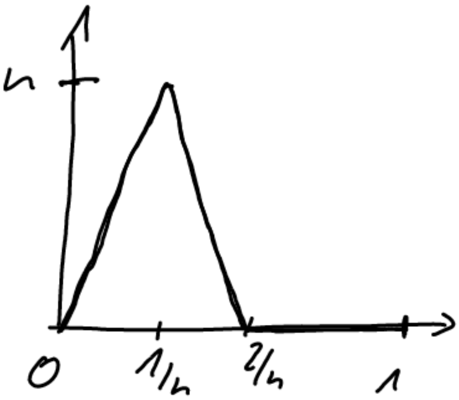
$f_n(x)\to 0\ \ \forall x\in(0,1)$

[[1] 1.5]



Also gilt $f_n \xrightarrow{\text{pktw}} f$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

(ii) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ von der Form



[d.h.: $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le 1/n) \\ -n^2 x + 2n & (1/n \le x \le 2/n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$]

Dynamisches Bild: Die Zacken werden höher und wandern nach links

Dann gilt $f_n \to 0$ pktw, denn $f_n(0) = 0\ \forall n$ und $\forall x > 0\ \exists N$ sodass $2/N < x$ (N hängt von x ab!) und daher $\forall n \ge N$: $2/n < x$ und somit $f_n(x) = 0$.

Wenn man nur lange genug wartet (bis $n > 2/x$) sind die Buckel an x vorbeigezogen.

1.5 BEM (Punktweise Konvergenz ist ein schwaches Konzept)

So natürlich das Konzept der pktw. Konv. auch ist [vgl. 1.1(iv)] es hat erhebliche Nachteile

(A) schöne Eigenschaften der f_n gehen im Limes verloren.
zB sind in 1.4(i) alle f_n stetig, die Limesfkt aber nicht.

(B) Pktw. Konv. ist blind für „wandernde Pkte". So gilt in 1.4(ii) $f_n \to 0$ pktw aber $f_n(1/n) = n \to \infty$

„wandernder Pkt"

Die Ursache für beide Phänomene liegt darin begründet, dass die Konvergenz von $f_n(x)$ für jedes x separat behandelt wird und keine Rücksicht auf eine gewisse „Gleichmäßigkeit" der Konvergenz in verschiedenen Punkten genommen wird.
Ein Konzept, das darauf Rücksicht nimmt lernen wir jetzt kennen.

1.6 DEF (Gleichmäßige Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf $A \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: A \to \mathbb{R}\ [\mathbb{C}]$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \underbrace{\forall x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{(*)}.$$

(hängt nur von ε ab)

Betrag in $\mathbb{R}\ [\mathbb{C}]$

1.7 BEM (Glm & pktw. Konvergenz)

(i) Wir vergleichen die beiden Defs 1.3 und 1.6:

$$f_n \to f \text{ pktw} :\Leftrightarrow \forall x\ \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ glm} :\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Wir sehen, dass „$\forall x$" bei der pktw. Konv. vor „$\exists N$" steht bei der glm. aber dahinter. Daher hängt das N bei der pktw. Konv. von ε und x ab (ist also ein $N(\varepsilon, x)$), bei der glm. Konv. nur von ε (ist also nur ein $N(\varepsilon)$). [vgl. die analoge Situation bei Stetigkeit (in allen Pkten) vs glm Stetigkeit, [2] 2.15]

Daher ist die glm. Konvergenz die stärkere Bedingung
[$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \ \Rightarrow \forall x\ \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N$ weil bei

gegebenem ε für jedes x sogar dasselbe N gewählt werden kann.] und es gilt

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm.} \Rightarrow f_n \to f \text{ pktw.}}$$

(ii) Folgende einfache Umformulierung von (*) in Def 1.6 ist oft nützlich: Es gilt

$$\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

und daher [vgl. 1.6]

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm} \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0}$$

Vergleichen wir nochmals mit der pktw. Konvergenz,

$$f_n \to f \text{ pktw} \iff \forall x \ |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

so wird nocheinmal klar, dass glm. Konv. der stärkere Begriff ist. Die Umkehrung ist falsch, wie das folgende Bsp 1.8 zeigt. Also gilt insgesamt

$$\boxed{\text{glm Konv} \ \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \ \text{pktw Konv}}$$

Zur Vorbereitung des angekündigten Bsp. bemerken wir noch

(iii) Falls $f_n \to f$ pktw und f_n überhaupt glm konvergiert, dann stimmen pktw. und glm. Limes überein, also $f_n \to f$ auch glm.

[gegen welche Fkt auch immer]

Denn angenommen $f_n \to f$ pktw und $f_n \to g$ glm

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $f_n \to g$ pktw und daher insgesamt

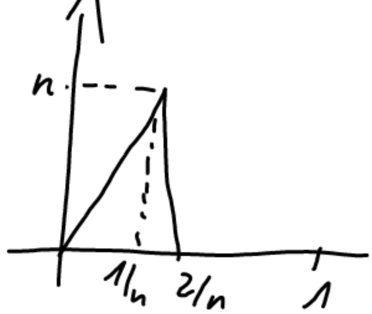
$\forall x \in A$: $f_n(x) \to f(x)$ und

$f_n(x) \to g(x)$ in $\mathbb{R}$ [bzw $\mathbb{C}$]

$\overset{\text{Eind. d. limes}}{\Longrightarrow}$ $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow f = g$

[1] 2.21 ← gilt auch in $\mathbb{C}$: spalte in Re & Im auf

1.8 BSP (pktw konv $\not\Rightarrow$ glm konv.)



Sei (f_n) wie in 1.4(iii), d.h. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

Wir haben gesehen, dass $f_n \to 0$ pktw.

Jetzt zeigen wir, dass f_n nicht glm konv.

Angenommen doch, also f_n glm konv

$\overset{1.7(iii)}{\Longrightarrow}$ $f_n \to 0$ glm $\overset{1.7(ii)}{\Longrightarrow}$ $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \to 0$

Das widerspricht aber $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \to \infty \ (n \to \infty)$

1.9 BSP (glm Konv. der Exponentialreihe auf kp. Intervallen)

Wir betrachten auf $A = [-m, m]$ ($m > 0$ beliebig)

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(n-te Partialsumme der Exp. Reihe in x)}$$

Wegen [1] 4.36, 4.37 gilt $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) \to \exp(x)$, also insbesondere $f_n \to \exp$ pktw auf $[-m, m]$. [vgl. auch 1.1(iii)]

Wir zeigen jetzt, dass sogar $f_n \to \exp$ glm auf $[-m, m]$ gilt. Dazu bemühen wir (ein weiteres Mal) die Restgliedabschätzung aus [1] 4.42:

$$\exp(x) = f_n(x) + R_{n+1}(x) \text{ und } |R_{n+1}(x)| \le 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\forall x \text{ mit } |x| \le 1 + n/2$$

Daher gilt $\forall n \ge 2(m-1)$ $[\Rightarrow m \le 1 + n/2]$

$$\sup_{x \in [-m,m]} |f_n(x) - \exp(x)| \le 2\frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

[UE, Bl. 3 13](b)]

1.10 MOTIVATION (Warum glm Konv „besser" als pktw. K. ist)

Von den beiden Mängeln der pktw. Konvergenz, die wir in 1.5. besprochen haben, ist für die glm. Konv. (B) ausgeschlossen, vgl. 1.8. Ebenso wichtig ist, dass (A) ebenfalls verbessert werden kann. Wie das folgende Thm besagt bleibt Stetigkeit im glm. limes erhalten.

1.11 THM (Glm Konv. & Stetigkeit)

Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen auf $A \subseteq \mathbb{C}$. Falls $f_n \to f$ glm konvergiert, dann ist f stetig auf A.

[kurz gesagt: Der glm limes stetiger Fkt ist stetig.]

Beweis. [„klassischer $\varepsilon/3$-Beweis"]

Sei $x \in A$ beliebig. Wir zeigen, dass f stetig in x ist.

Sei $\varepsilon > 0$

$$\overset{f_n \to f \text{ glm}}{\Longrightarrow} \exists N \ \forall x \in A \quad |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \qquad (*)$$

$$\underset{\text{in } x}{\overset{f_N \text{ stetig}}{\Longrightarrow}} \exists \delta > 0 \ \forall x' \in A \text{ mit } |x - x'| < \delta:$$

$$|f_N(x) - f_N(x')| < \varepsilon/3 \quad (**)$$

$\Longrightarrow \forall x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$:

$$|f(x) - f(x')| \underset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')| + |f_N(x') - f(x')|$$

$$\overset{(*),(**)}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\Longrightarrow f$ stetig in x. $\square$

1.12 WARNUNG + BEM (Mit pktw. K. geht das nicht!)

(i) Thm 1.11 gilt nicht, falls statt glm Konv. nur pktw. Konv. vorausgesetzt wird. Ein explizites Gegenbsp ist Bsp 1.4(i), denn $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$ ist stetig $\forall n$, aber

$$f_n \xrightarrow{\text{pktw}} f, \text{ wobei } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

und f ist nicht stetig in $x = 1$; vgl. 1.5(A).

(ii) Diese Tatsache kann man für folgende Schlussweise einsetzen:

Gilt $f_n \to f$ pktw und alle f_n sind stetig aber ist f unstetig, dann gilt $f_n \not\rightrightarrows f$ glm. ↪ siehe auch [UE]

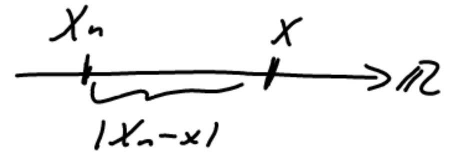
1.13 Motivation & Ausblick (Konvergenz & Abstandsmessung)

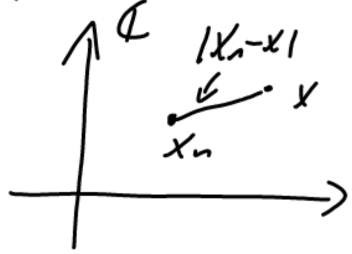
(i) Unser nächstes Ziel ist es, die glm. Konv. von Funktionenfolgen auf eine nützliche Art umzuformulieren. Betrachten wir dazu nochmals die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$]:

$$x_n \to x :\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x - x_n| < \varepsilon$$

Betrag in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$]

Hier spielt $|x_n - x|$ die Rolle eines „Abstands" zwischen den reellen oder komplexen Punkten x_n und x





sodass wir schreiben können:

$$x_n \to x \iff \text{„Abstand von } x_n \text{ zu } x\text{"} \to 0 \qquad (*)$$

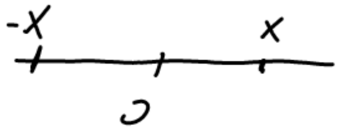
Um eine analoge Formulierung für die glm. Konv. zu erhalten, müssen wir einen geeigneten Abstandsbegriff für Funktionen finden. Vergleichen wir $(*)$ mit der Formulierung in 1.7(ii), nämlich

$$f_n \to f \text{ glm} \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

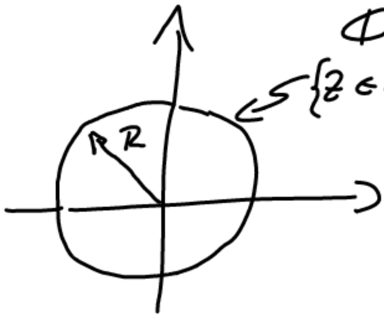
so liegt es auf der Hand für 2 Fkt auf A zu definieren

„Abstand von f zu g" $:= \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$. ← max Abstand der Fktswerte, „Dicke" vgl. A.2

(ii) In $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$] beruht der Abstandsbegriff $|x-y|$ je auf dem Begriff des Betrags. Analog dazu lässt sich obiger Abstandsbegriff auf einen Begriff bauen, der – analog zum Betrag, der die Größe einer Zahl misst – die Größe einer Fkt misst.



$|x|$ misst den Abstand von $\pm x$ zu 0, also die Größe von $\pm x$



alle komplexen Zahlen auf dem Kreis haben dieselbe „Größe", nämlich R

So erhalten wir die <u>Unendlichnorm</u> bzw <u>Supremumsnorm</u> [offizielle Def unten]

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

$\|f\|_\infty$ ist im wesentlichen der betragsmäßig größte Wert von f

(iii) Es lassen sich noch viele weitere „Größenbegriffe" sprich Normen für Funktionen finden. Prominente Bsp sind etwa ($A=[a,b]$)

1-Norm → $$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$$ Im wesentlichen die Fläche unter f (vgl. A.2)

2-Norm; wichtig für Fourier-Reihen → $$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

irgendeine Norm

die jeweils nach dem Schema

$$f_n \to f \text{ im Sinne der } \|\ \|_* \iff \|f_n - f\|_* \to 0$$

einen eigenen Konvergenzbegriff erzeugt.

Das Studium von Vektorräumen von Fkt mit verschiedenen Normen ist Teil des math. Gebiets der

FUNKTIONALANALYSIS

VR

das in gewisser Weise die Analysis mit der lin. Algebra zusammenführt.

$\|\ \|$ & Konvergenz

Nun offiziell

1.14 DEF ($\|\ \|_\infty$) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und $f: A \to \mathbb{R}\ [\mathbb{C}]$.
Wir definieren die Unendlichnorm oder Supremumsnorm von f (auf A) als

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

und setzen $\|f\|_{\infty,A} = \infty$, falls f auf A unbeschränkt ist.

Falls A aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir nur $\|f\|_\infty$.

1.15 BEOBACHTUNG (zur $\|\ \|_\infty$)

(i) Tatsächlich gilt $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ denn zB
$\|0\|_\infty = 0$, $\|x\|_{\infty,[0,1]} = 1$, $\|1/x\|_{(0,1]} = \infty$.

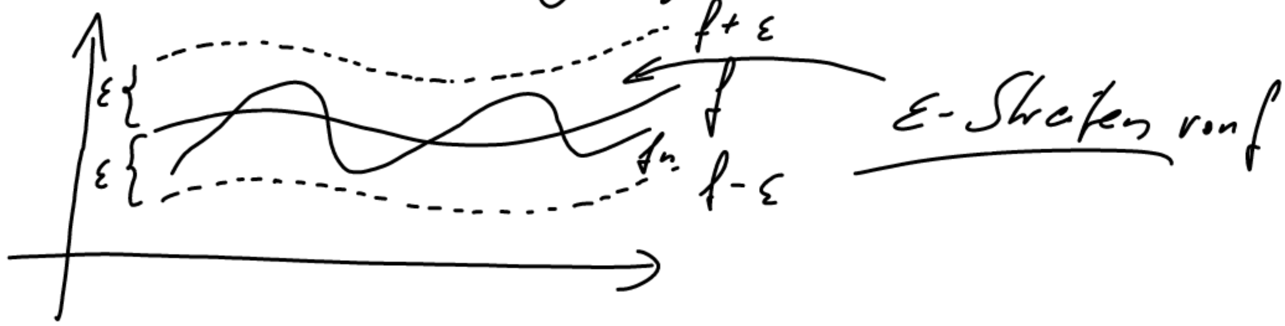
(ii) Es gilt f beschränkt [[R] 2.10 $|f(x)| \leq C \;\forall x$] genau dann, wenn $\|f\|_\infty < \infty$

(iii) Wie in 1.13(i),(ii) diskutiert gilt [vgl 1.7(iii)]

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm} \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0} \quad \text{bzw}$$

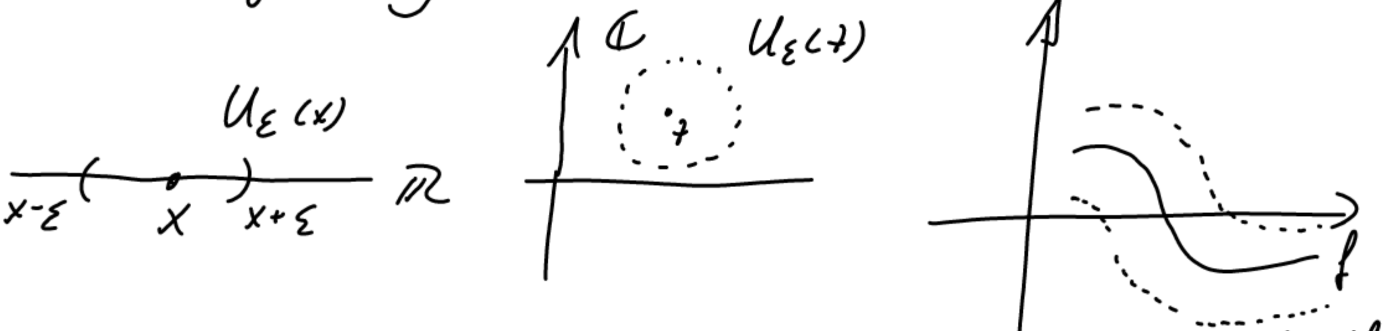
$$f_n \to f \text{ glm} \iff \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \;\forall n \geq N \;\underbrace{\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon}_{(*)}.$$

Bedingung (*) lässt sich gut graphisch darstellen.



$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bedeutet ja, dass $f_n(x)$ nie weiter als ε von $f(x)$ entfernt ist, f_n also im ε-Streifen zwischen $f-\varepsilon$ und $f+\varepsilon$ liegt.

(iv) Der ε-Streifen spielt also hier die Rolle der ε-Umgebungen in $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ und wird daher auch als ε-Umgebung $U_\varepsilon(f)$ von f bezeichnet



1.16 MOTIVATION ($\|\ \|_\infty$ und Konv. v. Funktionenreihen)

Wie wir oben gesehen haben ist $\|\ \|_\infty$ der zentrale Begriff, der eine anschauliche Formulierung der glm. Konvergenz ermöglicht. Sie erlaubt aber auch äußerst praktische Formulierungen, wie wir am folgenden wichtigen Satz über die Konvergenz von Funktionenreihen sehen können.

1.17 THM (Satz von Weierstraß)

Das ist eine Reihe reeller Zahlen, also nichts Neues!

Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf $A \subseteq \mathbb{C}$. Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert, dann gilt:

(i) Für alle $x \in A$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut.

[Wir sagen: die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert absolut]

(ii) Sei $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \longrightarrow F \text{ gleichmäßig}$$

[Wir sagen die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konv. glm.]

[Eine beliebte Kurzform des Thms lautet: Falls $\sum \|f_k\|_\infty < \infty$, dann konv. die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut & gleichmäßig]

Beweis. (i) Wir zeigen: $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ konv. abs. } \forall x \in A}$

Sei $x \in A$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt lt. Def $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$

$\Longrightarrow \sum \|f_k\|_\infty$ ist eine konv. Majorante für $\sum |f_k(x)|$

$\overset{[1]4.18(i)}{\Longrightarrow} \sum |f_k(x)|$ konvergiert.

(ii) (1) Gewinnen eines Kandidaten für den glm Limes

$$(i) \Rightarrow \sum |f_k(x)| \text{ konv } \forall x \in A \overset{[1]4.16}{\Longrightarrow} \sum f_k(x) \text{ konv } \forall x$$

Wir können daher für $x \in A$ definieren $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

(2) Wir zeigen: $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \to F$ glm

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \text{ konv } \overset{CP\,[1]4.3+[1]2.28}{\Longrightarrow} \exists N\ \forall n \geq N \ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $x \in A$, dann gilt für $n \geq N$

verallg. Δ-Ungl vgl. [1]4.42

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$$

$$\overset{[1]2.28}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Also gilt $F_n \to F$ glm. $\square$

1.18 BSP (abs & glm konv. Funktionenreihen)

(i) Nochmals die Exponentialreihe. Sei $A=[-m,m]$ $(m>0)$.

Wir betrachten $f_k(x)=x^k/k!$ $(k\in\mathbb{N})$

Es gilt $\|f_k\|_{\infty,A}=m^k/k!$ und daher

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|f_k\|_\infty=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^k}{k!}=e^m<\infty$$

$$\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}\ \sum_{k=0}^{\infty}f_k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k! \text{ konv glm auf } [-m,m],$$

was ein alternativer Beweis zu 1.9. ist.

(ii) Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir $f_k(x)=\dfrac{\cos(kx)}{k^2}$ $(k\geq 1)$

Es gilt $\|f_k\|_\infty=\frac{1}{k^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ [H] h.9(ii)]

und daher konvergiert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ abs & glm (auf $\mathbb{R}$).

1.19 MOTIVATION (Vertauschen von Limes & Integral)

Ab hier bis Ende §1 alles reell

Wir betrachten nun die folgende Frage: Gegeben seien $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ und (f_n) konv. gegen eine Grenzfkt f. Die Integrale $\int f_n$ seien bekannt. Was können wir über das Integral der Grenzfkt $\int f$ sagen?

Gilt $\left(\int f_n\right)\to\left(\int f\right)$, d.h. gilt

Vertausche von lim & $\int$

Folge in $\mathbb{R}$

$$\lim\int f_n=\int\lim f_n\ ?$$

Wie wir gleich sehen werden lautet die Antwort ja im Falle glm. Konv. & nein für pktw. Konv. ∎

1.20 PROP (Vertauschung von Limes & Integral)

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine glm. konv. Folge stetiger Fkt. Dann gilt

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

Beweis. [erfreulich kurz & einfach] Wir setzen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f \text{ ist stetig auf } [a,b]$$

$$\overset{[4]\,1.12(ii)}{\Longrightarrow} f_n, f \text{ R-intbar auf } [a,b]$$

Schließlich gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\right| \overset{[4]\,1.15(ii),\ 1.19}{\leq} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt$$

$$\underset{[4]\,1.21(ii)}{\leq} (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{f_n \to f \text{ glm}} 0.$$

∎

1.21 BSP (Integral einer Funktionenreihe)

Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ $(n \geq 1,\ x \in [0, 2\pi])$. In 1.18(ii) haben wir gesehen, dass f_n glm. konvergiert. Daher gilt mit 1.20 für $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx$$

[4] 1.15(ii)

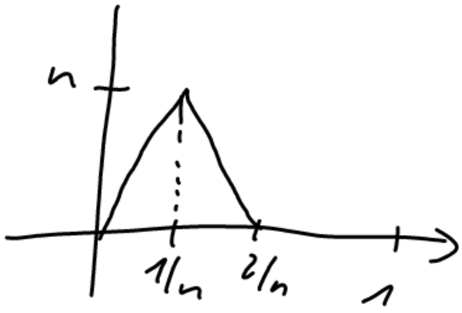
$$\overset{1.20}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \int_0^t \cos(kx)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}\,\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k^3}$$

Mehr dazu in PS, UE

1.22 WARNUNG (Pktw. Limes vertauscht nicht mit $\int$)

Wir betrachten nocheinmal die „Zackenfunktionen" aus 1.4(ii). Es gilt



$$\int_0^1 f_n(t) = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\,n = 1 \quad \forall n$$

aber $$\int_0^1 \lim f_n \overset{1.4(ii)}{=} \int_0^1 0 = 0 \quad \left[\neq 1 = \lim \int_0^1 f_n\right]$$

1.23 MOTIVATION (Vertauschen von Limes & Ableitung)

Jetzt wollen wir uns die analoge Frage über die Vertauschbarkeit von Limes einer Funktionenfolge mit dem Differenzieren stellen; wir wollen also herausfinden ob bzw. unter welchen Umständen

$$(\lim f_n') = (\lim f_n)'$$

Wie schon oft bemerkt: Integrieren ist „einfacher" als Diff.

gilt. Hier ist die Situation komplizierter als im Falle der Integration – insbesondere reicht (bei klarerweise als diffbar vorausgesetzten f_n's) auch die glm. Konv. von

f_n nicht ows, wie wir unten sehen werden. Zunächst aber das pos. Resultat.

1.24 PROP (Vertauschen von limes & Differenzieren)

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig diffbarer Funktionen. Sei f_n pktw. konvergent gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei die Folge der Ableitungen f_n' glm. konvergent. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f' \underset{(\text{p.d.e.f.})}{=} (\lim f_n)' = \lim (f_n')$$

Beweis [wieder erfreulich einfach und kurz...]

Wir setzen $g(x) := \lim f_n'(x) \overset{1.11}{\Longrightarrow} g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $(*)$

$$f_n \text{ stetig diffbar} \overset{HsDI}{\Longrightarrow} \forall x \in [a,b]\ \forall n$$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$f_n' \to g \text{ glm} \overset{1.20\,(n\to\infty)}{\Longrightarrow} f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

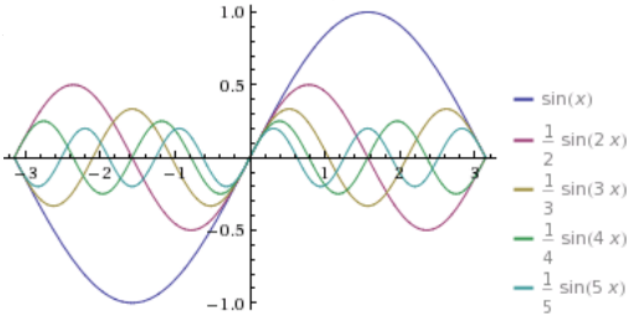
$$\underset{HsDI}{\overset{d/dx}{\Longrightarrow}} \underline{f'(x)} = 0 + \underline{g(x)}$$

Schließlich ist $g = f'$ stetig [$(*)$], also $f \in C^1$. $\square$

1.25 WARNUNG & AUSBLICK

(i) Die glm Konv. von f_n reicht – selbst wenn alle f_n stetig diffbar sind – nicht einmal dafür aus, dass f_n' (auch nur) plktw. konvergiert. Ein explizites Bsp dafür ist ($n \geq 1$)

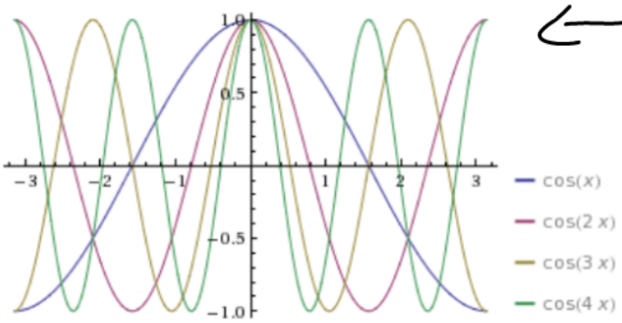
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$



Es gilt $\|f_n\|_\infty = 1/n \to 0 \implies f_n \to 0$ glm.

aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ ist nicht plktw. konvergent, denn setze z.B. $x = \pi$, dann gilt

$$f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$



(ii) Die Situation wird bedeutend einfacher, wenn man nur speziellere Typen von Funktionenfolgen/reihen betrachtet — zB die Potenzreihen, denen wir uns in §2 zuwenden.

ZWISCHENSPIEL: SÄGEZAHN- & HAIFISCHZAHN-FUNKTION

Z.1 INTRO. In diesem Zwischenspiel wollen wir ausführlich 2 Beispiele diskutieren, die im späteren Verlauf mehrmals auftreten werden. Wir werden die beiden Funktionenreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (S) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \quad (H)$$

untersuchen und vor allem die Summenfunktionen berechnen. Dabei werden wir einiges aus unserem bisher gesammelten Wissen verwenden. Wir beginnen mit einer Anwendung der part. Integration, die vielfältig verwendbar ist.

Z.2 SATZ (Lemma von Riemann-Lebesgue)

Sei $f \in \mathcal{C}^1([a,b]; \mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$F(k) := \int_a^b f(x) \sin(kx)\, dx.$$

$\int_a^b f(x) \sin(kx)$ gibt eine Zahl, die von k abhängt. Nun lasse k laufen.

Dann gilt

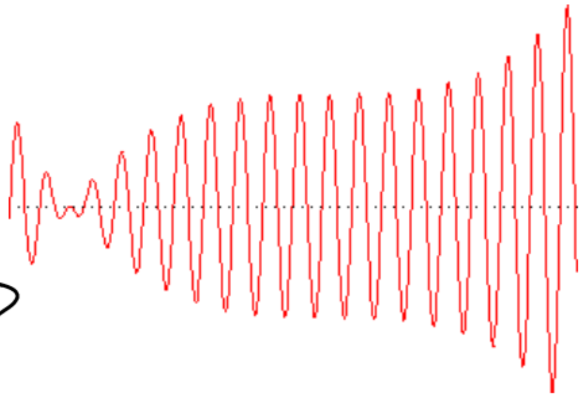
$$\lim_{|k| \to \infty} F(k) = 0.$$

Z.3 BEM (Die anschauliche Bedeutung des L. v. R.-L.)

Die Behauptung des Satzes lässt sich anschaulich so interpretieren. Die immer schneller Oszillation von $\sin(kx)$ löscht im Integral schöne f's aus – sie werden „herausgemittelt."

Das Integral einer solchen Fkt ist klein, – die pos & negativen Teile löschen sich beinahe aus

Wenn die Frequenz der Oszillation $\to \infty$ geht, geht das $\int$ gegen 0



Beweis. Lt. Voraussetzung f, f' stetig auf $[a,b]$

$$\overset{[2]\ 2.11}{\Longrightarrow} f, f' \text{ beschränkt auf } [a,b]$$

$$\text{d.h. } \exists M>0 : \|f\|_{\infty,[a,b]},\ \|f'\|_{\infty,[a,b]} \le M \quad (*)$$

1.15 (ii)

Sei $k \neq 0$, dann gilt

$$F(k) = \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} f(x)\,\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx$$

$$\Longrightarrow |F(k)| \overset{|\cos(x)|\le 1}{\le} \frac{1}{|k|}\,|f(x)|\Big|_a^b + \frac{1}{|k|}\int_a^b |f'(x)|\,dx$$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{2M}{|k|} + \frac{1}{|k|}(b-a)M \longrightarrow 0 \ (k\to\infty)$$

$\square$

2.4 LEMMA (Eine trigonometrische Summenformel)

Sei t kein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}$$

$\neq 0$ laut Voraussetzung

Beweis. Lt. def gilt $\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)$ [vgl. [R] 3.17(iii)]

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} - \frac{1}{2}$$

kompensiere den Term mit $k=0$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{e^{ikt}}_{(e^{it})^k}$$

geo. Reihe

$$= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

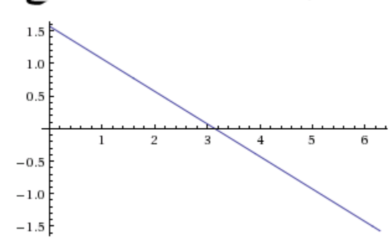
$$= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \qquad \square$$

7.5 BSP (Punktw. Konvergenz für (S))

Für $0 < x < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$$



$\frac{\pi - x}{2}$ auf $(0, 2\pi)$

Tatsächlich haben wir für $0 < x < 2\pi$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)\,dt = \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,dt$$

$$\overset{7.4}{=} \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}\right) dt = \underbrace{\int_{\pi}^{x} \underbrace{\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}}_{\in C^1(0,2\pi)} \sin((n+1/2)t)\,dt}_{\longrightarrow\, 0 \ [7.2]} - \frac{x - \pi}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi - x}{2}$$

7.6 Spezialfall. Setzen wir in 7.5 $x = \pi/2$ so erhalten wir

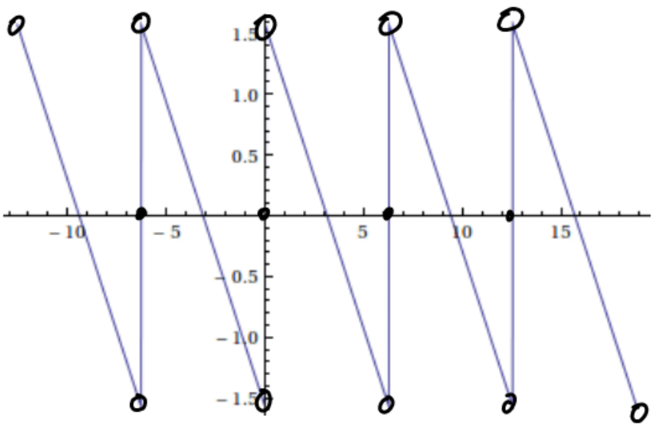
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schöne & berühmte Formel

7.7 Die Sägezahnfkt. Wir definieren $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als periodische Fortsetzung von $\frac{\pi - x}{2}$, d.h.

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0, 2\pi)) \\ S(x + 2n\pi) = S(x) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in (0, 2\pi)) \end{cases}$$



[Die Sägezahnfkt auf $(-4\pi, 6\pi)$]

Nach 7.5 gilt

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

Für $x = 0$ stimmt die Aussage trivialerweise. Schließlich gilt sie ebenso für $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, weil $\sin(k(x + 2n\pi)) = \sin(kx)$. Also gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ (im Sinne der pktw. Konv.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = S(x) \quad \text{die sog. Sägezahnfkt.}$$

2.8 Die glm. Konvergenz der Sägezahnfkt.

(i) Die Konvergenz in 2.7 kann nicht auf ganz $\mathbb{R}$ glm sein, weil die PS $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ ist, aber die Grenzfkt unstetig [vgl. 1.12 (iii)].

(ii) Tatsächlich ist die Konvergenz glm. auf allen Intervallen der Form $[\delta, 2\pi-\delta]$ $(\delta>0)$.

Es gilt nämlich $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ mit $S_n := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$

$$|S_n(x)| = \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)}_{=\operatorname{Im}(e^{ikx})}\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\Big| = \Big|e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\Big|$$

$$\xrightarrow{\text{geom. R.}} = \underbrace{|e^{ix}|}_{=1}\left|\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right| \le \frac{2}{|1-e^{ix}|}$$

$$= \frac{2}{\underbrace{|e^{ix/2}|}_{=1}} \frac{1}{|e^{ix/2}-e^{-ix/2}|} = \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \le \frac{1}{\sin(\delta/2)} \quad (*)$$

kleinster Wert von $\sin(x/2)$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$

unabhängig von n!

Nun folgt $\forall m \ge n > 0$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin(kx)}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{\overbrace{S_k(x)-S_{k-1}(x)}^{\sin(kx)}}{k}\Big|$$

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_{k-1}}{k} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=n-1}^{m-1} \frac{S_l}{l+1} = \sum_{l=n}^{m} \frac{S_l}{l+1} - \frac{S_m}{m+1} + \frac{S_{n-1}}{n}$$

$$= \Big|\sum_{k=n}^{m} S_k(x)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_m}{m+1} - \frac{S_{n-1}}{n}\Big|$$

Teleskopsumme $\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1}$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n\sin(\frac{\delta}{2})}$$

$$\Longrightarrow \Big|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\Big| \le \frac{2}{n\sin(\frac{\delta}{2})} \quad \forall x \in [\delta, 2\pi-\delta] \quad (**)$$

Daraus folgt nun die behauptete glm. Konvergenz: $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k} - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \overset{(**)}{\leq} \underbrace{\frac{2}{n\sin(\frac{\delta}{2})}}_{\text{unabhängig von } x\,!} \to 0$$

Z.9 BSP (Die Haifischzahnfkt) ← Achtung: Keine offizielle Terminologie

Wir berechnen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} =: H(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

Jetzt geht's Schlag auf Schlag

- $1.18(ii) \Rightarrow \sum \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konv. glm auf $\mathbb{R}$ $\overset{1.11}{\Longrightarrow}$ H stetig auf $\mathbb{R}$
- Die differenzierte Reihe ist $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

$$\overset{Z.8}{\Longrightarrow} \quad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x-\pi}{2} \text{ glm auf jedem } [\delta, 2\pi-\delta]$$

$$\overset{1.24}{\Longrightarrow} H'(x) = \frac{x-\pi}{2} \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

jedes solche liegt in einem $[\delta, 2\pi-\delta]$

$$\overset{\text{Int}}{\Longrightarrow} H(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante})$$

und weil H stetig ist $\underline{\forall x \in [0, 2\pi]}$!

Muss auch am Rand so aussehen $\boxed{R}$ 1.26

- Daher können wir c mittels Integration bestimmen

$$\int_0^{2\pi} H(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 dx + \int_0^{2\pi} c\,dx = \frac{(x-\pi)^3}{12}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi c$$

$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

Andererseits gilt $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k \geq 1$

und H ist glm Limes

1.20 $$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} H(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{C = -\pi^2/12}$$

Damit gilt also $$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \forall x \in [0,2\pi]}$$

glm. Limes

Definieren wir wie vorher die periodische Fortsetzung von $\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ also

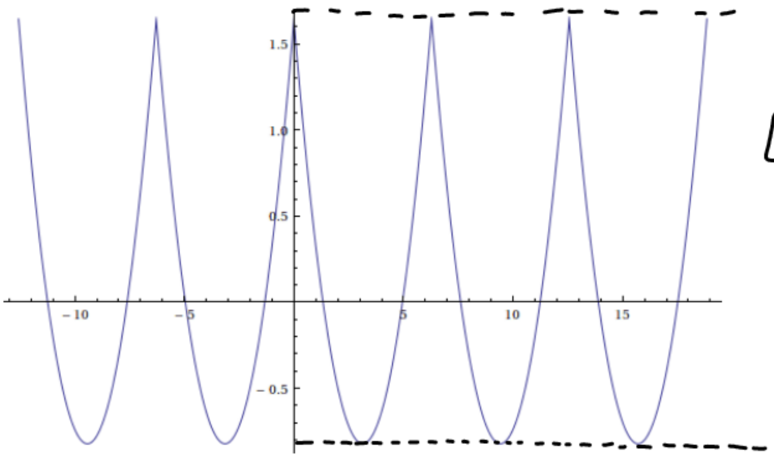
Achtung: Nicht korrekt vorgetragen

$$H(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

$$H(x+2n\pi) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \qquad n \in \mathbb{Z},\ x \in [0,2\pi]$$

so erhalten wir die sog. Haifischzahnfkt und es gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = H(x) \quad \text{glm. auf } \mathbb{R}}$$



$\pi^2/4 - \pi^2/12 = \pi^2/6 \approx 1{,}64$

[Die Haifischzahnfkt auf $[-4\pi, 6\pi]$]

$-\pi^2/12 \approx -0.82$

7.10 Spezialfall.

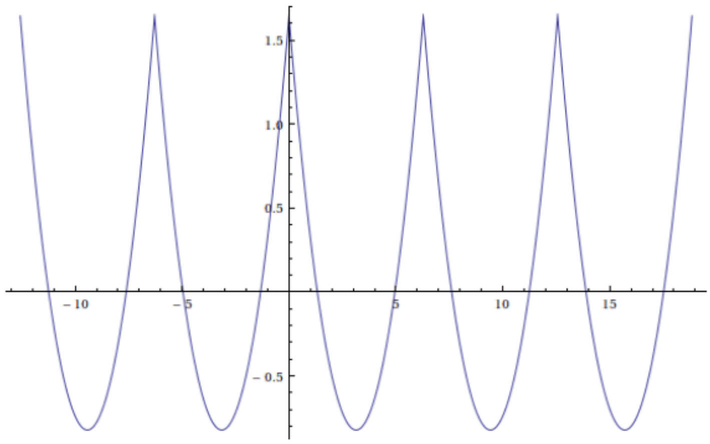
Setzen wir in 7.9 $x=0$ so erhalten wir

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(0)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

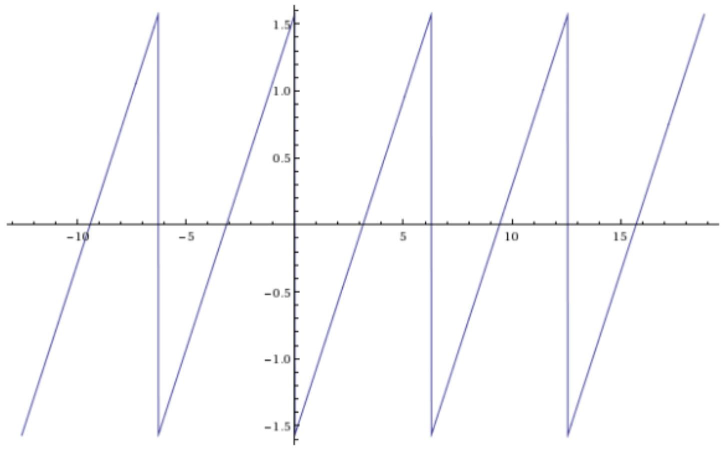
ebenfalls berühmt & schön

7.11 Fazit

H



$-S$



anschaulich klar

Wir haben insgesamt:

$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ glm. auf $\mathbb{R}$, stetig, nicht diffbar in $2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ pktw. auf $\mathbb{R}$, glm auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ & per. Fortsetzung, stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\forall x \neq 2n\pi$: $H'(x) \overset{1.24}{=} -S(x)$, was man auch den Graphen ansieht.

§ 2 POTENZREIHEN

2.1. MOTIVATION (Was sind einfache Fkt?)

Die einfachsten Fkt, die wir kennengelernt haben sind konstante Fkt $f(x) = c \in \mathbb{R}$, lineare Fkt $f(x) = kx + d$, Polynome $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, der Grad von f).

Hoppala: konstante & lineare Funktionen sind ja nur spezielle Polynome ($a_0 = c$, $n = 0$ bzw $a_0 = d$, $a_1 = k$, $n = 1$) nämlich vom Grad 0 bzw. 1.

Also: Die einfachsten Fkt sind Polynome. Aber was sind die nächst einfachen Fkt?

Kennengelernt haben wir etwa exp, sin, cos, die als Reihen gegeben sind [[1] 4.3, [2] 3.17(v)]

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

Wir sehen also, dass diese Funktionen Limiten von Polynomen sind, wobei der Grad n gegen ∞ geht.

In gewisser Weise sind also die nächst einfacheren Fkt nach den Polynomen die Polynome von „unendlichem Grad." Genauer ausgedrückt Funktionenreihen von der Form

(Das ist keine offizielle Terminologie)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

In diesem § werden wir systematisch solche Funktionenreihen – genannt Potenzreihen, offizielle Def unten – studieren.

Dabei ist es natürlich etwas allgemeiner vorzugehen und

(1) komplexe Koeffizienten c_k ($\in \mathbb{C}$, statt $a_k \in \mathbb{R}$) und auch komplexe „Variable" z resp. z^k ($\in \mathbb{C}$ statt $a, a^k \in \mathbb{R}$) zuzulassen und ebenso

vgl. die komplexe Exp-Reihe [Z] 3.11 über die wir erst zu sin & cos gelangt sind

(2) Verschiebungen $(x - x_0)$ bzw. $(z - z_0)$ statt x bzw z um eine fixe reelle x_0 bzw. komplexe Zahl z_0 zu gestatten.

Also kurzum betrachten wir Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad (a_k, x_0 \in \mathbb{R}) \quad \text{bzw}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad (c_k, z_0 \in \mathbb{C})$$

als Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ bzw $z \in \mathbb{C}$ und fragen uns insbesondere nach deren Konvergenz.

Jetzt aber los [und zwar gleich den komplexen Fall, der den reellen Fall ja als Spezialfall beinhaltet].

2.2 DEF (Potenzreihe)

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nennen den Ausdruck $(z \in \mathbb{C})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad \left[\text{kurz nur } \sum c_k(z-z_0)^k\right]$$

eine Potenzreihe mit (Entwicklungs-)Koeffizienten c_k und Entwicklungspunkt z_0.

2.3 BSP (Potenzreihen)

(i) Die komplexe Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $(z \in \mathbb{C})$ aus [2] 3.11 ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $c_k = 1/k!$ und Entwicklungspkt $z_0 = 0$ $\left[(z-0)^k = z^k\right]$.

Bemerke $c_k \in \mathbb{R}$

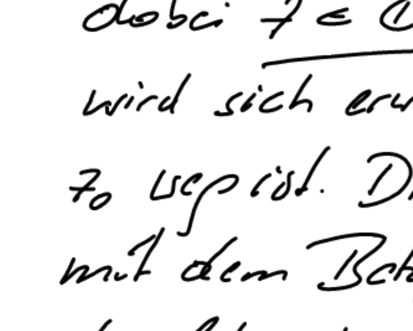
(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine (reelle) Potenzreihe mit Koeffizienten $c_0 = 0$, $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \geq 1)$ und Entwicklungspkt $x_0 = 0$.

2.4 BEM (Nochmal: was wir hier tun)

(i) (Folgen von Polynomen) Im Folgenden werden wir Konvergenzeigenschaften von PR in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ studieren, d.h. wir studieren Folgen von komplexen Polynomfkt $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$.

(ii) (Weiterhin keine Angst vor $\mathbb{C}$) Wir haben es ja schon längere Zeit mit Fkt zu tun, die auf (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ definiert sind. Dieser Tatsache haben wir bisher wenig Aufmerksamkeit schenken müssen.

Jetzt sind wir aber erstmals in der Situation, dass wir uns Fragen nach der Konvergenz der $p_n(z)$ stellen und dabei $z \in \mathbb{C}$ variieren. Als wesentliches Kriterium wird sich erweisen, wie weit z vom Entwicklungspkt z_0 weg ist. Diesen Abstand messen wir natürlich wieder mit dem Betrag in $\mathbb{C}$. Insbesondere verwenden wir die folgende Notation:



$$K_r(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$$

Rand gehört dazu

bezeichnet die abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ um z_0 mit Radius r.

2.5 PROP (Konvergenz von PR – zum Ersten)

Sei $\sum c_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe die im Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiert (d.h. $\sum c_k(z_1-z_0)^k$ konv.) und sei $0 < r < |z_1 - z_0|$, dann gilt

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ konvergiert absolut & gleichmäßig für $z \in K_r(z_0)$ [man sagt auf $K_r(z_0)$]

(ii) Die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}$$ konvergiert ebenfalls abs & glm auf $K_r(z_0)$

Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist das die übliche Ableitung von Polynomen; Polynome auf $\mathbb{C}$ haben wir bisher nicht differenziert; daher „formal"

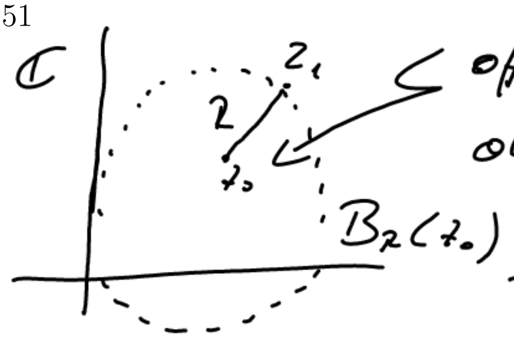
2.6 BEM (Zur Konvergenz von PR)

(i) (Keine Lücken) Prop 2.5(i) besagt, dass falls wir schon wissen, dass die PR im Pkt z_1 konvergiert sie schon auf jeder kleineren abg. Kreisscheibe um z_0 ganz toll konvergiert.

nämlich abs & glm

$K_r(z_0)$'s wo alles perfekt läuft.

(ii) Insbesondere ist eine Potenzreihe in allen Pkten der offenen Kreisscheibe mit $R = |z_1 - z_0|$, d.h. $\forall z \in B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R = |z_1 - z_0|\}$ punktweise konvergent.

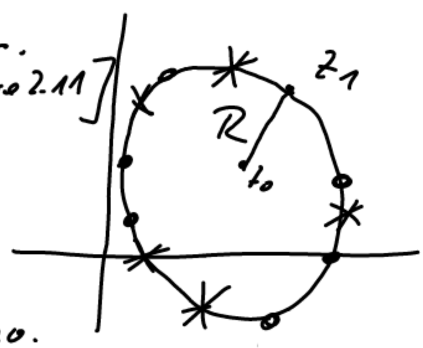


offene Kreisscheibe auf der noch immer alles relativ gut geht

WARNUNG: Glm Konv. auf $B_R(z_0)$ wäre stärker & ist i.a. nicht gegeben

In diesem Sinne gibt es keine „Lücken" in der Konvergenz zwischen z_0 und z_1.

(iii) (Der Rand ist fraglich) Was jedoch auf dem Kreis durch z_1 passiert, kann nicht allgemein beantwortet werden — siehe Bsp unten. [etwa 2.11]
In Punkten z mit $|z-z_0| = |z_1-z_0| = R$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.



z.B.: • Konv.
* Div

(iv) (Stetigkeit der Grenzfkt)

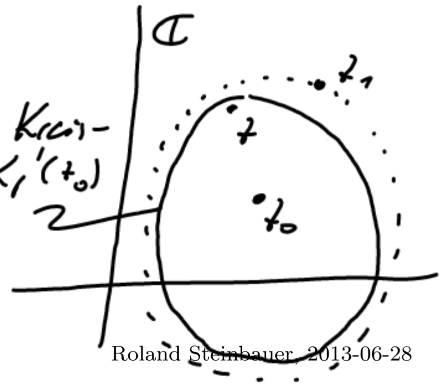
alle z's die näher bei z_0 sind als z_1

Wegen (ii) können wir auf $B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ die Grenzfkt

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

definieren. Diese ist stetig, denn jedes $z \in B_r(z_0)$ liegt in einem abg. Kreis $K_{r'}(z_0)$ ($r' < R$) und dort ist die Konv. ja glm [2.5(i)]. Da die Folgenglieder Polynome [vgl. 2.4(i)] und daher stetig [[2] 1.18, „Baukasten"] sind liefert 1.11 die Stetigkeit von f.

passende Kreisscheibe $K_{r'}(z_0)$



Beweis [Eigentlich nicht zu kompliziert, Anwendung des Konvergenzsatzes von Weierstraß]

(i) Wir setzen $f_n(z) = c_n(z-z_0)^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in K_r(z_0)$).

Dann gilt

$$(*) \quad |f_n(z)| = |c_n||z-z_0|^n = |c_n||z_1-z_0|^n \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n$$

Trick

und $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} \le \frac{r}{|z_1-z_0|} =: \Theta < 1$ [THETA]

weil lt. Voraussetzung $r < |z_1-z_0|$

Lt. Voraussetzung konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1-z_0)^n$

$$\xrightarrow[\text{„Doof-Test"}]{[1]\,4.5} c_n(z_1-z_0)^n \to 0 \Rightarrow \exists M: |c_n||z_1-z_0|^n < M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

$$\xrightarrow[(**)]{(*)} |f_n(z)| \le M\Theta^n \quad \forall z \in K_r(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \|f_n\|_{\infty, K_r(z_0)} = \sup_{z \in K_r(z_0)} |f_n(z)| \le M\Theta^n$$

$$\xRightarrow{[1]\,4.19} \sum \|f_n\|_{\infty, K_r(z_0)} \text{ konvergent}$$

geom. Reihe ist konv. Majorante

$$\xRightarrow[\text{Weierstraß}]{1.17} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert auf } K_r(z_0)$$

absolut & glm

(ii) [Ganz ähnlich zu (i)]

Setze $g_n(z) = c_n n (z-z_0)^{n-1} \quad \left(= f_n'(z)\right)$

$\overset{\text{wie in (i)}}{\Longrightarrow} \quad \|g_n\|_\infty \le n M \Theta^{n-1}$

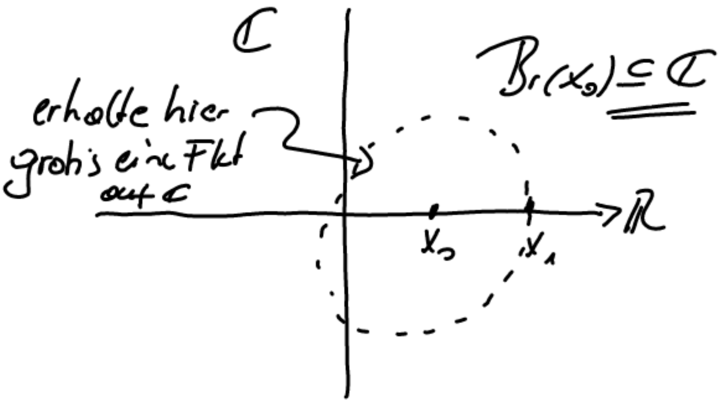
$\overset{\boxed{1}\,4.23}{\Longrightarrow} \quad \sum \|g_n\|_\infty$ konv.

$\overset{1.17}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}} \quad \sum g_n$ konv. abs & glm auf $K_r(z_0)$ □

QT: $\boxed{1}$ 4.23: $\dfrac{(n+1)M\Theta^n}{nM\Theta^{n-1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Theta \longrightarrow \Theta < 1$

2.7 Bem (Fortsetzung ins Komplexe – Funktionentheorie)

Prop 2.5 hat folgende interessante Auswirkung auf reelle PR $\sum a_k(x-x_0)^k$. Ist die PR nämlich in einem reellen Pkt $x_1 \neq x_0$ konvergent, so konvergiert sie auch schon auf einer ganzen Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. So



können reelle Fkt, die durch Potenzreihen dargestellt werden ins Komplexe fortgesetzt werden. In diesem Sinne ist die komplexe Exponentialfkt die Fortsetzung der reellen Expfkt nach $\mathbb{C}$ [vgl. $\boxed{2}$ 3.13]; genauer

$$\exp(x) = \sum \frac{x^k}{k!} \text{ konv. } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(z) := \sum \frac{z^k}{k!} \text{ konv } \forall z \in \mathbb{C}$$

Das systematische Studium der durch Potenzreihen darstellbaren Fkt – der sogenannten analytischen Fkt – ist ein Hauptthema der komplexen Analysis, die auch Funktionentheorie genannt wird.

2.8 Motivation (Größter Konvergenzkreis)

Prop 2.5 hat den „Schönheitsfehler", dass man zuerst wissen muß, dass in einem bestimmten Pkt z_1 Konvergenz vorliegt, um irgendwelche Schlüsse ziehen zu können. Das führt auf die Frage, ob wir nicht gleich einen maximalen Konvergenzkreis finden können.

Wir werden zunächst diesen „Konvergenzradius" definieren und Prop 2.5 mit seiner Hilfe umformulieren. Dann kümmern wir uns darum, wie man den Konvergenzradius praktisch berechnen kann.

2.9 DEF (Konvergenzradius)

Für eine Potenzreihe $\sum c_k(z-z_0)^k$ definieren wir den Konvergenzradius R als

$$R := \sup\{r \in [0,\infty) : \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \text{ konv. in } K_r(z_0)}\}.$$

2.10 Prop (Konvergenz von PR - zum Zweiten)

Sei R der Konvergenzradius der PR $\sum c_k(z-z_0)^k$. Dann gilt

(i) Ist $R=0$, dann konvergiert die PR nur im Pkt z_0

(ii) Ist $R=\infty$, dann konvergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ und die Konvergenz ist glm auf jeder abg. Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit $0<r<\infty$

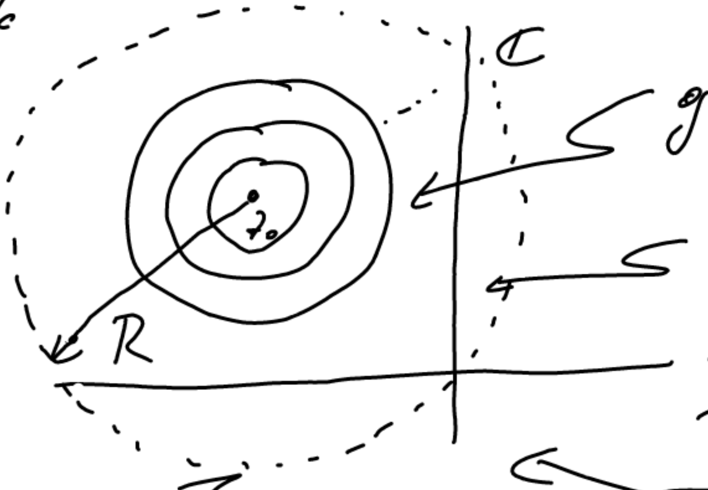
[Sie konvergiert i.A. nicht glm auf $\mathbb{C}$!]

(iii) Gilt $0<R<\infty$, dann

- konvergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$ und die Konvergenz ist abs. & glm. auf jeder abg. Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit $0<r<R$
- divergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$

[Für „Randpkte" z mit $|z-z_0|=R$ ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich.]

Der interessante Fall (iii) graphisch:



glm Konv. auf allen kleineren abg. Kreisscheibe

pktw. Konv. auf der offenen Kreisscheibe $B_R(z_0)$

Divergenz außerhalb von $K_R(z_0)$

? auf $S_R(z_0)=\{z : |z-z_0|=R\}$ i.A. keine Aussage möglich

Beweis. [Im Wesentlichen Umformulierung von 2.5]

(i) Klar nach Def von R

(ii) Klar wegen 2.5 & 2.6 [Weil $R=\infty$ kann für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein passendes z_1 mit $|z-z_0|<|z-z_1|$ gewählt werden, sodass in z_1 Konvergenz vorliegt; dann wende 2.5 an]

(iii) • Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$

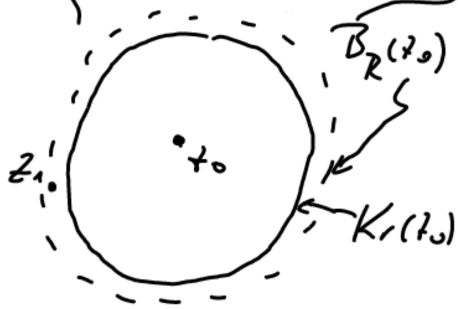
$\Longrightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<|z_1-z_0|<R$

$\overset{2.9}{\Longrightarrow}$ PR konv in z_1

$\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ PR konv in z

Es kann immer ein z_1 gefunden werden, das näher bei $S_R(z_0)$ liegt

• Sei $0<r<R$



$\Longrightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$ $r<|z_1-z_0|<R$

$\overset{2.9}{\Longrightarrow}$ PR konv in z_1

$\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ PR konv. glm auf $K_r(z_0)$

• Sei schließlich $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$

$\Longrightarrow$ PR konv. nicht in z, denn sonst Wid zur Def von R

[genauer: ang PR konv in $z \overset{2.5.}{\Longrightarrow}$ PR konv auf $K_r(z_0)$ $\forall r<|z-z_0|$. Insbes $\exists r$ mit $R<r<|z-z_0|$ und PR konv auf $K_r(z_0)$ ↯ zur Def von R]

2.11 BSP (Konvergenzradius – aus der Def)

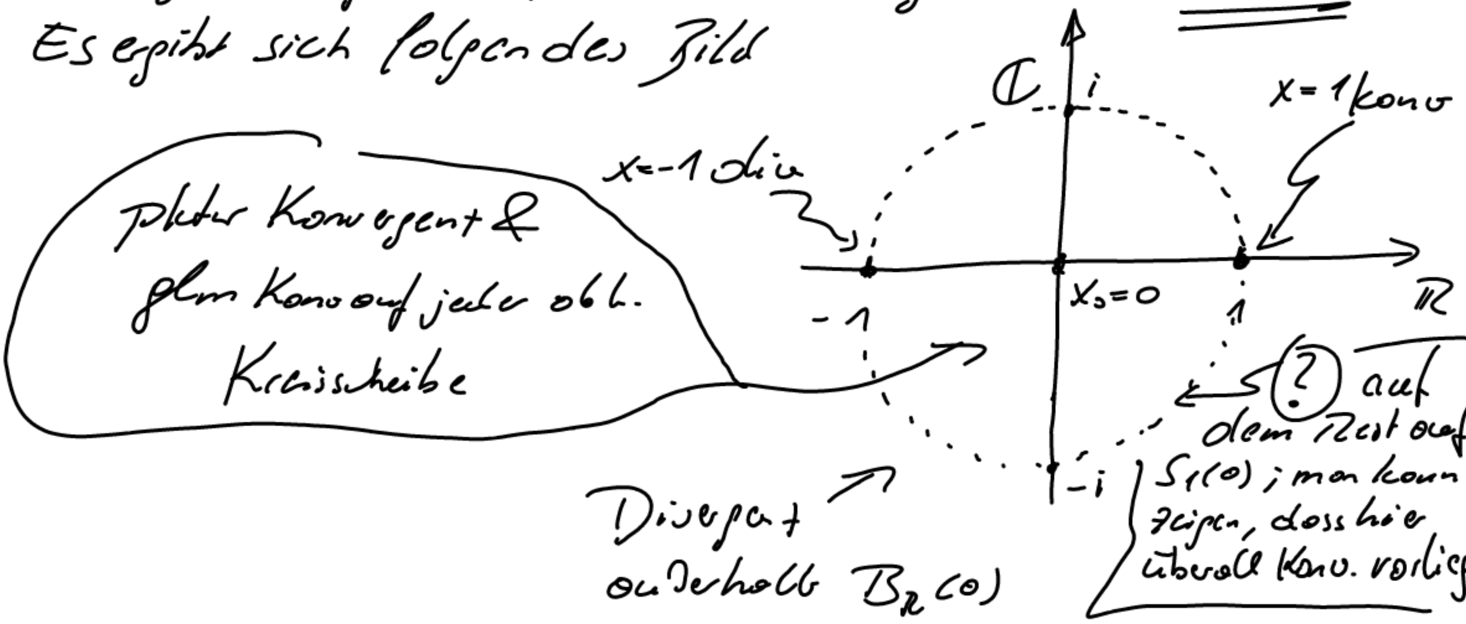
Wir betrachten die PR aus 2.3(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Für $x=1$ erhalten wir die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, also die alternierende harm. Reihe, also konv.

$\Longrightarrow R \geq 1$

Für $x=-1$ erhalten wir die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum \frac{1}{n}$,
die divergiert [harm. Reihe [1] 4.7(ii)] $\Rightarrow R \leq 1$

Also gilt insgesamt für den Konvergenzradius $\boxed{R=1}$
Es ergibt sich folgendes Bild



Hier war es relativ mühsam R zu bestimmen. Abhilfe schafft die folgende Prop [vgl. 2.8]

2.12 PROP (Berechnung des Konvergenzradius)

Sei R der Konvergenzradius der PR $\sum c_k(z-z_0)^k$.

(i) Es gilt (die Formel von Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n},$$

limsup (a_n) ist der größte HW von a_n; siehe [1] Def 3.13

wobei wir $R=0$ setzen, falls limsup $=\infty$ und $R=\infty$, falls limsup $=0$

(ii) Falls $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ konvergiert, dann gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Beweis Wir schreiben $\sum c_n (z-z_0)^n = \sum a_n$, also $a_n = c_n (z-z_0)^n$.

(i) [Anwendung des WT [1] 4.21] Es gilt $|a_n|^{1/n} = |c_n|^{1/n} |z-z_0|$

Sei nun $L = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \in (0,\infty)$ (unabhängig von n!)

Wir zeigen

(1) $1/L \le R$: Sei $|z-z_0| \le r < 1/L$

$$\Rightarrow \limsup |a_n|^{1/n} = L\,|z-z_0| \le L\cdot r < 1$$

$\Rightarrow |a_n|^{1/n} < 1$ für fast alle n

$\overset{WT}{\Longrightarrow} \sum a_n$ konv $\Rightarrow 1/L \le R$

(2) $1/L \ge R$: Sei $|z-z_0| \ge c/L$ mit $c > 1$

$$\Rightarrow \limsup |a_n|^{1/n} = L\,|z-z_0| \ge c > 1$$

$\Rightarrow |a_n|^{1/n} \ge 1$ für unendlich viele n

$\overset{WT}{\Longrightarrow} \sum a_n$ divergiert $\underset{c>1 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} R \le 1/L$

Also gilt $R = 1/L$ falls $0 < R < \infty$. In den Grenzfällen gilt: $L = 0$: setze in (1) $r > 0$ beliebig $\Rightarrow R = \infty$

$L = \infty$: setze in (2) $|z-z_0| \ge \varepsilon > 0$ beliebig

$\Rightarrow R = 0$

(ii) [Anwendung des QT [1] 4.23]

Sei $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ dann liefert der QT

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|c_n (z-z_0)^n|} = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z-z_0| \to \frac{|z-z_0|}{\rho} \quad (n\to\infty)$$

also Konv. falls $|z-z_0| < \rho$; Div., falls $|z-z_0| > \rho \Rightarrow R = \rho$

2.13 Bsp (Konvergenzradius)

(i) nochmals 2.3(iii) also $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Wir wissen aus 2.9, dass $R = 1$, wollen das aber nochmals mittels 2.12 berechnen.

Hadamard: $|c_n|^{1/n} = \left|\frac{1}{n}\right|^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$ [UE, Blatt 3 Nr. $\boxed{7}$]

QT: $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ (reelle PR mit $x_0 = 0$, $a_n = n!$) Es gilt

$$R = \lim \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

und die Reihe konvergiert nur im Nullpkt [(i) in 2.10]

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ also die Cosinusreihe [$\boxed{2}$ 3.17(v)] und

es gilt $x_0 = 0$, $c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & n \text{ gerade} \end{cases}$

ACHTUNG

Wir wissen schon aus [1] 3.17, dass diese Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert also gilt $R = \infty$.
Daher liefert uns die Hadamard-Formel

$$0 = \limsup |c_n|^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{n!} \to \infty.$$

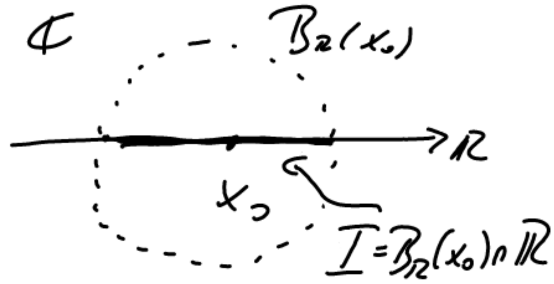
(iv) Siehe [UE, Blatt 13 $\boxed{14}$, $\boxed{15}$]

nette Grenzwert, hatten wir noch nicht

2.14 Motivation (PR im Reellen).

Wenn alle Koeffizienten und der Entwicklungspunkt einer PR reell sind [$c_k = a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$], dann definiert sie auf dem Durchschnitt ihres Konvergenzkreises $B_R(x_0)$ mit $\mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

Wir werden gleich sehen, dass es sich dabei um besonders schöne Fkt handelt – nämlich beliebig oft differenzierbare Fkt. Außerdem „dürfen" diese PR gliedweise differenziert und integriert werden [vgl. UE, Blatt 10/5]], d.h. die gliedweise differenzierte / integrierte Reihe konvergiert gegen die Ableitung / das Integral der Grenzfkt.



d.h. $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k$

2.15 Prop (reelle PR)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ eine reelle PR mit Konv.radius R. Wir setzen $I := (x_0-R, x_0+R)$ und $f: I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k .$$

Dann gilt

$f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(i) f ist beliebig oft differenzierbar; wir schreiben $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I,\mathbb{R})$

(ii) Für alle $x \in I$ gilt $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$

(iii) Für alle $a, b \in I$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b$

Beweis [nur Einsammeln früherer Resultate]

(i)+(ii): $\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ $\forall\, 0<r<R$ ist die PR & die gliedweise differenzierte PR auf $[x_0-r, x_0+r]$ glm konv.

$\overset{1.24}{\Longrightarrow}$ f ist $\mathcal{C}^1$ und die Formel in (ii) gilt.

Wende nun sukzessive dieselbe Argumentation auf $f', f'', f^{(3)}$ usw an $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

(iii): Folgt sofort aus 2.5 & 1.20

[2.5 $\Rightarrow$ PR konv. glm auf jedem $[a,b]$, $a,b \in I$

1.20 $\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^\infty a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b a_n (x-x_0)^n \, dx$]

$\square$

2.16 BSP (Wiedereinmal sin & cos)

(i) $\cos(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ [[2] 3.17(v), bzw 2.13(iii)]

$$2.15 \Rightarrow \underline{\cos'(x)} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{2k\, x^{2k-1}}{(2k)!}$$

$$\overset{[\ell = k-1]}{=} -\sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \overset{[2]\,3.17(v)}{=} \underline{-\sin(x)}$$

Also die gliedweise differenzierte Cosinus-Reihe gibt tatsächlich die Sinus-Reihe ☺

(ii) [UE, Blatt 19 [5]]

2.17 Rückblick & Ausblick.

Wir haben also tatsächlich das Versprechen aus 1.25 eingelöst: Vertauschen von Limes & Abl bzw. Integral funktioniert für Potenzreihen perfekt. Darüberhinaus passen sich diese Resultate gut in unser bisheriges Wissen ein [vgl. 2.16].

Insgesamt haben wir gesehen, dass (reelle) PR sehr schöne Fkt ergeben. Im nächsten § drehen wir den Spieß um und versuchen eine gegebene (schöne) Fkt in eine PR zu entwickeln, sprich sie durch Polynomfunktionen anzunähern.

§ 3 DER SATZ VON TAYLOR

3.1 MOTIVATION (Rekonstruktion einer Fkt aus ihren Abl. an einem Pkt)

In §2 haben wir gesehen, dass PR sehr gut handhabbar sind und die Approximation von Fkt durch Polynome formalisieren. Hier wollen wir nun eine gegebene glatte Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ in eine PR entwickeln - sprich approximierende Polynome finden. Dazu sei $x_0 \in I$. Wir ziehen den HsDI als Werkzeug heran.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f'(t)}_{= -\left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t)} dt \quad [\text{TRICK!?}]$$

$$= f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t)\, dt$$

$$\overset{\text{partielle Integr.}}{=} f(x_0) - (x-t) f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt$$

$$= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Tangente in } (x_0, f(x_0)) \\ \hat{=} \text{ Polynom vom Grad } 1}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt}_{\substack{\text{„Rest" ab Integral} \\ \text{wegen lin. Bestapprox.} \\ \text{hoffentlich gut abschätzbar}}}$$

Das ist also eine gewünschte Darstellung der Form $f(x) =$ Polynom vom Grad 1 + Rest. Wir können nun aber noch weitermachen und im Restterm nochmals part.-integrieren:

Trick zum Zweiten

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)\, f''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{d}{dt}(x-t)^2\right) f''(t)\,dt$$

f' $\int$

part. Int

$$= -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} f''(t)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

Also insgesamt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x}^{x_0}(x-t)^2 f'''(t)\,dt}_{\text{Rest in Integralform}}$$

Das ist nun eine Darstellung f = Polynom vom Grad 2 + Rest.
Natürlich können wir induktiv weitermachen und erhalten:

3.2 PROP (Taylorformel – zum Ersten)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Fkt und sei $x_0 \in I$ beliebig.
Dann gilt für alle $x \in I$ die Taylor-Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

Polynom vom Grad n mit Koeff gegeben durch die Ableitungen von f in x_0

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

„Rest“

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Beweis. Wir verwenden die Notation $T_n[f,x_0](x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.
Damit ist zu zeigen, dass $(n\in\mathbb{N})$

$$f(x)=T_n[f,x_0](x)+R_{n+1}(x) .$$

Induktion nach n: Den Induktionsanfang für $n=0$ bzw $n=1,2$ erledigt 3.1.

$n-1\mapsto n$: Wir nehmen an, dass $f(x)=T_{n-1}[f,x_0](x)+R_n(x)$ gilt. Wir integrieren den Restterm $R_n(x)$ partiell. Es gilt

$$R_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{=-\frac{1}{n}\frac{d}{dt}(x-t)^n}f^{(n)}(t)\,dt$$

Trick zum Dritten bzw n-ten

$$=-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Wir machen obige Bezeichnung offiziell

3.3 DEF (Taylor-Polynom & Taylor-Reihe)
Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Fkt und sei $x_0\in I$ beliebig.

(i) Für $m\le n$ definieren wir das Taylor-Polynom der Ordnung m von f im Pkt x_0 als

$$\boxed{T_m[f,x_0](x):=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

(ii) Falls f glatt ist, definieren wir die Taylor-Reihe von f im Pkt x_0 als

$$\boxed{T[f,x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

und zwar unabhängig davon, ob $T[f,x_0](x)$ konvergiert oder nicht.

3.4 BEOBACHTUNG (Taylorreihe ist PR)

Offensichtlich ist eine Taylorreihe eine PR und somit gilt für die Konvergenz von TR alles, was wir in §2 über die Konv. von PR herausgefunden haben.

3.5 BSP (Die Taylor-Reihe für exp)

(i) Wir betrachten $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$. Es gilt $f^{(k)}(x)=e^x$ und daher

$$T_n[\exp,0](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} e^0 (x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$T[\exp,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

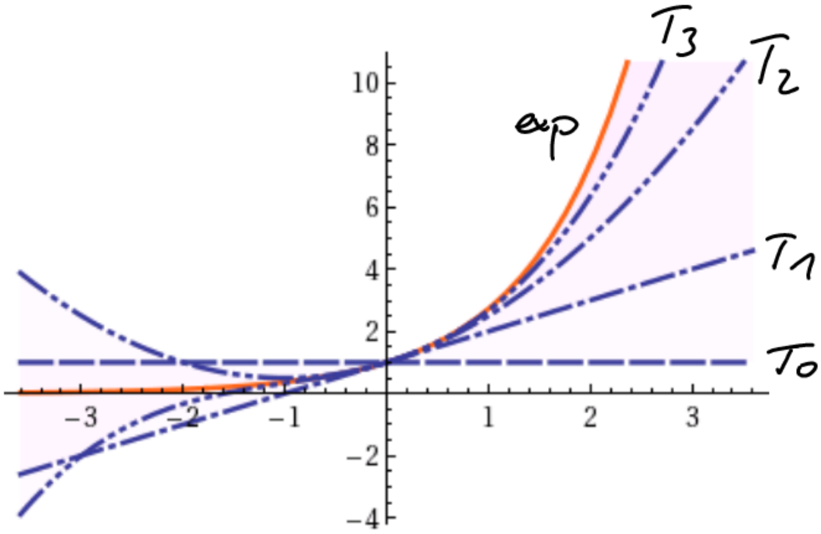
Die Taylor-Reihe für exp in $x=0$ ist also gerade die Exponentialreihe. Wegen [2] 4.36 gilt

$$T_n[f,0](x) \to \exp(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$T_n[f,0]$ konv. also auf ganz $\mathbb{R}$ pktw gegen exp. Daher ist der Konvergenzradius $R=\infty$ und wegen 2.10(ii) ist die Konv. sogar glm. auf jedem abg Intervall $[-m,m]$ $(0<m<\infty)$ [1.9, 1.18]

(ii) Wir erhalten also genau das Bild aus 1.1(iv) – allerdings mit der zusätzlichen Information, wie wir die approximierenden Polynome aus f berechnen können.

$T_0[\exp, 0](x) = 1$
$T_1[\exp, 0](x) = 1 + x$
$T_2[\exp, 0](x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
usw.



3.6 MOTIVATION (Konvergenz der Taylor-Reihe)

(i) Im obigen Bsp ist die Taylorreihe eine gute Approximation für die ursprüngliche Fkt $f = \exp$. Ihre Vorzüge sind, dass

(1) die approximierenden Fkt $T_n[f, x_0]$ Polynome – also die einfachsten Fkt sind

(2) Die approximierenden Fkt $T_n[f, x_0]$ ganz leicht und explizit aus f berechnet werden können – mittels der Ableitungen von f an dem einzigen Pkt x_0.

(3) Die Taylorreihe $T[f, x_0]$ ob PR gute Konvergenzeigenschaften aufweist.

(ii) Damit sind aber noch immer wichtige Fragen bzgl der Konv. von TR offen, nämlich

(1) Konvergiert die TR immer (außer natürlich in x_0), d.h. ist ihr KR $R > 0$?

(2) Falls die TR $T_n[f, x_0]$ überhaupt konvergiert, konvergiert sie dann auch gegen f? Diese Frage ist (offensichtlich vgl. 3.2) äquivalent zur Frage, ob das Restglied R_n gegen 0 konvergiert.

Um diese Fragen besser untersuchen zu können, geben wir eine alternative Form des Restglieds an.

3.7 KOR (Lagrange-Form des Restglieds)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{n+1}$-Fkt und sei $x_0 \in I$. Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x) \quad \text{und}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>Beweis</u>. [Anwenden des MWS-$\int$ auf die Integralform des Restglieds $R_{n+1}(x)$ in 3.2]

Wegen [4] 1.22 $\exists \xi \in [x_0, x]$ mit:

$$R_{n+1}(x) \overset{3.2}{=} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{} f^{(n+1)}(t)\,dt \overset{[4]\,1.22}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt$$

$[\geq 0! \Rightarrow [4]\ 1.22 \text{ anwendbar}]$

$$\overset{INT}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\, -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\square$

[Jetzt fällt uns das Hauptresultat des § in den Schoß]

3.8 THM (Taylor) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ glatt und sei $x_0 \in I$.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei für das Restglied gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

für ein $\xi \in [x_0, x]$.

(ii) Für $x \in I$ konvergiert die Taylor-Reihe $T[f, x_0](x)$ gegen $f(x)$ d.h.

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-x_0)^k$$

genau dann, wenn $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ gilt

3.9 BSP (Exponentialreihe-Restgliedabschätzung)

Wir wissen schon aus 3.5 dass, $T_n[\exp, 0](x) \to \exp(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Daher muß $R_n(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten. Das läßt sich direkt verifizieren

$$R_n(x) = \exp(\xi) \frac{x^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

3.10 BSP (Reihenentwicklung des Logarithmus) [vgl. UE 1812]

log(x) um $x_0=0$ zu entwickeln ist offensichtlich keine gute Idee – daher log(1+x)

Wir betrachten $f(x)=\log(1+x)$, $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ und entwickeln um $x_0=0$.

Es gilt

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

induktiv ergibt sich $\underbrace{f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}}$ $(n\geq 1)$

Damit erhalten wir $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)/k! = (-1)^{k-1}/k$ und daher

$$T[f,0](x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

Diese Reihe sind wir schon in §2 begegnet und haben in 2.11 und 2.13(i) den KR $R=1$ berechnet, wobei in $x=-1$ Divergenz und in $x=1$ Konvergenz vorliegt.

Um zu überprüfen, ob $T[f,0]$ auch gegen $f=\log(1+.)$ konvergiert müssen wir das Restglied abschätzen.
Zunächst betrachten wir den Fall $\underline{0<x\leq 1}$ und somit $0\leq\xi<x$

$$|\underline{R_n(x)}|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\underbrace{(1+\xi)^n}_{\geq 1}}x^n\right|\leq\frac{|x|^n}{n}\leq\frac{1}{n}\underline{\to 0}\ (n\to\infty)$$

Für $-1<x<0$ und somit $-1<x\leq\xi\leq 0$

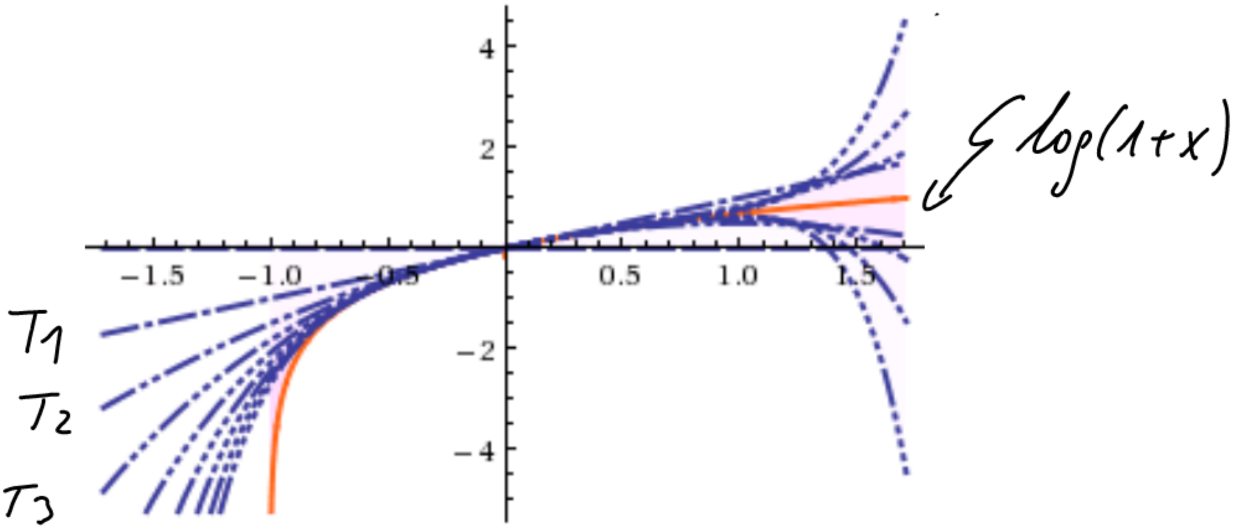
$$|\underline{R_n(x)}|\leq\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^n\right|\leq\frac{1}{n}\underline{\to 0}\ (n\to 0)$$

$$|\ |\leq|x/1+x|\leq 1$$

Insgesamt erhalten wir also für $-1 < x \le 1$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Speziell für $x=1$ ergibt sich $\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$



(order n approximation shown with n dots)

Schließlich können wir auf diese Weise auch $\log(y)$ für $y > 2$ berechnen. Dazu wähle $0 < x < 1$ und $r > 1$ sodass $y = (1+x)^r$. Dann gilt $\log(y) = r \log(1+x)$.

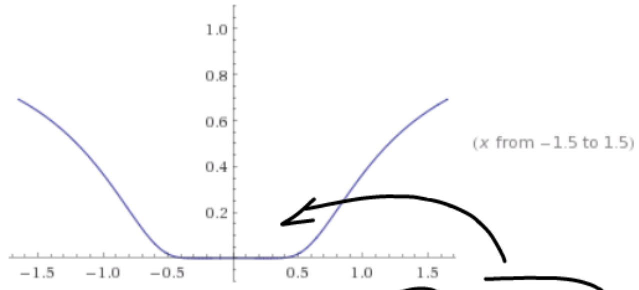
3.11 WARNUNG (Fehlverhalten der Taylorreihe)

(i) Eine Taylorreihe muss außer im Entwicklungspkt x_0 garnicht konvergieren; das entspricht einem KR $R=0$ [vgl. 2.10 (i)]

(ii) Selbst falls die TR konvergiert, muss sie nicht gegen die ursprüngliche Fkt konvergieren, wie das folgende Bsp zeigt

3.12 Bsp ($\exp(-1/x^2)$) Wir betrachten die Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



sehr flach bei $x=0$

Wir zeigen zunächst $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0)=0\ \forall k\in\mathbb{N}$

Wir zeigen mittels Induktion, dass $f\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})\ \forall n$ und $f^{(n)}(0)=0$. Dazu behaupten wir:

$$\exists \text{ Polynom } p_n \text{ sodass } f^{(n)}(x)=\begin{cases} p_n(1/x)\,e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \qquad (*)$$

Daraus folgt dann die Aussage, denn $p_n(1/x)e^{-1/x^2} \underset{y:=\frac{1}{x}}{=} p_n(y)/e^{y^2}\to 0$ [[2] 3.8(ii)].

Für $n=0$ ist $(*)$ erfüllt [mit $p_0=1$]

$n\mapsto n+1$. Sei $x\neq 0$, dann gilt

$$f^{(n+1)}(x)\overset{\text{I.V.}}{=}\left(p_n(1/x)\,e^{-1/x^2}\right)'$$

$$\overset{KR}{=} p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)e^{-1/x^2}+p_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2}$$

$$=\left(p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)+p_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2}=:p_{n+1}\left(\tfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

Damit gilt nun $T[f,0](x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

was natürlich $\forall x\in\mathbb{R}$ konvergent ist, aber

$$T[f,0](x)\neq f(x) \quad \text{für } x\neq 0$$

FAZIT: f ist bei 0 so flach, dass $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$ und daher verschwindet die Taylorreihe – nicht aber die Fkt

3.13 Bsp (Die Binomialreihe) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Wir betrachten

$$\left\{\begin{array}{l} f: (-1,1) \to \mathbb{R} \\ f(x) = (1+x)^\alpha \end{array}\right.$$ und entwickeln nach Taylor in $x_0 = 0$

- Es gilt $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ $(k\in\mathbb{N})$, daher gilt $f^{(k)}(0)/k! = \binom{\alpha}{k}$ und somit für die TR

$$\boxed{T[f,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$$

- Die Reihe konvergiert $\forall\, |x|<1$ absolut wegen QT

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|}_{\to 1} |x| \to |x| < 1$$

- Die TR konvergiert auch gegen f falls $|x|<1$, denn
  - für $0 \le x < 1$ gilt mit $\xi \in [0,x]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = \binom{\alpha}{n} (1+\xi)^{\alpha-n} x^n$$

Falls nun n so groß, dass $\alpha - n < 0 \Rightarrow (1+\xi)^{\alpha-n} < 1$

Weil $T[f,0](x)$ abs konv $\Rightarrow \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \to 0$ [Nullf-Test]

$$\Longrightarrow |R_n(x)| \le \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \to 0$$

  - für $-1 < x < 0$ verwenden wir die Integralform von R_n und erhalten (subst $t \mapsto -t$)

$$R_n(x) = n\binom{\alpha}{n} \int_0^{|x|} (x+t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n}\, dt$$

Nun gilt für $0<x$, $0\le t\le |x|<1$

$$|x+t| = |x| - t \le |x| - |x|t = |x|(1-t) \qquad (*)$$

und

$$n\binom{\alpha}{n} = n\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 2} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} \qquad (**)$$

Damit also

$$|R_n(x)| \overset{(*)}{\le} \left|n\binom{\alpha}{n}\right| |x|^{n-1}\int_0^{|x|}(1-t)^{n-1}(1+t)^{\alpha-n}\,dt$$

$$\overset{(**)}{=} \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}\right| |x|^{n-1}\int_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$= \underbrace{|\alpha|\int_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}\,dt}_{\text{unabhängig von } n}\ \underbrace{\left|\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right|}_{\to 0\ (n\to\infty)}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (|x|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})}$$

3.16 Motivation (Taylor & Theorie)

Nach diesen praktischen & praktisch wichtigen Bsp [viele weitere in den UE] verwenden wir den Satz v. Taylor auch als Werkzeug um die Theorie weiter zu entwickeln. Konkreter ermitteln wir ein einfaches Werkzeug um Polynome zu entlarven und widmen uns schließlich der Frage nach dem Zusammenhang von PR und TR.

3.15 BEM (Polynome & verschwindende Ableitungen)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, d.h. $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Dann gilt $f^{(n+1)}(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
[Mittels leichter Induktion $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k}$ falls $n\leq k$ also insbes. $(x^n)^{(n)}=n!$ und $(x^n)^{(n+1)}=0$ vgl. auch UE, Blatt 12 [8]]

Polynome haben also die Eigenschaft, dass eine und damit alle Ableitung ab einer gewissen Ordnung verschwinden.

Umgekehrt, falls eine Fkt $f\in\mathcal{C}^\infty$ diese Eigenschaft besitzt, dann muss f schon ein Polynom gewesen sein — das ist eine Konsequenz des Satzes von Taylor wie wir gleich sehen werden.

Zusammengefasst gilt also für $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$f \text{ Polynom} \iff \exists k \text{ mit } f^{(k)}(x)=0 \ \forall x$$

3.16 KOR (Fkt mit verschw. Abl. sind Polynome)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal diffbare Fkt. Falls $f^{(n+1)}(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

Beweis: $f^{(n+1)}=0 \Rightarrow f^{(n+1)}$ stetig $\Rightarrow f\in\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$
und wir können 3.2 verwenden; $f^{(n+1)}=0 \Rightarrow R_{n+1}=0$
$\overset{3.2}{\Longrightarrow} f(x)=T_n[f,0](x)$ ein Polynom. $\square$

3.17 MOTIVATION (Welche Fkt haben eine Taylorentwicklung ?)

Sei f eine glatte Fkt auf $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach 3.2 besitzt dann f eine Taylorreihe $T[f, x_0]$.
Diese muss aber außerhalb von x_0 nicht konvergieren und selbst wenn $T_n[f, x_0](x)$ konvergiert, ist nicht gesagt, dass $T_n[f, x_0](x) \to f(x)$ gilt [vgl. 3.11, 3.12]

z.B. ist $f(x) = e^{-1/x^2}$ (mit 0 in $x=0$ ergänzt) eine $\mathcal{C}^\infty$-Fkt, die nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird – man sagt auch f hat keine Taylorsche Entwicklung.

Es stellt sich nun die Frage, welche Funktionen eine Taylorsche Entwicklung haben. (Es können nicht alle $\mathcal{C}^\infty$-Fkt sein!)
Eine endgültige Antwort auf diese Frage ist erst im Rahmen der komplexen Analysis möglich. An dieser Stelle können wir aber festhalten, dass die Summenfkt von PR (diese sind ja nach 2.15(i) $\mathcal{C}^\infty$) eine Taylorsche Entwicklung haben – und zwar gerade die PR durch die sie definiert werden, genauer

3.18 KOR (PR sind ihre eigenen TR)

Sei $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0} a_k (x - x_0)^k$ durch eine reelle PR [$x_0, a_k \in \mathbb{R}$] mit Konvergenzradius R gegeben.
Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

3.19 BEM (zur Bedeutung von 3.18)

Die etwas sperrige Aussage von 3.18 bedeutet insbesondere

(i) Falls f nicht nur eine beliebige $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist, sondern sogar die Summenfkt einer Potenzreihe, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

dann konvergiert die TR von f gegen f – weil nach 3.18 die TR ja genau die PR ist.

(ii) Die Koeffizienten einer PR sind eindeutig bestimmt; genauer gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, dann gilt laut 3.18 für die a_k

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

[Diese Aussage bzw genauer: Seien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ zwei PR mit pos KR und $f(x) = g(x)$ für $|x-x_0| < \alpha$ für ein geeignetes α. Dann gilt $a_k = b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. wird oft als <u>Identitätssatz für PR</u> bezeichnet.]

<u>Beweis</u>. 2.15(i) $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^\infty((x_0-R, x_0+R))$ und sukzessives Anwenden der Ableitungsformel 2.15(ii) liefert

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\, k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}.$$

Für $x = x_0$ folgt

$$\underline{f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!} \qquad \square$$

STATT §4: FOURIER-REIHEN IN ALLER KÜRZE

(1) Was sind und was sollen FR?

[Grundthema von Kap. 15]

Approximation (schöner) Fkt durch (einfache) Bausteine.

TR: glatte Fkt durch Polynome

FR: periodische Fkt durch trigonometrische Polynome

$f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x$ — Periodenlänge egal — 2π bequem

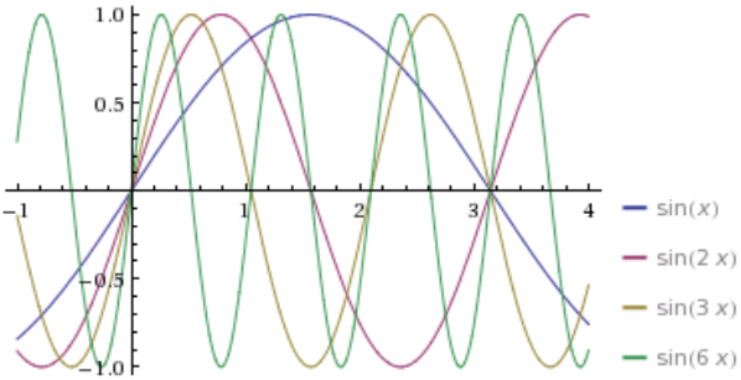
Grund- & Oberschwingungen

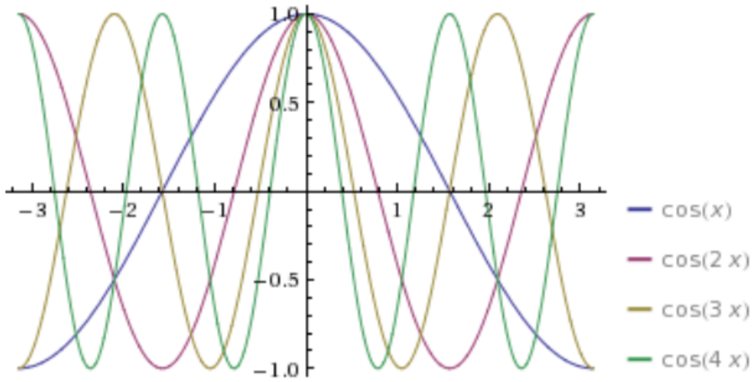
FR sind Grundlage der FOURIER-ANALYSIS

viele Anwendungen (Elektrotechnik, Musik, Medizin)
wichtige theoretische Konzepte im Rahmen der FUNKTIONALANALYSIS (Harmonische Analysis, Zeit-Frequenz Analysis)

Grundthema: Zerlegen periodischer „Signale" in „Frequenzanteile"
bzw. Annähern periodischer „Signale" durch einfache „Frequenzbausteine" bei vertretbarem Fehler

(2) Die Grundbausteine: Die einfachsten 2π-periodischen Fkt sind: $\sin$ & $\cos$; $\sin(kx)$, $\cos(kx)$





Kombinationen davon heißen trigonometrische Polynome

bequeme Konvention

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

Beobachtung: Die Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ können aus p_n zurückgewonnen werden – genauer gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_n(x)\cos(kx)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_n(x)\sin(kx)\,dx \quad (*)$$

$$\Big[\int_0^{2\pi} p_n(x)\sin(kx)\,dx = \int_0^{2\pi}\Big[a_0/2 + \sum_{\ell=1}^{n}\big(a_\ell\cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)\big)\Big]\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx + \sum a_\ell \int_0^{2\pi}\cos(\ell x)\sin(kx)\,dx$$

$$+ \sum b_\ell \int_0^{2\pi}\sin(\ell x)\sin(kx)\,dx$$

$$\overset{\text{part. Int}}{=} [\cdots] = 0 + 0 + b_k\pi \Big]$$

Die Formeln in $(*)$ kitzeln die resp. Frequenzanteile aus p_n heraus. Die Kernidee ist es, dasselbe bei allgemeinen 2π-periodischen, int'baren Fkt (für diese ist $(*)$ sinnvoll) zu versuchen; daher die folgende

(3) DEF (FR) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periodisch & R-intbar auf $[0,2\pi]$. Wir definieren

(i) die Fourier-Koeffizienten von f durch

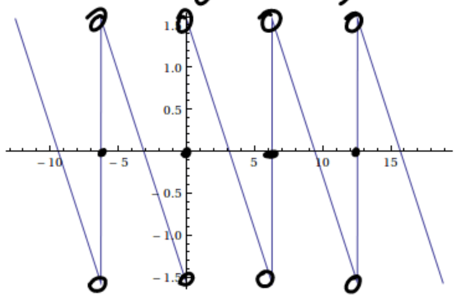
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

(ii) die Fourier-Reihe von f (unabhängig von Konvergenzfragen)

$$\mathcal{F}[f](x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)$$

(4) BSP (Sägezahn & Haifischzahn – ein Deja-vu)

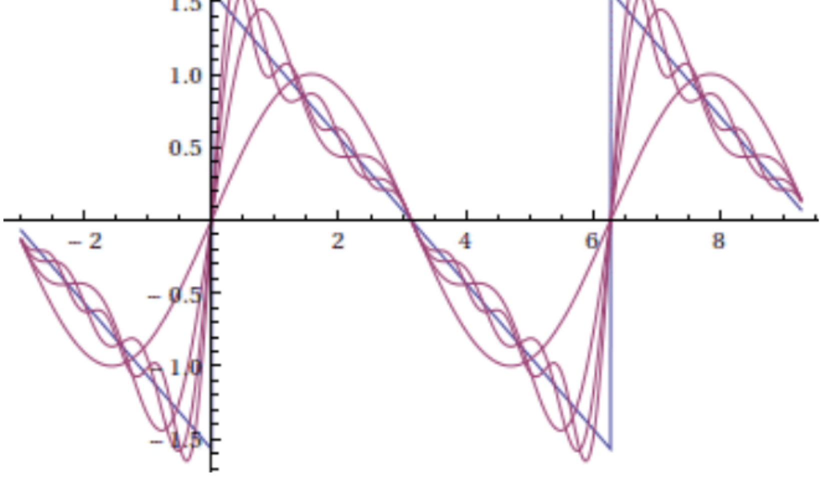
(i) Sei $s(x):=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2} & 0<x<2\pi\\ 0 & x=0\end{cases}$



periodisch fortgesetzt. Dann gilt

$$\mathcal{F}[s](x)=\underbrace{[\ldots]}_{\text{Routine-Rechnung}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$$

$a_k=0\ \forall k$
$b_k=1/k$



Das ist genau die Reihe (S) aus §7; wissen

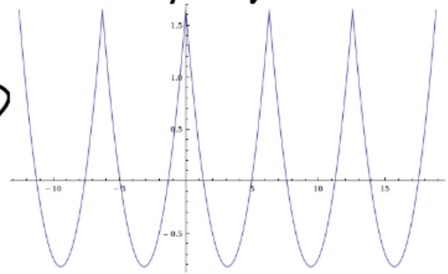
$$\mathcal{F}[s](x)\to s(x)$$

pktw $\forall x\in\mathbb{R}$ & glm auf $[\delta,2\pi-\delta]$ $(\delta>0)$

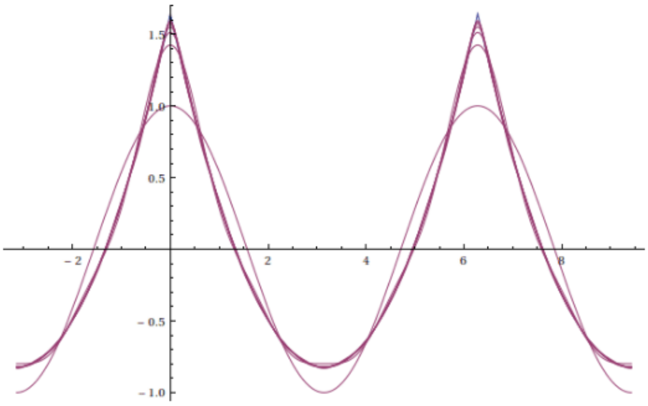
(ii) Sei $h(x)=\frac{(x-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}$ $(x\in[0,2\pi])$ periodisch fortgesetzt.

Dann gilt

$$\boxed{F[h](x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}}$$



Das ist genau die Reihe (H) aus §1 & und wir wissen $F[h]\to h$ glm auf $[0,2\pi]$.



(5) <u>Konvergenzfragen</u>. Die Bsp in (4) weisen darauf hin, dass weder glm noch pktw Konvergenz der „angemessene" Begriff für FR ist.

[Im Fall (S) ist die Konvergenz nicht glm & die pktw Konvergenz in <u>allen</u> x ist der Def von s – genauer $s(0)=0$ – geschuldet: Definiert man stattdessen $s(0)=a\neq 0$ so ändert sich die FR <u>nicht</u> – die Integrale „spüren" das garnicht & bleiben gleich – und die pktw Konvergenz ist zerstört?]

Es <u>stellt</u> sich <u>heraus</u>, dass <u>der</u> „<u>richtige</u>" Begriff die <u>Konvergenz im quadratischen Mittel</u> oder $\|\ \|_2$-Norm Konvergenz ist: [vgl. 1.13 (iii)]

$f_n\to f$ im quadr. Mittel

$$:\Longleftrightarrow \|f_n-f\|_2\to 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^{2\pi}|f_n(t)-f(t)|^2\,dt\to 0$$

Es gilt nämlich das fundamentale

Thm: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und intbar auf $[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$F[f] \to f \text{ im quadr. Mittel}$$

(6) Analysis trifft lineare Algebra: Fourier-Entwicklung als Basisdarstellung

Basisdarstellung im $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$: $v \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

Standardskalarprodukt

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v | e_i \rangle e_i$$

Koeffizienten

Standardbasis $e_i = (0, .0, 1, 0, .., 0)$

$$\langle v | e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j (e_i)_j = v_i$$

Hier versuchen wir etwas Analoges. Dazu definieren wir ein Skalarprodukt auf $R([0, 2\pi]; \mathbb{C})$

Vektorraum [?K] 1.15] der R-intb. Fkt auf $[0, 2\pi]$ mit Werten in $\mathbb{C}$

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

$\langle \, | \, \rangle$ hat (im Wesentlichen) alle Eigenschaften eines Skalarprodukts (siehe Lin Alg) und $\sin(kx), \cos(kx)$ sind bzgl $\langle \, | \, \rangle$ ein ORTHONORMALSYSTEM!

Genauer: definieren wir $e_k = \sin(kx)$, $f_k = \cos(kx)$ dann gilt

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{kl}$$

$$\langle e_k, f_l \rangle = 0 \quad \forall k,l$$

Mit $\langle\ |\ \rangle$ lassen sich FK & FR besonders schön anschreiben.

$$a_k = 2\langle f | f_k \rangle, \quad b_k = 2\langle f | e_k \rangle$$

$$F[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k f_k + b_k e_k)$$

$$= \langle f, f_0 \rangle + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\langle f, e_k \rangle e_k + \langle f, f_k \rangle f_k)$$

komplexe Schreibweise $g_k := e^{ikx}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, g_k \rangle g_k$$

Reihe, d.h. Limes (Analysis)

Basisdarstellung (lin. Alg)

[6] DIFFERENTIALRECHNUNG IM $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel beginnen wir unsere Reise in die mehrdimensionale Analysis und beschäftigen uns mit der Differentialrechnung von Fkt

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \geq 1) \quad (*)$$

Wie bei eindim Analysis beginnen wir mit dem Studium des Definitionsbereichs der Fkt und Konvergenzfragen darin (vgl [1]), die wir in

§1 TOPOLOGIE DES $\mathbb{R}^n$

untersuchen. Danach beginnen wir unser Studium von Fkt $(*)$ [vgl. [2] im 1d-Fall] in

§2 FKT VON $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: GRUNDBEGRIFFE & STETIGKEIT

Nachdem so die geeigneten Grundlagen gelegt sind beginnen wir die eigentliche mehrdim Differentialrechnung in

§3 DIFFERENZIERBARE FKT

wo wir uns vor allem mit dem Begriff der Diffbarkeit von Fkt mit mehrdim Definitionsbereich auseinandersetzen (müssen). Darauf aufbauend studieren wir die Eigenschaften diffbarer Fkt $(*)$ in

§4 SÄTZE ÜBER DIFFBARE FKT

Hier werden nicht nur Analoga der 1-d Theorie behandelt – etwa Extremwerte [vgl $\boxed{3}$ §2] und Taylor-Entwicklungen [vgl $\boxed{5}$ §3] – sondern genuin mehrdimensionale Themen wie der über implizite Fkt.

Zum Abschluß des Kap. behandeln wir in

§5 KURVEN

Fkt mit 1-d Defbereich aber mehrdim Zielbereich, also „Kurven" im landläufigen Sinn. Um diese zu studieren benötigt man zwar keine mehrdim Differentialrechnung – der Defbereich ist ja $\mathbb{R}$ – sie bereiten aber den Boden für unseren Einstieg in die mehrdim. Integralrechnung.

§ 1 DIE TOPOLOGIE DES $\mathbb{R}^n$

1.1. INTRO (Grundlagen der Analysis: Konvergenz)

Bei der Analysis von Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ [$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$] war einer der zentralen Hilfsmittel der Konvergenzbegriff im Definitionsbereich also in $\mathbb{R}$. In [1] haben wir uns ausführlich(st) mit der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ beschäftigt und darauf aufbauend in [2] die Stetigkeit von Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ als einen der zentralen Begriffe untersucht.

Da unser Interesse nun Fkt $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ gilt müssen wir uns zunächst mit Fragen der Konvergenz im Ausgangsraum, also $\mathbb{R}^n$ befassen. Dies ist der Inhalt dieses §1.

Zentraler Begriff für die Formulierung von Konvergenz & Stetigkeit auf $\mathbb{R}$ war der Betrag oder Abstand. Dasselbe gilt auch für die Konvergenz in $\mathbb{C}$ [vgl [2] 3.10] bzw die Konvergenz von Funktionenfolgen [vgl. [5] 1.13]. Wir beginnen daher unsere Untersuchungen mit einer genauen Analyse der Begriffe Abstand und Norm im $\mathbb{R}^n$.

Zuvor aber noch eine kleine Reminiszenz an den $\mathbb{R}^n$

1.2. WH aus der lin. Algebra & Ausblick (Der $\mathbb{R}^n$)

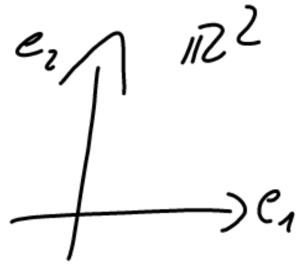
(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ – die Menge der n-Tupel reeller Zahlen $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ 1 \le i \le n\}$ –

Wir verwenden Zeilenvektoren & Spaltenvektoren synonym – also $x = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{R}$. D.h. wir haben die beiden Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar (Zahl)

$$+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \lambda \cdot x = \lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

die die einschlägigen Axiome erfüllen.



(ii) (Vorstellung und Anschauung)
Im Fall $n=2$ haben wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Fall $n=3$ den Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$

mit 2 bzw 3 linear unabhängigen Richtungen. Der $\mathbb{R}^n$ „funktioniert" völlig analog (beim „Rechnen" gibt es keinen Unterschied zwischen dem $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^7$, $\mathbb{R}^{19}$ usw – es ist halt etwas mehr Arbeit) auch wenn wir uns keinen 7-dim Raum „vorstellen" können. Es handelt sich hier um eine große <u>Stärke</u> der Mathematik bzw der <u>Abstraktion</u>: Wir können formal ganz einfach im $\mathbb{R}^n$ arbeiten, ohne ihn uns vorstellen zu müssen. Außerdem gibt uns unsere 3-d Anschauung eine ganz gute Stütze im $\mathbb{R}^n$.

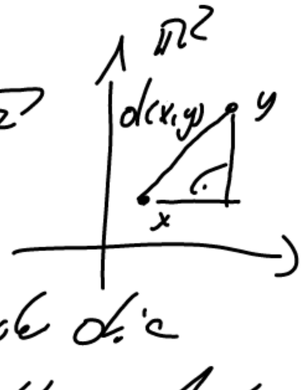
(iii) (Zwei verschiedene $\mathbb{R}^n$'s?)

Während die lineare Algebra vorwiegend an der lin. Struktur des $\mathbb{R}^n$ (d.h. an seiner Struktur als VR und an linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) interessiert ist — Ja klar, in der lin. Alg. dreht sich ja alles um das Lösen lin. Gleichungssysteme — ist die Analysis an allgemeinen (d.h. vorwiegend nicht-linearen) Abb $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ interessiert und an Fragen der Stetigkeit/Diffb. solcher Fkt und daher an Fragen der Konvergenz im $\mathbb{R}^n$. Wegen dieser völlig unterschiedlichen Herangehensweisen könnte man oft glauben, es gäbe zwei $\mathbb{R}^n$'s: den der lin Alg & den der Analysis...
Dem ist natürlich nicht so ;-)

1.3 FAKTENSAMMLUNG/KH aus der Lin. Alg (Abstand, Norm Skalarprodukt)

(i) Abstände im $\mathbb{R}^n$: Im $\mathbb{R}^2$ [und $\mathbb{R}^3$] ist der Abstand zwischen 2 Punkten $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ gemäß Pythagoras definiert als

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$



Wir nennen d den Euklidischen Abstand oder die Euklidische Metrik und definieren in völliger Analogie

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$d(x,y)=\|x-y\|:=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

Die Metrik hat die 3 Grundeigenschaften ($x,y,z\in\mathbb{R}^n$)

(M1) $d(x,y)\geq 0$ und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (positiv definit)

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ (symmetrisch)

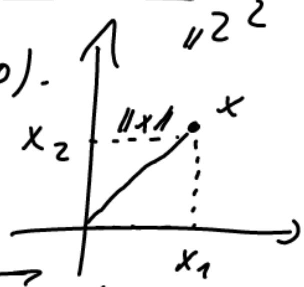
(M3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (Δ-Ungl.)

Die Eigenschaften (M1)-(M3) sind leicht aus der Def. zu zeigen und sind intuitiv genau das, was wir uns von einem vernünftigen Abstandsbegriff erwarten.

(ii) Euklidische Norm: Wie in der Notation angedeutet wird d mit Hilfe der sog. Euklidischen Norm ausgedrückt. Diese ist definiert als

$$\|\ \|:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$\|x\|=\|(x_1,\dots,x_n)\|:=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Klarerweise gilt $d(x,y)=\|x-y\|$ bzw $\|x\|=d(x,0)$. Die Norm hat die 3 Grundeigenschaften ($x,y\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$)



(N1) $\|x\|\geq 0$ und $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$ (Nullvektor $(0,\dots,0)$) (pos. definit)

(N2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ (homogen)

(N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (Δ-Ungl.)

Diese sind ebenso leicht zu zeigen wie (M1)-(M3) und „fangen" unser intuitives Verständnis des Begriffs „Länge eines Vektors" ein.

(iii) (Standard-) Skalarprodukt. Auf $\mathbb{R}^n$ ist das sog. Standard-Skalarprodukt definiert

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle\ |\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}}$$

Sein Zusammenhang mit der Norm ist offensichtlich

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

und daher

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}.$$

Das SP hat die 3 Grundeigenschaften ($x,y,z \in \mathbb{R}^n$; $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$)

(SP1) $\langle x|x\rangle \geq 0$ und $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pos. definit)

nicht: definiert

(SP2) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ (symmetrisch)

(SP3) $\langle \lambda x + \mu y|z\rangle = \lambda\langle x|z\rangle + \mu\langle y|z\rangle$ (bilinear)

$\langle x|\lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x|y\rangle + \mu\langle x|z\rangle$

linear in jedem Faktor

die ebenso leicht zu beweisen ist, wie die sog.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x|y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

(iv) Allgemeiner dreht man den Spieß um und definiert eine Metrik, eine Norm & ein Skalarprodukt über die jeweiligen Grundeigenschaften – damit hat man allgemeine Begriffe geschaffen, die sich so verhalten wie ein „anständiger" Abstand, eine „vernünftige" Länge bzw ein „sinnvolles" SP. Jetzt offiziell

das ist das Wesen der Abstraktion

AUF FOLIE VORGETRAGEN

1.4 DEF (Metrik, Norm, Skalarprodukt)

(i) Sei M eine Menge und $d: M\times M \to \mathbb{R}$ eine Abb mit (M1)–(M3), dann nennen wir d eine Metrik auf M und das Paar (M,d) einen metrischen Raum

(ii) Sei V ein VR über $\mathbb{R}$ [oder $\mathbb{C}$] und $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$ eine Abb mit (N1)–(N3), dann nennen wir $\|\ \|$ eine Norm auf V und das Paar $(V,\|\ \|)$ einen normierten VR

(iii) Sei V ein VR über $\mathbb{R}$ und $\langle\ |\ \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ eine Abb. mit (SP1)–(SP2), dann nennen wir $\langle\ |\ \rangle$ ein SP auf V und das Paar $(V,\langle\ |\ \rangle)$ einen Euklidischen VR

[Im Falle eines $\mathbb{C}$-VR muß man die Bilinearität & die Symmetrie geeignet anpassen: $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$
$\langle x|\lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x|y\rangle$]

1.5 Bsp (Metrische Raum (MR), Normierte VR (NVR), Eukl. VR (EVR))

(i) Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-SP/Eukl. Norm/Eukl. Metrik ein EVR/NVR/MR. [EMA, 6.4.12]

(ii) $(\mathbb{R}, |\ |)$ ist ein NVR und mit $d(x,y):=|x-y|$ ein MR

(iii) $(\mathcal{C}[a,b], \|\ \|_2)$ ist ein NVR, die reellwertigen Fkt in $\mathcal{C}[a,b]$ mit $\langle\ |\ \rangle$ bilden einen EVR. [vgl. [5] §4]

(iv) $(\mathcal{C}[a,b], \|\ \|_\infty)$ ist ein NVR.

1.6. Bem (Begriffe & Hierarchie – zum Ersten)

AUF FOLIE

(i) Die Begriffe MR, NVR dienen dazu allgemein „Räume" mit „Abstands-" bzw „Längenbegriffen" zu studieren. Es zeigt sich, dass man auf diesen Räumen weitgehend analog zum $\mathbb{R}^n$ Analysis betrieben werden kann. Viele Analysis-Bücher formulieren die mehrdimensionale Differentialrechnung in diesem Rahmen (z.B. [Heuser], [Forster]).

(ii) Es besteht folgende Hierarchie zwischen EVR, NVR und MR.

∘) Aus jedem EVR $(V, \langle\ |\ \rangle)$ wird vermöge der Definition

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

ein NVR [(N1)–(N3) folgen leicht aus (SP1)–(SP3) bzw aus der CS-Ugl. Diese wiederum folgt aus (SP1)–(SP3); vgl. [EMA, 7.4.15 bzw 7.2.40 und 7.4.16 bzw 7.3.40]]

AUF FOLIE VORGETRAGEN

•) Aus jedem NVR $(V, \|\ \|)$ wird vermöge der Def

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

(vgl. [EMA 7.4.18 bzw 7.3.42])

ein MR [(M1)–(M3) folgen leicht aus (N1)–(N3)].

•) Die „Umkehrungen" sind jeweils nicht i.A. möglich. Es gibt MR die keine NVR sind [sie brauchen ja nicht einmal VR zu sein!] und es gibt NVR, die keine EVR sind; im Überblick

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{EVR}} \arrow[d, "\|\ \| := \sqrt{\langle\ \rangle}"] \\
\boxed{\text{NVR}} \arrow[d, "d(.,.) := \|.-.\|"] \\
\boxed{\text{MR}}
\end{tikzcd}$$

speziell

allgemein

Das genauere Studium dieser Begriffe ist Grundlage der Topologie bzw Funktionalanalysis.

1.7 BEM (Der $\mathbb{R}^n$ als NVR)

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ lassen sich außer der Eukl. Norm auch andere Normen (und damit Metriken vgl. 1.6) definieren. Beispiele sind

•) $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (die 1-Norm)

•) bzw allgemeiner $(1 \le p < \infty)$

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{(p-Norm)}$$

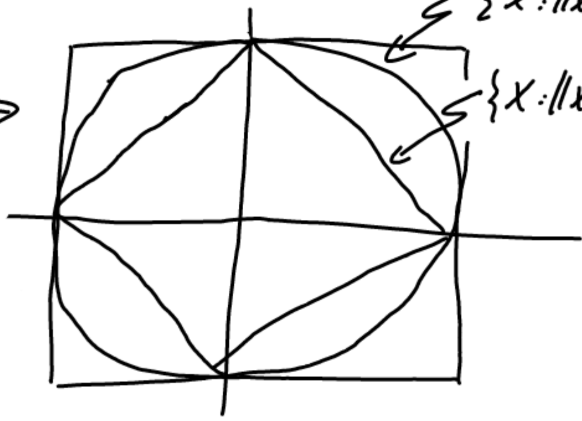
mit dem Spezialfall $\|\ \|_2$ = Eukl. Norm und

•) $$\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i| \qquad (\infty\text{-Norm})$$

(ii) Es ergeben sich damit jeweils andere „Abstandsmessungen" im $\mathbb{R}^n$, die für gewisse Zwecke sehr brauchbar sind.

Am Bsp des $\mathbb{R}^2$ können wir z.B. die Einheitskugeln (d.h. die Menge der Vektoren der Länge 1) bzgl. verschiedener Normen skizzieren.

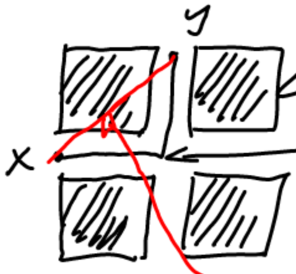
$\{x : \|x\|_\infty = 1\}$



$\{x : \|x\|_2 = 1\}$

$\{x : \|x\|_1 = 1\}$

Die $\|\ \|_1$ ist z.B. zum Messen von „Entfernungen" in amerikanischen Städten viel besser geeignet als $\|\ \|_2$:



Häuserblock

$\|y - x\|_1 = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ entspricht dem Weg den man gehen kann

$\|y - x\|_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ ist zwar der „natürliche Abstand", aber so kann man nicht gehen...

VORGETRAGEN — AUF FOLIE

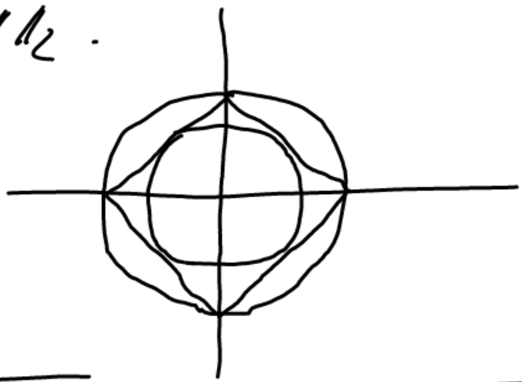
AUF FOLIE VORGETRAGEN

(iii) Zum Glück für die Analysis sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent, d.h. genauer gilt der folgende Satz [z.B. Heuser 2, 109.6]

Seien $\|\ \|_a$ und $\|\ \|_b$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, dann $\exists\, C_1, C_2 > 0$ sodass

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2\|x\|_a$$

[Anschaulich bedeutet der Satz, dass man die Einheitskugeln bzgl der verschiedenen Normen schachteln kann – was ja graphisch evident ist, z.B. für $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$.



Der Satz gilt im übrigen in jedem endl. dim NVR]

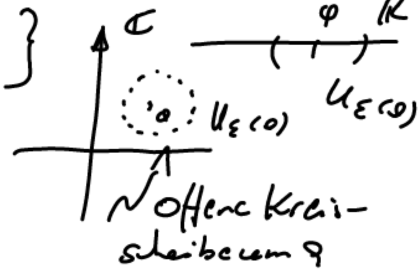
(iv) Wir können daher in Zukunft den $\mathbb{R}^n$ mit vollem Recht als NVR mit $\|\ \|_2$ oder EVR mit $\langle\,|\,\rangle$ studieren – Wenn wir eine beliebige andere Norm heranziehen würden, erhielten wir nämlich genau dieselbe Konvergenz und damit dieselbe Analysis.

(v) In unendlichdim. VR führen verschiedene Normen i. A. zu verschiedenen Konvergenzbegriffen – siehe etwa $\|f\|_\infty$, $\|f\|_2$ in [5] §1, §4.

1.8 Motivation (Grundlagen der Konvergenz)

Wir haben den Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auf den Begriff der ε-Umgebung aufgebaut – zur Erinnerung

- in $\mathbb{R}$ $\quad U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$
- in $\mathbb{C}$ $\quad U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$



und $x_n \to a$ falls die x_n schließlich in jeder ε-Umgebung von a liegen.

Im $\mathbb{R}^n$ werden wir den Konvergenzbegriff ebenso auf die ε-Umgebungen stützen. Diese sind in Analogie als offene n-dim Kugeln definiert; offiziell

1.9 DEF (ε-Umgebungen im $\mathbb{R}^n$)

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die <u>ε-Umgebung</u> von a als

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \varepsilon\}$$

1.10 Motivation (Umgebung – offene/abg. Mengen)

Wir haben es in der Analysis auf $\mathbb{R}$ oft mit offenen bzw. abg. Intervallen zu tun gehabt – wobei es für viele Sätze essentiell war, ob das zugrundeliegende Intervall offen oder abg. war.

Die essentielle Eigenschaft offener Intervalle (a,b) bzw. abg. Intervalle $[a,b]$ – nämlich, dass der „Rand" $\{a,b\}$ nicht bzw. schon dazugehört – wollen wir nun auf beliebige Teil–

mengen des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Natürlich ist hier der „Rand" i.A. viel komplizierter und wir können ihn nicht leicht explizit angeben. Wir formalisieren diese Begriffe daher ebenfalls mittels ε-Umgebungen.

1.11 DEF (Umgebung, offene & abg Menge)

(i) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von a, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(a) \subseteq U$$

Es gibt eine ε-Schutzkugel, die ganz in U liegt.

(ii) Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls V Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h.

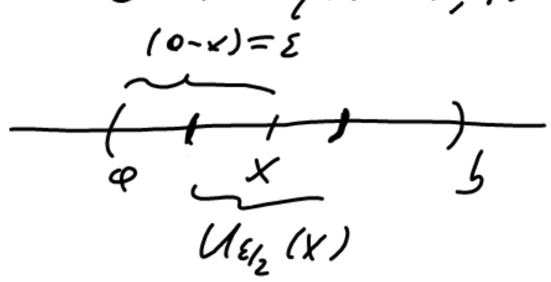
$$\forall x \in V \;\; \exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(x) \subseteq V$$

Jeder Pkt besitzt eine ε-Schutzkugel, die ganz in V liegt.

(iii) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

1.12 BSP (offene & abg Mengen)

(i) Offene Intervalle (a,b) sind offen. (daher der Name!)
Denn sei $x \in (a,b)$ dann setze $\varepsilon = \min\{|x-a|, |x-b|\}$
$\Rightarrow U_{\varepsilon/2}(x) \subseteq (a,b)$



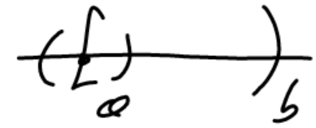
Aus demselben Grund sind die Intervalle der Form $(-\infty, b)$ bzw (a, ∞) offen.

(ii) Abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ sind abg. (oh Wunder!)
Denn $[a,b]^c = (-\infty,a)\cup(b,\infty)$ ist offen

Ebenso sind Intervalle der Form $[a,\infty)$ und $(-\infty,b]$ abgeschlossen, denn $[a,\infty)^c=(-\infty,a)$ und $(-\infty,b]^c=(b,\infty)$ sind offen

(iii) Halboffene Intervalle sind weder offen noch abg. Tatsächlich

- $[a,b)$ ist nicht Umgebung von a



$\nexists\, \varepsilon: U_\varepsilon(a)\subseteq[a,b)$

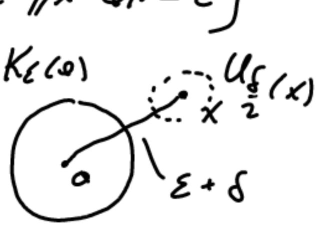
- $[a,b)^c=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$ ist nicht offen [es ist keine Umgebung von b]

(iv) ε-Umgebungen sind offen.

folgt aus der Δ-Ungl.

Sei nämlich $b\in U_\varepsilon(a)$ beliebig
$\Longrightarrow \|b-a\|<\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_1:=\varepsilon-\|b-a\|>0 \quad (*)$
Wir zeigen, dass $U_{\varepsilon_1}(b)\subseteq U_\varepsilon(a)$. Sei dazu $x\in U_{\varepsilon_1}(b)$.
Es gilt $\|x-a\| \overset{(N3)}{\le} \|x-b\|+\|b-a\| < \varepsilon_1+\|b-a\| \overset{(*)}{=} \varepsilon$
und daher $x\in U_\varepsilon(a)$ und da x beliebig war $U_{\varepsilon_1}(b)\subseteq U_\varepsilon(a)$.

(v) Abgeschlossene Kugeln ($a\in\mathbb{R}$) $K_\varepsilon(a):=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-a\|\le\varepsilon\}$ sind abg. [Beweis durch Zeichnung, oder



sei $x\in K_\varepsilon(a)^c=\{x: \|x-a\|>\varepsilon\} \Longrightarrow \|x-a\|=\varepsilon+\delta\ (\delta>0)$
dann gilt $U_{\delta/2}(x)\subseteq K_\varepsilon(a)^c$, denn für $y\in U_{\delta/2}(x)$
gilt $\|a-y\|=\|a-x+x-y\|\ge\|a-x\|-\|x-y\|\ge\varepsilon+\delta-\frac{\delta}{2}=\varepsilon+\frac{\delta}{2}>\varepsilon$]

verkehrte Δ-Ungl [UE]

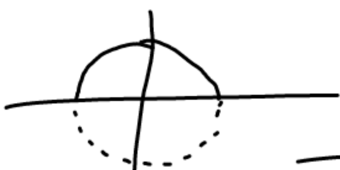
(vi) Die Extremfälle: $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offen & abg.

$\mathbb{R}^n$ ist offen, da klarerweise Umgebung jedes seiner Pkte und daher ist $\emptyset = \mathbb{R}^c$ abgeschlossen.
Die leere Menge $\emptyset$ ist auch Umgebung aller ihrer Pkte [das ist ein Trick – sie hat ja garkeinen Pkt & so ist nichts zu zeigen] und daher ist $\emptyset$ offen und $\mathbb{R}^n = \emptyset^c$ abg.

1.13 WARNUNG (Offen ist nicht das „Gegenteil" von abg. !!!)

Ein beliebtes Missverständnis ist es zu glauben, dass abg. das „Gegenteil" von offen ist – also dass eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ entweder offen oder abgeschlossen ist.
Das ist aber nicht wahr, denn es gibt Mengen

- die offen & abgeschlossen sind – nämlich $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$, siehe 1.12(vi) [das sind aber die einzigen TM von $\mathbb{R}^n$ mit dieser Eigenschaft]
- die weder offen noch abg sind – z.B. $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ oder etwa eine Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, wo der obere Rand dazugehört & der untere nicht.



1.14 PROP (Grundeigenschaften von Umgebungen & offenen Mengen)

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

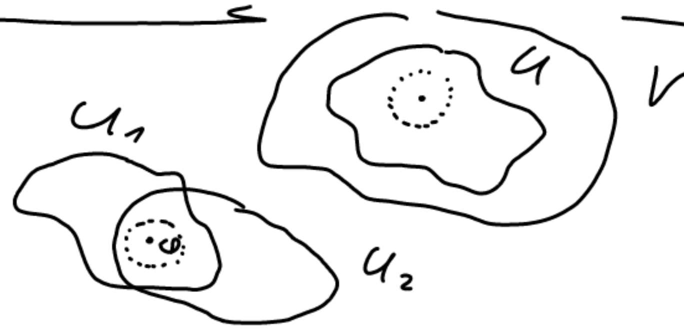
(i) U Umgebung von a, $V \supseteq U \Rightarrow V$ Umgebung von a

(ii) U_1, U_2 Umgebungen von $a \Rightarrow U_1 \cap U_2$ Umgebung v. a

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

also auch von überabz. ∞-vielen

(iv) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.



<u>Beweis</u> (i) klar per Def

(ii) ditto klar per Def

(iii) [einfaches Hantieren mit den Begriffen]

Seien $(U_i)_{i\in I}$ offene Mengen wobei I eine beliebige Indexmenge ist [I kann überabzählbar ∞ sein!]

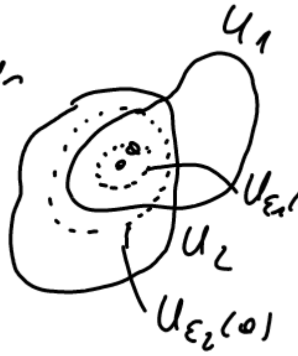
Sei $a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I,\ a \in U_i$

U_i offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(a) \subseteq U_i \Rightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

Es gibt ja schon eine ε-Sicherheitskugel um a in einem U_i, daher erst recht in $\bigcup U_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ offen

(iv) [ebenfalls ...] Seien $U_1, \dots, U_l \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen



$a \in \bigcap_{i=1}^{l} U_i \Rightarrow a \in U_i \quad \forall 1 \le i \le l$

U_i offen $\Rightarrow \forall 1 \le i \le l\ \exists \varepsilon_i > 0 : U_{\varepsilon_i}(a) \subseteq U_i$

Setze $\varepsilon := \min_{1\le i\le l} \varepsilon_i \Rightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq U_i\ \forall 1 \le i \le l$

$\Rightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{i=1}^{l} U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{l} U_i$ offen $\square$

<u>1.15 BEM & WARNUNG</u> (<u>Durchschnitte & Vereinigung offener & abg. Mengen</u>)

(i) Mittels der De Morganschen Regeln [EMA 4.1.28] ergibt sich aus 1.14 (iii)(iv) sofort

•) Beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind abg.
•) Endliche Vereinigungen abg. Mengen sind abg.

[Tatsächlich: $(A_i)_{i\in I}$ abg $\Rightarrow \Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$ offen $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ abg

analog für $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

De Morgan

offen nach Def

offen nach 1.14(iii)]

(ii) Die jeweils andere Kombination ist falsch:

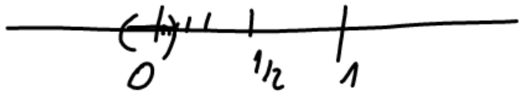
•) Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen, denn z.B

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \text{ ist abg } \left[\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty) \text{ ist offen}\right]$$

•) Daher sind wiederum nach De Morgan beliebige Vereinigungen abg. Mengen i.A. nicht abg. Ein expliziter Gegenbsp ist etwa

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ ist nicht abg, denn } \Big(\bigcup \left\{\frac{1}{n}\right\}\Big)^c$$

ist nicht offen – es enthält kein $U_\varepsilon(0)$



1.16 AUSBLICK (Topologie)

(i) (ε-Umgebungen sind ein metrisches Konzept)

Unsere bisherigen Überlegungen zu offenen & abg. Mengen basieren auf dem Konzept der ε-Umgebung. Dieses ist ein metrisches Konzept - soll heißen es ist in MR definierbar [tatsächlich haben wir nur $\|x-a\|$ verwendet und wir hätten genausogut schreiben können

$$U_\varepsilon(a) = \{x : d(x,a) < \varepsilon\} \quad]$$

und wir werden im weiteren unsere ganze Betrachtung von Konvergenz & Stetigkeit darauf aufbauen.

(ii) (Es geht aber noch allgemeiner – topologische Räume)

Tatsächlich kann man noch einen Verallgemeinerungsschritt draufsetzen und ohne Zuhilfenahme einer Metrik definieren, was eine offene Menge ist. Dazu bedient man sich wiederum des Tricks [vgl. 1.3(iv)] die Grundeigenschaften zur Definition zu erheben:

Sei M eine Menge. Eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M ist ein System von Teilmengen von M (d.h. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}M$, $\mathcal{P}M$ die Potenzmenge von M) mit den Eigenschaften

(O1) $M, \emptyset \in \mathcal{O}$

$\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ offen vgl. 1.12(vii)

(O2) Sei I eine beliebige Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}\ \forall i \in I \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

beliebige Verein. sind erlaubt vgl. 1.14(iii)

(O3) Seien $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$.

endl. Durchs. sind erlaubt vgl. 1.14(iv)

Das Paar $(M, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum und die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen offene Mengen in $(M, \mathcal{O})$.

Diese Def ist tatsächlich an den Eigenschaften der offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ (vgl. 1.14(iii),(iv)) bzw in MR (vgl (i)) modelliert – die Mengen in $\mathcal{O}$ haben genau dieselben Eigenschaften wie die offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ bzw in MR (vgl (i)).

(iii) (Topologie)

Das Studium top. Räume ist Inhalt des math. Teilgebiets der (mengentheoretischen) Topologie. Es zeigt sich, dass eine Theorie von Konvergenz & Stetigkeit in top. Räumen entwickelt werden kann – ohne Zuhilfenahme der Begriffe Metrik, Norm oder gar SP, rein unter Verwendung des Begriffs offene Mengen.

In diesem Sinne ist die Topologie jenes Teilgebiet der Mathematik, das den abstrakten Kern des Konvergenzbegriffs freilegt.

(iv) (MR & top. Räume)

Genauso wie man aus jedem EVR einen NVR und aus jedem NVR einen MR machen kann (vgl. 1.6(iii)) kann man aus jedem MR einen topologischen Raum machen.

Genauer, sei (M, d) ein MR, dann ist

Umgebung um jeden Pkt eine ε-Schnittkugel

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{U \subseteq M \mid \forall x \in M\ \exists \varepsilon\ U_\varepsilon(x) \subseteq U\} \\ &= \{U \subseteq M \mid U \text{ offen im Sinne von } 1.M(iii)\}\end{aligned}$$

eine Topologie auf M.

Es gibt aber viele top. Räume, deren Topologie nicht auf diese Weise von einer Metrik erzeugt wird.

(v) (Hierarchie der Begriffe – zum Zweiten)

Zusammen mit 1.6 (ii) erhalten wir folgende Hierarchie von „Räumen."

speziell

$\boxed{\text{EVR}}$ zusätzlich Orthogonalität (Orthonormalbasen etc...)

$\downarrow \; \not\uparrow$

$\boxed{\text{NVR}}$ zusätzlich „Längenmessung"
VR-Struktur

$\downarrow \; \not\uparrow$

$\boxed{\text{MR}}$ zusätzlich „Abstandsmessung"
Cauchy-Folge, glm. Konvergent

$\downarrow \; \not\uparrow$

allg. $\boxed{\text{top. Raum}}$ nur offene Mengen, Konvergenz, Stetigkeit

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind natürlich noch spezieller als EVR: $\mathbb{R}$ ist ein vollständiger Körper und $\mathbb{R}^n$ (bis auf Isomorphie) der einzige n-dim EVR.

(vi) (Abstraktion schön & gut – aber wozu)

Diese Frage beantwortet der folgende Textauszug von Michael Grosser:

[M. Grosser, Mathematik für Physik 4 (Funktionalanalysis); Auszug]

Besinnen wir uns auf eine der ursprünglichen Aufgaben der Mathematik in Anwendungssituationen, nämlich etwas „auszurechnen“, die Lösung eines in mathematische Ausdrucksweise übersetzten Problems zu ermitteln.

Besteht die Lösung in einem Zahlenwert, so ist es langfristig gesehen wenig sinnvoll, das gegebene Problem als einzelnes anzugehen: In den meisten Fällen wäre das zu schwierig oder insofern unrationell, weil man man beim nächsten Problem wieder von vorne weg zu überlegen beginnen müßte. Viel sinnvoller ist es, die Menge aller in Frage kommenden (reellen, komplexen) Zahlen mit den dort relevanten Rechenoperationen und Strukturen (Ordnung, Nähe und Distanz, Approximation) zu untersuchen und außerdem die Abbildungen dieser Menge (in einer gegebenen Gleichung entspricht ja jede Seite einer Funktion in der gesuchten Unbekannten) zu studieren. Das geschieht in der Analysis der Funktionen einer (reellen beziehungsweise komplexen) Variablen.

Analoges gilt, falls die Lösung in einem Zahlenvektor beziehungsweise in einem n-Tupel von Zahlen besteht: Wiederum bringt einen das endlose Studium von jeweils gegebenen Einzelfällen kaum weiter. Nützlicher ist es zum Beispiel im Falle linearer Gleichungssysteme, die allgemeine Lösbarkeit einschlägiger Probleme auf der Basis eines gründlichen Studiums endlichdimensionaler Vektorräume und linearer Abbildungen zu untersuchen. Im Falle nichtlinearer Gleichungen beziehungsweise Abbildungen müssen die Methoden der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler herhalten.

Genauso stellt sich die Situation dar, wenn die Lösung eines Problems in einem noch „komplizierteren“ mathematischen Objekt wie etwa einer Folge oder einer Funktion besteht. Das ist unter anderem in den unzähligen Situationen der Fall, wo eine Differential- oder eine Integralgleichung gelöst werden muß (beispielsweise zur Ermittlung der Bahn eines Himmelskörpers, der Ausbreitung einer Erdbebenwelle, der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems, der Schwingung einer Membran einer gewissen Gestalt und so weiter). In einer solchen Situation ist es noch viel schwieriger, eine einzelne Aufgabe in einem „singulären Gewaltakt“ zu lösen. Hier muß jeweils eine geeignete Gesamtheit von Funktionen, Folgen etc. mit den relevanten Strukturen (ein gewisser „Raum“) sowie die passende Art von Abbildungen zwischen solchen Räumen studiert werden. Diese Räume sind meist komplizierter als die vertrauten Räume $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen von diesen.

1.17 MOTIVATION (Zurück im Konkreten. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Nach unserem Ausflug in die Strukturtheorie kehren wir zu konkreten Dingen zurück: Konvergenz im $\mathbb{R}^n$. Wir beginnen die Terminologie für Folgen im $\mathbb{R}^n$ festzulegen.

1.18 TERMINOLOGIE (Folgen in $\mathbb{R}^n$)

Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ (im Sinne von [1] Def 2.1) ist eine Abb

auch Vektorfolge

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und wir schreiben $x^{(k)} := x(k)$ bzw. $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(x^{(k)})_k$, $(x^{(k)})$ für die ganze Folge.

nicht $x_k := x(k)$ weil das spießt sich mit der Komponentenschreibweise

Jedes $x^{(k)}$ ist ja Element in $\mathbb{R}^n$ und wir schreiben

k-tes Folgenglied

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n, \ k \in \mathbb{N}.$$

1.-n-te Komponente des k. Folgenglieds

Die Folge $(x^{(k)})$ besteht also aus den n-stück **Komponentenfolgen** $(x_1^{(k)}), \dots, (x_n^{(k)})$, die alle reelle Folgen sind.

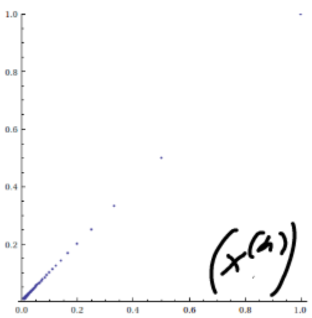
Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ sind n-stück Folgen in $\mathbb{R}$

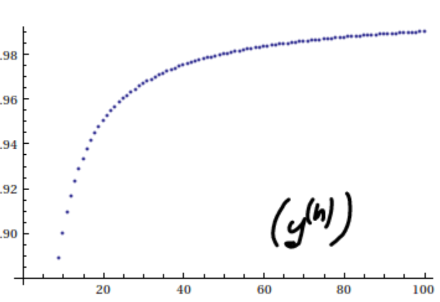
1.19 BSP (Folgen in $\mathbb{R}^n$ – Veranschaulichung)

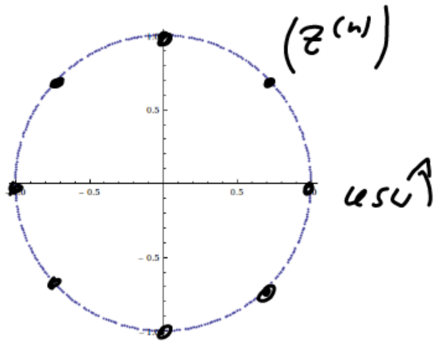
(i) Bsp für Folgen im $\mathbb{R}^2$ sind etwa

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad y^{(n)} = \left(n, 1-\frac{1}{n}\right), \quad z^{(n)} = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Diese können als Spaziergang im $\mathbb{R}^2$ (vgl. [1] 2.4) veranschaulicht werden:



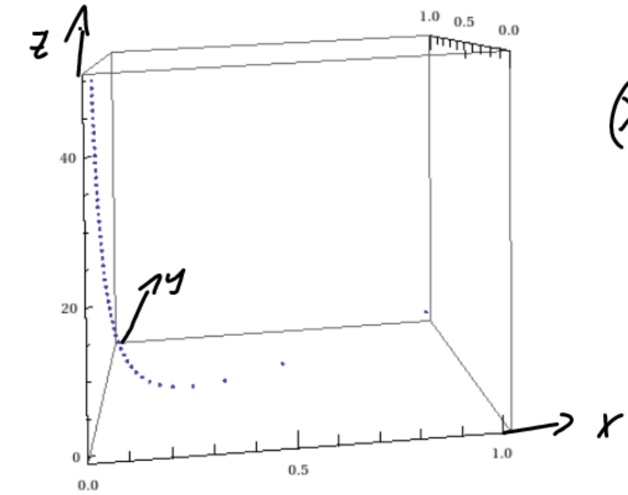




(ii) Bsp für Folgen im $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^5$ sind

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, n\right) \qquad y^{(n)} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, 1, e^n, 1-\frac{1}{n}, n\right)$$

Folgen im $\mathbb{R}^3$ können noch als Spaziergang veranschaulicht werden – allerdings etwas mühsam. Für $n \geq 4$ kann man sinnvoll nur mehr die Komponenten veranschaulichen [als Graph oder Spaziergang vgl. [1] 2.4]



$(x^{(n)})$

[Jetzt aber endlich zur Konvergenz]

1.20 DEF (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen $x^{(k)}$ konvergiert gegen a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k \geq N: \; x^{(k)} \in U_\varepsilon(a)$$

d.h. $\|x^{(k)} - a\| < \varepsilon$

gilt. Wir schreiben dann

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ oder $x^{(k)} \to a \; (k \to \infty)$ und nennen a den Grenzwert von $(x^{(k)})$.

1.21 MOTIVATION (Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz)

Wie schon in $\mathbb{C}$, wo sich die Konvergenz einer Folge auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil zurückführen lässt [vgl. [2] 3.10(E)], lässt sich die Konvergenz einer Folge $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ in $\mathbb{R}^n$ auf die Konvergenz der Komponentenfolgen $(x_1^{(k)}),\dots,(x_n^{(k)})$ zurückführen – man spricht vom Prinzip der komponentenweisen (oder koordinatenweisen) Konvergenz (PKK).

Genauer werden wir gleich sehen, dass

$$\lim(x^{(k)})=(\lim x_1^{(k)},\dots,\lim x_n^{(k)})$$

gilt. Somit ist – wie schon in $\mathbb{C}$ [vgl. [2] 3.10(E)] – die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ nichts Neues aber n-mal soviel Arbeit

1.22 SATZ (PKK)

Sei $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=a \iff \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}=a_j \quad \forall\, 1\le j\le n$$

Beweis [ganz leicht bzw. ein Elfer-Beweis]

„$\Rightarrow$" $\forall\, 1\le j\le n$ gilt $|x_j^{(k)}-a_j| \le \|x^{(k)}-a\| \xrightarrow{\text{lt. Voraus.}} 0 \ (k\to\infty)$

$$\Rightarrow x_j^{(k)}\to a_j \qquad (*)\ \ |c_j|=\sqrt{c_j^2}\le\sqrt{c_1^2+\dots+c_n^2}=\|c\|$$

jede Koordinate ist dem Betrag nach beschränkt durch die Norm

„⇐" Sei $\varepsilon>0$. Lt. Voraussetzung gilt $\forall\, 1\le j\le n$

$$\exists N_j : |x_j^{(k)}-a_j| < \varepsilon/\sqrt{n} \quad \forall k\ge N_j \quad (*)$$

Setze $N := \max\{N_1,\dots,N_n\}$ und sei $k\ge N$, dann gilt

$$\underline{\|x^{(k)}-a\|} = \Big(\underbrace{(x_1^{(k)}-a_1)^2}_{\overset{(*)}{\le}\, \varepsilon^2/n} + \dots + \underbrace{(x_n^{(k)}-a_n)^2}_{\overset{(*)}{\le}\, \varepsilon^2/n} \Big)^{1/2}$$

$$\underline{<} \left(n\,\frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{1/2} = \underline{\varepsilon}.$$

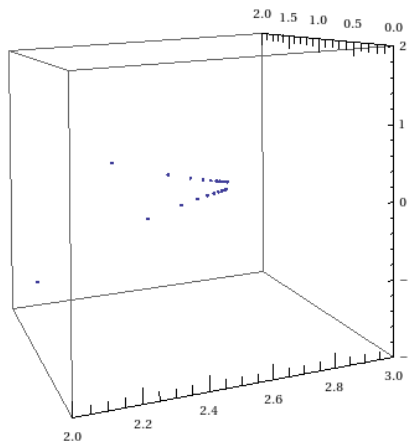
$\Rightarrow x^{(k)} \to a.$ $\square$

1.23 BSP (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0) \quad (n\to\infty)$$

$$y^{(n)} = \left(n, 1-\frac{1}{n}\right) \text{ divergiert } [\text{weil } y_1^{(n)} = n \to \infty]$$

$$z^{(k)} = \begin{pmatrix} (1+1/k)^k \\ 1 \\ (-1)^k/k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



1.24 BEM (PKK und seine $\sum$ Folgen)

Das PKK erlaubt es uns Resultate über Folgen in $\mathbb{R}$ ganz leicht in Resultate über Folgen in $\mathbb{R}^n$ zu verwandeln – vgl. dazu auch [Z] 3.10 (G), (H).
z.B. ist es „keinen Satz wert" festzustellen dass Summen von konvergenten Folgen in $\mathbb{R}^n$ gegen die Summe der

Grenzwerte konvergieren.

$$\Big[\, x^{(k)} \to a,\ y^{(k)} \to b \overset{\text{PKK}}{\Longrightarrow} x_j^{(k)} \to a_j,\ y_j^{(k)} \to b_j \ \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\overset{[1]\,2.23}{\Longrightarrow} x_j^{(k)} + y_j^{(k)} \to a_j + b_j \ \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\overset{\text{PKK}}{\Longrightarrow} x^{(k)} + y^{(k)} \to a + b \,\Big]$$

Folgende beide Resultate über Cauchy-Folgen & beschränkte Folgen halten wir – wegen ihrer großen Relevanz – explizit fest. Zuvor müssen wir aber noch definieren.

1.25 DEF (CF & beschränkte Folge)

Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $x^{(k)}$

(i) eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall l, m \geq N : \|x^{(l)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$$

(ii) beschränkt, falls

$$\exists R > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \|x^{(k)}\| \leq R$$

Das sind dieselben Def, wie in $\mathbb{R}$ – nur $|\ |$ ersetzt $\|\ \|$

1.26 KOR (Vollständigkeit, Bolzano-Weierstraß)

(i) $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, d.h. für jede Folge $(x^{(k)})$ im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$x^{(k)} \text{ konvergent} \iff x^{(k)} \text{ CF}$$

(ii) In $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz v. Bolzano-Weierstraß, d.h. jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Muß nicht definiert werden – Def [1] 3.3 gilt für Folgen in beliebigen Mengen

Beweis (i) [ganz leichte Anwendung von PKK] [UE]

(ii) $x^{(k)}$ beschränkt $\Longrightarrow$ $x_j^{(k)}$ beschränkt $\forall\, 1 \leq j \leq n$ (Wie (*) im Beweis von 1.22)

$x_1^{(k)}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\xRightarrow[\text{[1] 3.11}]{BW}$ $\exists$ konv. TF $\left(x_1^{(k_l)}\right)_l$

In jedem Schritt erfolgt eine „Ausdünnung": TF von TF … das macht aber nichts, es bleiben ∞ viele Glieder über

Betrachte nun die Folge $\left(x_2^{(k_l)}\right)_l$. Sie ist als TF der beschr. reellen Folge $\left(x_2^{(k)}\right)_k$ beschränkt

$$\xRightarrow{BW} \exists \text{ konv. TF } \left(x_2^{(k_{l_m})}\right)_m$$

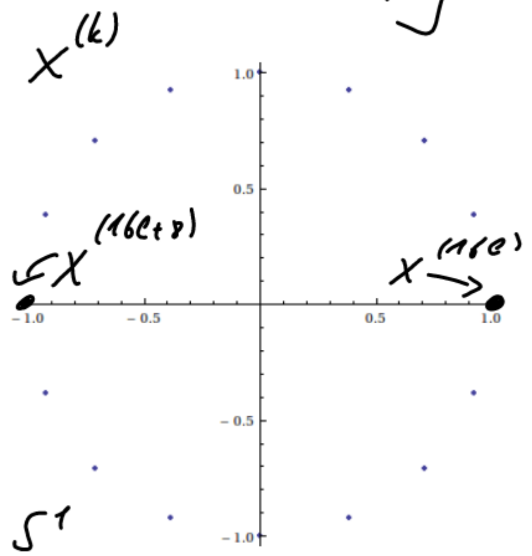
Betrachte nun $\left(x_3^{(k_{l_m})}\right)_m$ ....

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ konv. TF } \left(x_n^{(k_{\dots s})}\right)_s$$

Konstruktion $\Longrightarrow$ $\exists$ TF $\left(x^{(k_s)}\right)_s$, die in jeder Komponente konv.

$\xRightarrow{PKK}$ $\left(x^{(k_s)}\right)_s$ konvergent (als Folge in $\mathbb{R}^n$). $\square$



1.27 Bsp (zum BW)

$$x^{(k)} = \left(\cos\left(k\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(k\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$\left(x^{(k)}\right)$ ist beschränkt, denn

$$\|x^{(k)}\|^2 = \cos^2\left(\frac{k\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{8}\right) = 1$$

$\Longrightarrow \|x^{(k)}\| = 1 \ \forall k$ d.h. alle $x^{(k)} \in S^1$

Eine konv. TF ist z.B. $x^{(16l)} = (\cos(2l\pi), \sin(2l\pi)) = (1,0)$

oder etwa auch $x^{(16l+8)} = (\cos(2(l+1)\pi), \sin(2(l+1))\pi) = (-1,0)$

1.28 MOTIVATION (Abg & kp Mengen)

In der Analysis stetiger Fkt auf $\mathbb{R}$ haben die beschränkten & abg. Intervalle $[a,b]$ eine Sonderrolle gespielt [vgl [R] 2.1. & Thms 2.11, 2.16] diese haben wir als kompakte Intervalle bezeichnet.

Ihrer Verallgemeinerung, den „kompakten Mengen im MR" wenden wir uns jetzt zu: Zwar könnten wir analog zum Vorgehen in $\mathbb{R}$ kompakte Mengen als abg + beschränkte Mengen definieren – das wäre zwar ein möglicher Zugang, aber auch ein unnatürlicher$^{(\Delta)}$: Eine wesentliche Eigenschaft einer kompakten Menge K ist nämlich:

$$\boxed{\text{Jede Folge in } K \text{ hat eine in } K \text{ konv. TF.} \quad (*)}$$

Zugegeben: unanschaulich aber praktisch sehr brauchbar als Existenzmaschine [vgl. [1] Kap 3]

„der Limes einer TF wird in die Existenz gerufen".

Zentraler Begriff der höheren Analysis, Topologie, Funktionalanalysis.

Kompaktheit ist in gewisser Weise der abstrakte Kern der „Existenzmaschine" der Analysis. Er kann nicht nur in MR, sondern auch in top. Räumen formuliert werden.

allerdings nicht wie in (*) sondern mittels Überdeckungseigenschaft vgl. [Forster 2, I §3]

Allerdings können schon in MR kp Mengen „per se" als abg + beschränkte Mengen sein... [vgl (Δ)].

Zunächst befassen wir uns aber noch mit abg. Mengen.

1.29 SATZ (Abg Mengen enthalten die GW ihrer Folgen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ Für alle (in $\mathbb{R}^n$) konvergenten Folgen $(x^{(k)})$ in A gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \in A$

1.30 BSP (Zur Illustration von 1.29)

genauer: $\forall c \in \mathbb{R}^n$ mit $c = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ und $x^{(k)} \in A \ \forall k \Rightarrow c \in A$

Wir betrachten $x_n = 1/n$ in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$x_n \in (0,1]$ aber $\lim x_n = 0 \notin (0,1]$ und $(0,1]$ ist nicht abg.

$x_n \in [0,1]$ und $\lim x_n \in [0,1]$ und $[0,1]$ ist abg.

[2x indirekt aber anschaulich]

Beweis: "$\Rightarrow$" Indir. ang. $c = \lim x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \ \forall k$ aber $c \notin A$

$\Rightarrow c \in A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

A abg $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ offen

$\Rightarrow \exists$ Sicherheitskugel um c

genauer $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(c) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

$\Rightarrow U_\varepsilon(c) \cap A = \emptyset \quad (*)$

Das ist aber ein Widerspruch zu $c = \lim x^{(k)}$, $x^{(k)} \in A$, denn

$c = \lim x^{(k)} \Rightarrow \exists N \ \forall k \geq N: x^{(k)} \in U_\varepsilon(c)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} x^{(k)} \notin A \ \forall k \geq N$ ↯ zu $x^{(k)} \in A \ \forall k$

„⇐" Wir zeigen, dass A^c offen ist.

Indir. ang. nicht $\Rightarrow \exists b \in A^c : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(b) \not\subseteq A^c$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : U_{\frac{1}{k}}(b) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} \in U_{\frac{1}{k}}(b) \cap A$

$\Rightarrow \left(x^{(k)}\right)$ ist Folge in A

mit $x^{(k)} \to b \ (k \to \infty)$

$\overset{A \text{ abg}}{\Longrightarrow} b \in A$ ↯

□

d.h. jede ε-Umgebung von b schneidet A

Konstruiere Folge $x^{(k)}$ in A mit $x^{(k)} \to b \Rightarrow b \in A$ ↯

unmöglich

1.31 BEM (Abschluss einer Menge)

(i) (Die Idee)

Man kann den „Defekt" einer nicht abg. Menge M beheben nicht abg. zu sein, indem man die Limiten aller (in $\mathbb{R}^n$) konvergenter Folgen $x^{(k)}$ in M zu M dazugibt.

(ii) Formal definieren wir den Abschluss einer beliebigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ als

$$\boxed{\overline{M} := \left\{ c \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ Folge } x^{(k)} \text{ in } M \text{ mit } c = \lim x^{(k)} \right\}}$$

(iii) Einfache Eigenschaften des Abschlusses sind

$M \subseteq \overline{M}$ [jedes $c \in M$ ist $\lim x^{(k)}$ mit $x^{(k)} = c\ \forall k$]

$\overline{M}$ ist abg. [folgt sofort aus 1.29]

$M = \overline{M} \iff M$ abg [ditto]

(iv) Ein Bsp: $\overline{U_r(x_0)} = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\|<r\}}$

$= K_r(x_0) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\|\le r\}$

(v) Der Abschluss einer Menge ist ein top. Begriff, d.h. er ist in top. Räumen formulierbar (ohne anders)

1.32 DEF (Kompakte Menge) Eine Menge $K\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls jede Folge $(x^{(k)})$ in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Pkt $a\in K$ konvergiert

1.33 BSP (kp. Intervall)

$K=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ist kp, denn sei (x_n) eine Folge in K

$\Rightarrow a\le x_n\le b\ \forall n \Rightarrow (x_n)$ ist beschränkt

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv. TF $(x_{n_l})_l$

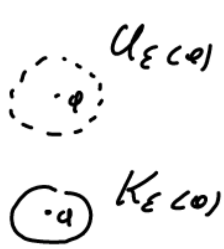
$\Rightarrow a\le x_{n_l}\le b\ \forall l \underset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} a\le \lim_l x_{n_l}\le b \Rightarrow \lim_l x_{n_l}\in K$

1.34 THM (Satz von Heine-Borel) Sei $K\subseteq\mathbb{R}^n$, dann gilt

K ist kompakt $\Longleftrightarrow$ K ist beschränkt & abg.

[Das ist ein zentraler Satz und wie in 1.28 erwähnt in $\mathbb{R}^n$ gerade noch richtig, in MR falsch.]

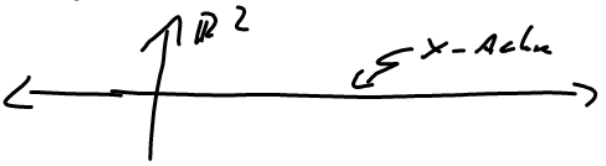
1.35 Bsp (kp & nicht kp Mengen)



$U_\varepsilon(a)$ ist nicht kp, weil nicht abg

$K_\varepsilon(a)$ ist kp, weil beschränkt & abg

$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht kp, weil nicht beschränkt



[im übrigen abg & nicht offen]

Beweis. [Zusammensetzen der Konzepte & 1.28]

„$\Rightarrow$"

(1) K ist abg, denn sei $(x^{(k)})$ in K mit $c = \lim_k x^{(k)}$

$\overset{1.28}{\Longrightarrow}$ es genügt zz: $c \in K$

K kp $\Rightarrow \exists$ TF $(x^{(k_l)})_l$ mit $a := \lim_l x^{(k_l)} \in K$

$x^{(k)}$ konv $\Rightarrow c = a \Rightarrow c \in K$

(2) K ist beschränkt. [d.h. $\exists R > 0$: $K \subseteq K_R(0)$, vgl 1.25(iii)]

Indir ang K nicht beschränkt, d.h. $\forall R$: $K \not\subseteq K_R(0)$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in K mit $\|x^{(k)}\| \to \infty$ $(k \to \infty)$

$\Rightarrow (x^{(k)})$ hat keine konv. TF $\lightning$ zu K kp

(eine solche wäre ja beschränkt)

„$\Leftarrow$" Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in K [zz $(x^{(k)})$ hat in K konv. TF]

K beschr $\Rightarrow (x^{(k)})$ beschr $\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv TF $(x^{(k_l)})_l$; sei $a := \lim_l x^{(k_l)}$

K abg $\Rightarrow a \in K$. $\square$

§2 FUNKTIONEN VON $\mathbb{R}^n$ NACH $\mathbb{R}^m$: GRUNDBEGRIFFE & STETIGKEIT

2.1 INTRO (Mehrdimensionale Analysis)

Aufbauend auf unserem Studiums der Topologie des mehrdim. Raumes $\mathbb{R}^n$ beginnen wir jetzt mit der eigentlichen mehrdimensionalen Analysis, d.h mit der Analysis von Fkt

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$$

mit $m, n \geq 1$. Da solche Fkt in der Schulanalysis wenig bis garnicht vorkommen werden wir uns zunächst ausführlich mit dieser Begriffsbildung beschäftigen, die Verwendung solcher Fkt ausführlich motivieren und Spezialfälle, Bsp und Veranschaulichungen diskutieren. Schließlich werden wir die Stetigkeit solcher Fkt diskutieren und sowohl Bekanntes (wieder-)entdecken, als auch ganz neue Phänomene kennenlernen.

2.2 MOTIVATION (Funkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – Was, wozu, warum?)

Bisher haben wir (mit wenigen Ausnahmen fast) nur Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ betrachtet, also Funktionen, die eine (reelle) Zahl fressen und eine andere (reelle) Zahl ausspucken. Betrachtet man mögliche Anwendungen so entdeckt man recht schnell, dass in vielen Situationen so eine einfache Fkt nicht ausreichend ist. Viel öfter möchte man Pkten in einem mehrdim Raum eine Zahl oder auch einen Vektor ($\hat{=}$ mehrere Zahlen) zuordnen. Beispiele gibt es wie Sand am Meer zB:

- <u>Bahnen im Raum</u>: jedem Zeitpkt $t \in [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ will man die Position eines Objekts im Raum $\mathbb{R}^3$ zuordnen, das ergibt eine Fkt

$$\begin{aligned} f: [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

die Position eines Gegenstands im Raum

- <u>Temperaturfeld</u>: Jedem Punkt p in Wien [das wir uns der einfachheit halber flach, also als TM $W \subseteq \mathbb{R}^2$ vorstellen] ordnen wir die Temperatur $T(p)$ heute um 7^h morgens zu. So ergibt sich eine Fkt

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 \supseteq W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

die Temp im Pkt x heute um 7:00

- <u>Windströmung</u>: Wir wollen jedem Punkt p über Österreich bis zu einer Höhe von 8km die jeweilige Windgeschwindigkeit zuordnen.

Dabei soll die Windgeschwindigkeit ein 3-dim Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sein, wobei die Richtung von v die Windrichtung ergibt und die Länge $\|v\|$ von v die Windgeschwindigkeit in ms^{-1} angibt. So erhalten wir eine Abb

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^3 \supseteq O &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto v(p) \end{aligned}$$

Windgeschw & -richtg im Pkt p

Nehmen wir noch die Zeit als Parameter hinzu, so haben gelangen wir zu einer Fkt

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^4 \supseteq [t_0, t_1] \times O &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, p) &\longmapsto v(t,p) \end{aligned}$$

Windgeschw & -richtg im Pkt p zur Zeit t

Um alle solche Bsp geeignet und in einem Rahmen beschreiben, modellieren & analysieren zu können betrachtet man also Fkt

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die einem Pkt oder Vektor [das ist nur eine Frage der Modellierung/Anschauung – aber keine mathematische Frage] im $\mathbb{R}^n$ einen Pkt/Vektor im $\mathbb{R}^m$ zuordnet.

Wir beginnen unser Studium solcher Fkt indem wir etwas Terminologie einführen & Spezialfälle betrachten & veranschaulichen.

2.3 TERMINOLOGIE. Sei $f:\mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ eine Fkt.

(i) (Komponentenfkt.) Für $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Da $f(x) \in \mathbb{R}^m$, muß nämlich $f(x)$ ein Vektor mit m Komponenten sein, diese bezeichnen wir eben mit $(f_1(x), \dots, f_m(x))$. Dabei schreiben wir Vektoren manchmal als Zeilen- manchmal als Spaltenvektoren, ohne damit etwas Mathematisches ausdrücken zu wollen.

Diese „Zerlegung" von $f(x)$ in $(f_1(x), \dots, f_m(x))$ können wir natürlich für jedes $x \in U$ durchführen und so erhalten wir m-Stück Fkt f_j $(1 \le j \le m)$,

$$f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

D.h. eine Fkt $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ besteht aus m-Stück sog. skalarwertigen Fkt $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$. Diese nennen wir die Komponentenfkt oder kurz Komponenten von f. Diese sind die „Bausteine" von f und – wie wir sehen werden – spiegeln sich wesentliche Eigenschaften von f schon in den Komponentenfkt f_j.

Eine Fkt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind in Wirklichkeit m Fkt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(ii) (Partielle Funktionen) Ähnlich – aber nicht mit (i) zu verwechseln! – können wir $x \in \mathbb{R}^n$ in seine Komponenten zerlegen, also $x = (x_1, \dots, x_n)$ schreiben. Damit ergibt sich

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die sog. partiellen Fkt von f betrachten indem wir alle bis auf eine Komponente von x festhalten und nur eine Komponente – als "echte" Variable – laufen lassen. Genauer sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ fix $(1 \leq k \leq n)$ dann ist die k-te partielle Fkt von f die Fkt

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(\underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}}_{\text{fix}}, \underbrace{x}_{\text{läuft}}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{\text{fix}}) \in \mathbb{R}$$

Anders als die Komponentenfkt spiegeln die partiellen Fkt oft nicht die wesentlichen Eigenschaften der Fkt wider!

Explizit als Warnung:

(iii) WARNUNG. Anders als (i) führt (ii) zu keiner „guten Zerlegung" von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Einerseits können die Komponentenfkt

$$f_1: U \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_1(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$
$$f_m: U \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_m(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

für viele Zwecke separat betrachtet werden und kodieren dabei wesentliche Eigenschaften von f. Daher sind Fkt der Bauart

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$$

1-d Zielbereich, „skalare Fkt"

die wesentlichen Bausteine der mehrdim. Analysis.

Ein wesentlicher Knackpunkt der mehrdim Analysis ist es, dass andererseits die Abhängigkeit von $x = (x_1, \dots, x_n)$ von Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — oder auch nur der Bausteine $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — nicht gut „aufgedröselt" werden kann in eine Abhängigkeit von x_1 und eine von x_2 usw. Mit anderen Worten kodieren die partiellen Fkt nicht gut die Eigenschaften der Gesamtfkt.

Zum Merken:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

kann aufgedröselt werden

kann nicht aufgedröselt werden & sorgt für „neue Effekte"

Das Wesentliche der mehrdim. Analysis steckt in $n > 1$, nicht in $m > 1$.

2.4. Spezialfälle & Veranschaulichung

Wir betrachten $f:\mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ $\quad (m,n \geq 1)$

(i) Kurven. Falls $n=1$ spricht man von Kurven; Sie werden meist mit c oder α bezeichnet und sinnvollerweise auf Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet, also

$$c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

Falls $m=1$, sind wir im [fade?] Fall der eindim. Analysis.

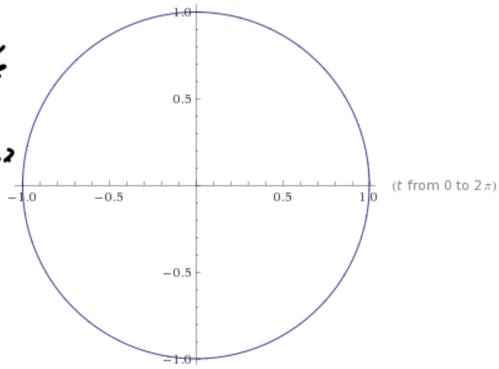
Falls $m=2$, so sprechen wir von ebenen Kurven oder Kurven in der Ebene. Diese können wir veranschaulichen, indem wir ihr Bild $c(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ zeichnen. Bsp sind etwa

Kreis

$$c: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

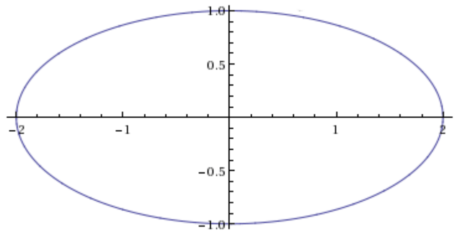
1. Komponente

2. Komp.



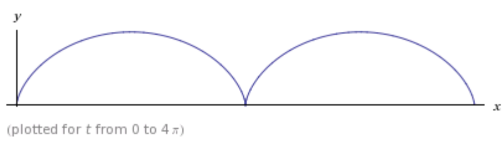
Ellipse

$$\alpha: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



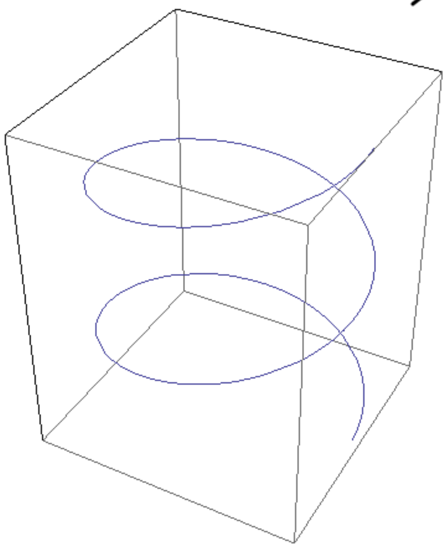
Zykloide

$$s: [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$



Keine Graphen von Fkt: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Falls $m=3$ spricht man von Raumkurven. Sie können ebenfalls durch ihr Bild veranschaulicht werden, z.B



$$c : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

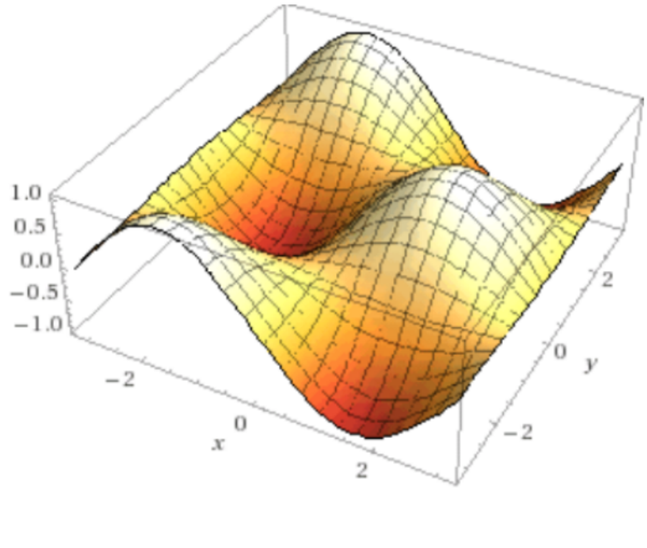
Helix, bzw. Schraubenlinie

(ii) „Landschaften": Falls $n=2$, $m=1$ also im Falle reellwertiger/skalarwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, d.h

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$$

kann der Graph $G(f) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$ als „Relief" oder Landschaft veranschaulicht werden: Über jedem Pkt $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ wird der Funktionswert $f(x,y)$ eingezeichnet. Ein Bsp ist etwa ($U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$)

$$f : U \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$$



Da $n=2>1$ können wir partielle Fkt von f betrachten

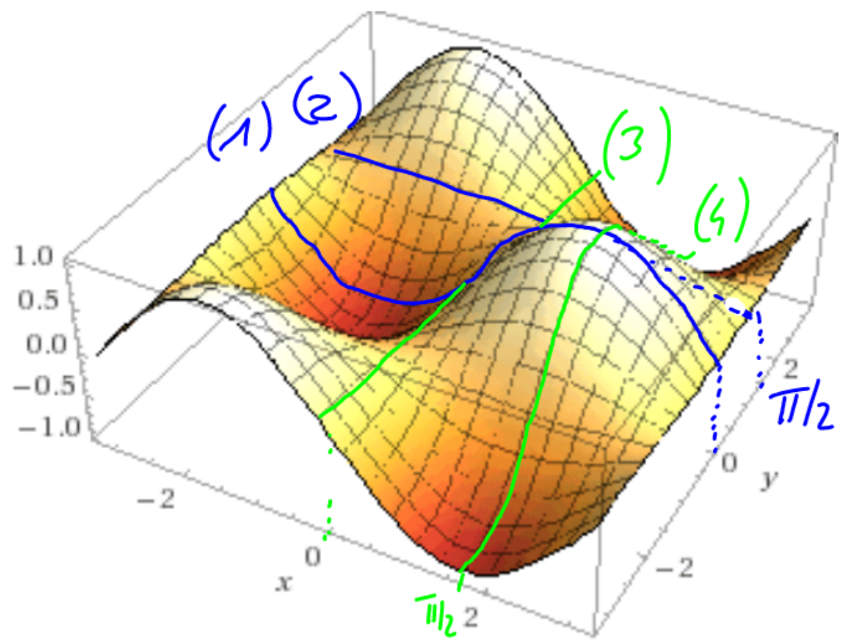
zB:

$$x \mapsto f(x,0) = \sin(x)\cos(0) = \sin(x) \qquad (1)$$

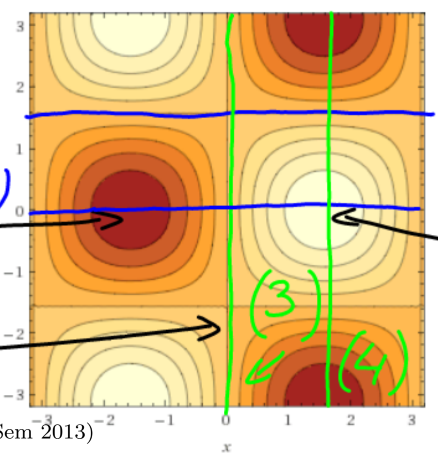
$$x \mapsto f(x,\pi/2) = \sin(x)\cos(\pi/2) = 0 \qquad (2)$$

$$y \mapsto f(0,y) = \sin(0)\cos(y) = 0 \qquad (3)$$

$$y \mapsto f(\pi/2,y) = \sin(\pi/2)\cos(y) = \cos(y) \qquad (4)$$



Eine 2. Möglichkeit eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$ zu veranschaulichen besteht darin, die Höhenschichtlinien in U einzuzeichnen — wie in eine Landkarte. Dabei werden in U alle Pkt $(x,y) \in U$ gleich eingefärbt, wo $f(x,y)$ denselben Wert annimmt. In unserem Bsp ergibt sich:



Senke

part. Fkt

dunkel ≙ tief

hell ≙ hoch

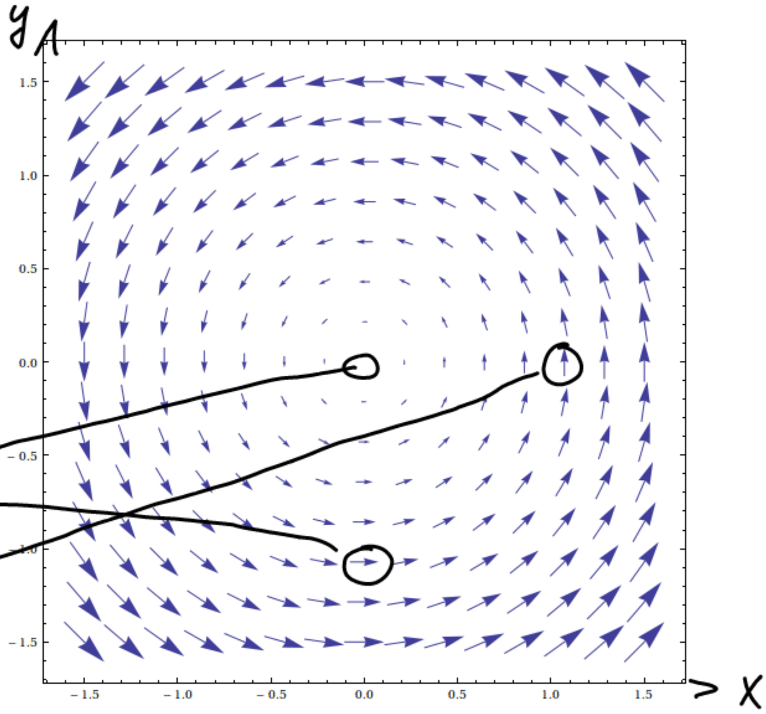
Berggipfel

(iii) Vektorfelder. Im Fall $n=m$ spricht man von Vektorfeldern. Anschaulich gesprochen ordnet eine Fkt

$$v: \mathbb{R}^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

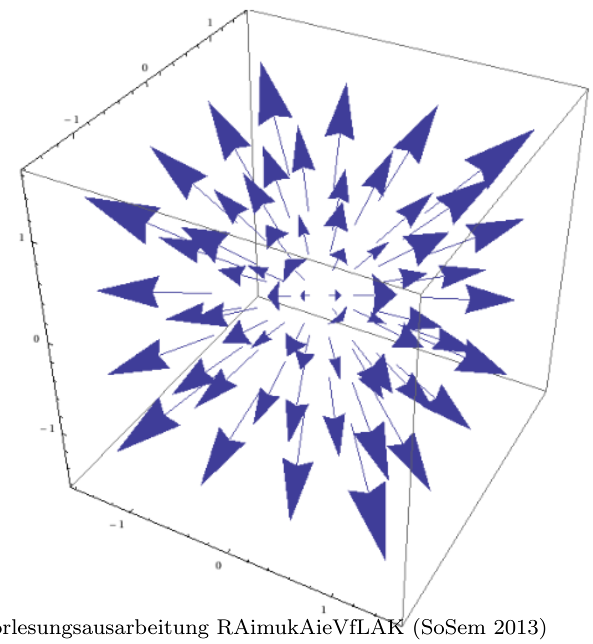
jedem Pkt $x=(x_1,\dots,x_n)\in U$ den Vektor $v(x)\in\mathbb{R}^n$ zu, den wir uns ab im Pkt x angeheftet denken (können).

Falls $m=n=2$ oder auch $m=n=3$ können wir v graphisch veranschaulichen; wir betrachten 2 Bsp.



$$v: [-1,1]\times[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

z.B.: $v(0,-1) = (1,0)$
$v(0,0) = 0$
$v(1,0) = (0,1)$



$$v: [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$v(x,y,z) = (x,y,z)$$

Das Positionsfeld: In jedem Pkt wird ein Vektor angehängt, der vom Ursprung $(0,0,0)$ wegzeigt & dessen Länge seiner Entfernung zum Ursprung entspricht.

2.5 MOTIVATION (Stetigkeit) Wir werden nun Stetigkeit von Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ untersuchen. Dazu erinnern wir uns, dass Stetigkeit für $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ zwei „Erscheinungsformen" hatte nämlich [$\boxed{2}$ 1.13]

- Umgebungsstetigkeit: die (ε-δ)-Bedingung, d.h. $(a \in D)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

was sich in „Umgebungssprache" auch so ausdrücken lässt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$$

- Folgenstetigkeit: $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

Wie im 1-d Fall werden wir die Stetigkeit als Umgebungsstetigkeit definieren, dann aber gleich sicherstellen, dass sie mit der Folgenstetigkeit übereinstimmt. Dann werden wir Stetigkeit durch die Stetigkeit der Komponentenfkt charakterisieren. Nach einigen Bsp erleben wir unsere erste große Überraschung der mehrdim Analysis.

2.6 DEF (Stetigkeit) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $a \in U$. Eine Fkt $f: U \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U \text{ mit } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

[d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(a) \cap U) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$]

völlig analog zu [$\boxed{2}$ 1.6]

f heißt stetig auf U, falls f stetig in a, $\forall a \in U$.

2.7 SATZ (Umgebungsstetig = folgenstetig) Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$. Dann gilt

f stetig in a $\iff$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in U mit $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(a)$

Beweis. [völlig analog zum 1-d-Fall, vgl [R] 1.12 - kürzer aufgeschrieben]

„$\Rightarrow$" Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in U, $x^{(k)} \to a$; ZZ $f(x^{(k)}) \to f(a)$ in $\mathbb{R}^m$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta > 0$: $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ [möglich nach 2.6]

Wähle $N \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq N$ $\|x^{(k)} - a\| < \delta$ [lt. Vorauss: $x^{(k)} \to a$]

Daher gilt $\forall k \geq N$ $\|f(x^{(k)}) - f(a)\| < \varepsilon$, also $f(x^{(k)}) \to f(a)$

„$\Leftarrow$": Indir. ang f nicht stetig in a. Dann gilt

$\exists \varepsilon > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x^{(k)} \in U$, $\|x^{(k)} - a\| < 1/k$ aber $\|f(x^{(k)}) - f(a)\| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow x^{(k)} \to a$ aber $f(x^{(k)}) \not\to f(a)$ $\lightning$ $\square$

2.8 SATZ (Stetigkeit via Komponentenfkt)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ und sei $a \in U$. Dann gilt

f stetig in a $\iff$ $\forall 1 \leq j \leq m$: f_j stetig in a

[f ist genau dann stetig (in a), falls alle Komponentenfkt $f_1, \dots, f_m$ stetig (in a) sind.]

Beweis. [Einfache Anwenden von 2.7 und PKK 1.22]

$$f \text{ stetig in } a \overset{2.7}{\Longleftrightarrow} \forall (x^{(k)}) \text{ in } U, x^{(k)} \to a : \underbrace{f(x^{(k)}) \to f(a)}$$

$$\Updownarrow 1.22$$

$$\underbrace{\left(f(x^{(k)})\right)_j}_{= f_j(x^{(k)})} \to \left(f(a)\right)_j \overset{\text{per def}}{=} f_j(a) \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

$$\Longleftrightarrow \forall x^{(k)} \to a : \forall 1 \leq j \leq m \ f_j(x^{(k)}) \to f_j(a)$$

$$\overset{2.7}{\Longleftrightarrow} \forall 1 \leq j \leq m \quad f_j \text{ stetig in } a$$

[für jedes $f_j : U \to \mathbb{R}$] $\square$

2.9 BSP (Stetige Fkt)

(i) Konstante Fkt sind stetig: Sei $c \in \mathbb{R}^m$, dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c \ \forall x$ offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}^n$ $[x^{(k)} \to a \Rightarrow f(x^{(k)}) = c \to c = f(a)]$

(ii) Projektionen. Sei $1 \leq i \leq n$. Wir definieren $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$p_i(x) = p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \ .$$

Alle p_i $(1 \leq i \leq n)$ sind stetig $[x^{(k)} \to a \overset{1.22}{\Longrightarrow} \forall 1 \leq i \leq n : x_i^{(k)} \to a_i]$

2.10 BEM („Baukasten")

Mittels des Folgenkrit. 2.7 ist es leicht zu sehen [UE; vgl. 1-d Fall [2] Prop 1.17] dass die Grundoperationen für Fkt auch im mehrdim Fall die Stetigkeit erhalten.

(i) Seien $f, g: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$\lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m \quad \left[(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \right]$$

in $\mathbb{R}^m$

stetig in a. Falls $m = 1$, dann ist auch

Bemerke: Die Menge der Fkt $f: A \to B$ "erbt" die Struktur des Zielraums?

$$f \cdot g : U \to \mathbb{R}$$

stetig und falls zusätzlich $g(a) \neq 0$, dann ist auch

$$f/g : U \setminus \{x \in U : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

stetig in a.

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in U$, $f(U) \subseteq V$. Sei $g: \mathbb{R}^m \supseteq V \to \mathbb{R}^l$ stetig in $b = f(a) \in V$. Dann ist ist auch

$$g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$$

stetig in $a \in U$. [Kurz: Die Verknüpfung stetiger Fkt ist stetig.]

2.11 Bsp (Stetige Fkt)

(i) Wegen 2.10(i) ist jedes Polynom in n-Variablen stetig

z.B.: $p(x,y,z) = 7x^2y z^3 + 5xy^2 + 3x^3z^5$.

Insbesondere sind lineare Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots \qquad + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

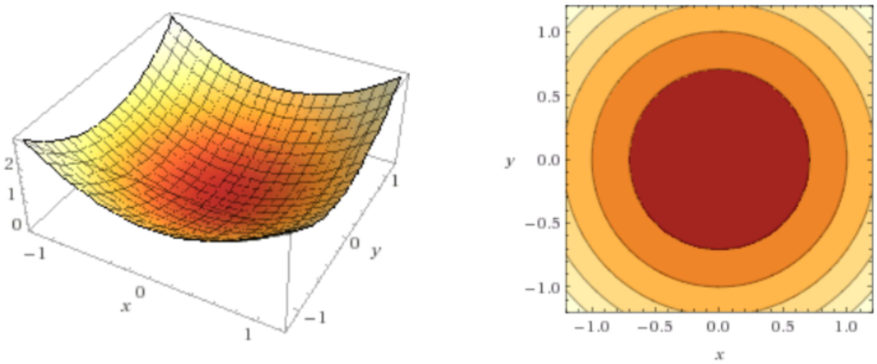
$$= A \cdot x \quad \left[\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \right] \text{ stetig auf } \mathbb{R}^n$$

[Matrix · Vektor; Lin Alg ...]

(ii) Sei $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $q(x)=x_1^2+\dots+x_n^2$. Dann ist q stetig wegen (i) und $q(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$. Weiters ist $\sqrt{\ }:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig und daher wegen 2.10(ii) die sog. Radiusfkt

$$r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)^{1/2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

stetig auf $\mathbb{R}^n$:



[Die Radiusfkt auf $\mathbb{R}^2$]

2.12 BEM (Projektionen, Komponentenfkt & Stetigkeit)

Die Projektionen aus 2.8(iii) können verwendet werden, um die Komponentenfkt auszudrücken. Genauer sei $f:\mathbb{R}^n\supseteq U\to\mathbb{R}^m$ und seien $p_j(x)=x_j$ $(1\leq j\leq m)$ die Projektionen in $\mathbb{R}^m$. Dann gilt [offensichtlich] für die Komponentenfkt von f

$$f_j=p_j\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad(1\leq j\leq m)$$

Ist f also stetig, so folgt aus 2.10(ii), 2.8(iii) die Stetigkeit der f_j $(1\leq j\leq m)$, die wir allerdings schon aus 2.8 haben...

[Nun zur angekündigten Überraschung!]

2.13 WARNUNG (partiell/separat stetig $\not\Rightarrow$ stetig)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die partiellen Abbildungen

$$x \mapsto f(x,0) \quad \text{und}$$
$$y \mapsto f(0,y)$$

beide stetig bei $x=0$ bzw $y=0$ sind. Man sagt dann, f ist separat oder partiell stetig bei 0 $[=(0,0)]$

Dann muß f trotzdem nicht stetig in $(x,y)=(0,0)$ sein ! [Cauchy hat das 1821 in einem Buch fälschlicherweise behauptet.]

Ein explizites Gegenbsp [Peano 1884] ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- f ist stetig $\forall (x,y) \neq (0,0)$ als rationale Fkt ohne Nullstellen im Nenner [2.10(i)].

- Die partiellen Fkt

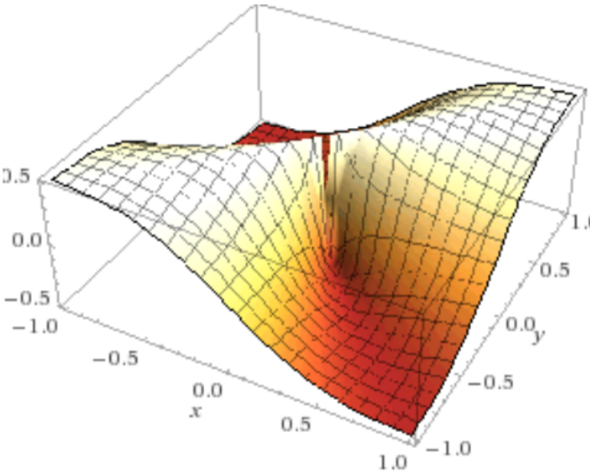
$$x \mapsto f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

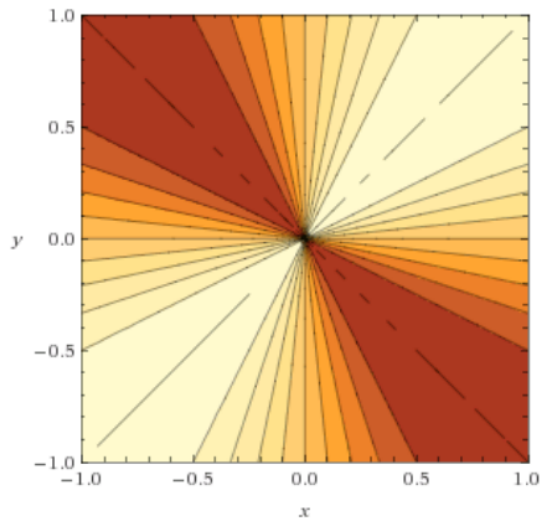
sind offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}$ also auch in $x=0$ bzw $y=0$.

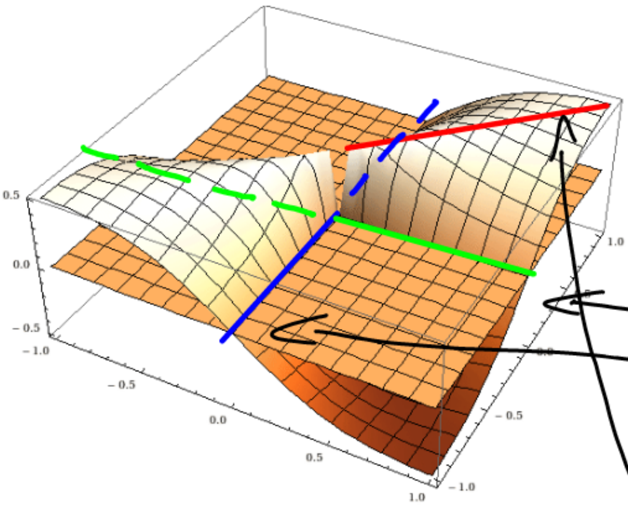
- Aber f ist nicht stetig in $(0,0)$. Um das explizit zu sehen betrachten wir die spezielle Nullfolge $x^{(k)}=(1/k,1/k)$. Es gilt

$$f(x^{(k)}) = f\left(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}\right) = \frac{1/k^2}{1/k^2+1/k^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$$

- Was ist hier passiert? Eine graphische Analyse zeigt:







- Der Graph ist eine „Klippenlandschaft" nahe $(0,0)$.
- Die partiellen Fkt „merken" die Gefahr nicht
- f läuft längs der Nullfolge $(1/k, 1/k)$ auf dem Kamm, d.h. $f(1/k,1/k) = 1/2$

und daher ins Verderben bei $(0,0)$!

FAZIT: Verwechsle nie partielle Funktionen mit Komponentenfkt.! [vgl 2.3(iii)]

2.14 AUSBLICK (Stetige Fkt auf kompakten Mengen)

Schon im 1-d-Fall ist die Sonderrolle kp. Intervall für stetige Fkt aufgefallen [vgl [2] 2.1]. Ganz allgemein [d.h. in top. Räumen] gilt, dass stetige Fkt kp Mengen „richtig transportieren", denn

$\boxed{\text{stetige Bilder kp Mengen sind kp,}}$

d.h.: f stetig, K kp $\Rightarrow f(K)$ kp.

Wir erwähnen hier konkret zwei Aussagen, die direkte Verallgemeinerungen ihrer 1-d Spezialfälle sind. Die Beweise erhält man durch geeignetes Umschreiben der 1-d Beweise [UE].

2.15 PROP (Stetige Fkt auf kp Mengen)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt

(i) Falls $m = 1$, also $f: K \to \mathbb{R}$, so ist f beschränkt & nimmt Minimum & Maximum an [d.h. $\exists \xi, \eta \in K$ sodass $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)\ \forall x \in K$]

(ii) f ist gleichmäßig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ (unabhängig von x!) sodass $\forall x, y \in K$ mit $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

§3 DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

3.1 INTRO. In diesem § beginnen wir unser Studium der mehrdim Differentialrechnung indem wir uns um den Kernbegriff der Differenzierbarkeit einer Fkt $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ kümmern. Wie bereits in A.4 erklärt, kann eine Theorie der Diffbarkeit solcher Fkt nicht auf dem Begriff des Differentialquotienten aufgebaut werden, sondern bedient sich der Charakterisierung der Ableitung als lineare Bestapproximation [[3] Thm. 1.18] – diese kann ganz einfach ins Mehrdimensionale übertragen werden. fast wortwörtlich

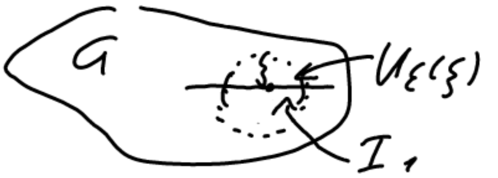
Trotzdem beginnen wir mit einem Studium der Ableitungen der partiellen Funktionen [vgl. 2.3(ii)], den sogenannten partiellen Ableitungen. Da die partiellen Fkt auf $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, ist konzeptionell alles klar. Gewarnt durch 2.13 können wir uns wohl kaum Hoffnungen darauf machen, dass die Diffbarkeit der part. Fkt die Diffbarkeit der Fkt selbst einfängt. Dem ist tatsächlich so, aber es wird sich herausstellen, dass die part. Ableitungen der Schlüssel zum Berechnen der Ableitung diffbarer Fkt sind.

3.2 MOTIVATION (partielle Ableitungen) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$.

Die partielle Fkt $x_1 \mapsto f(x_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ ist zumindest auf einen kleinen offenen Intervall $I_1 \ni \xi_1$ definiert

[G offen $\Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(\xi) \subseteq G$; definiere $I_1 = U_\varepsilon(\xi) \cap \{(x_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

2-d Veranschaulichung



]

und wir können $I_1 \ni x_1 \mapsto f(x_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ auf Diffbarkeit untersuchen. Falls die Ableitung im Pkt $x_1=\xi_1$ existiert, d.h. falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+he_1)-f(\xi)}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1=(1,0,\dots,0) \\ 0\neq h \text{ und} \\ \xi_1+h \in I_1 \end{array} \right.$$

existiert und endlich ist, dann werden wir f in ξ partiell diffbar nach x_1 nennen und die Ableitung mit

$$D_1 f(\xi) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \text{ oder } \partial_{x_1} f(\xi)$$

bezeichnen – offizielle Def. unten.

Analog dazu können wir natürlich die anderen partiellen Fkt betrachten, also $(1 \le i \le n)$

$$x_i \mapsto f(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},x_i,\xi_{i+1},\dots,\xi_n)$$

und erhalten die i-te partielle Ableitung $D_i f(\xi)$ in ξ.

Also erhalten wir die i-te partielle Ableitung durch Festhalten aller anderen Variablen $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ und übliches (1-d) Differenzieren in der i-ten Variable.

Jetzt offiziell:

3.3 DEF (partielle Ableitung) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: G \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$.

(i) Falls die i-te partielle Fkt $(1 \le i \le n)$

$$x_i \mapsto f(\xi_1, \dots \xi_{i-1}, x_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

im Pkt $x_i = \xi_i$ differenzierbar ist, so heißt f in ξ partiell nach x_i (oder nach der i-ten Koordinate) diffbar und wir bezeichnen diese partielle Ableitung nach x_i (nach der i-ten Koordinate)

$$D_i f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = \partial_{x_i} f(\xi) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h}$$

(ii) Falls f in ξ nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell diffbar ist, so nennen wir f partiell diffbar in ξ.

(iii) Falls f in allen $\xi \in G$ partiell diffbar ist, so nennen wir f partiell diffbar (auf G).

3.4 BSP (part. Abl.) [ganz einfach!]

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(s,t) = se^t + \sin(st)$

so tun, ob ob t bzw. s Konstante wären

$$D_1 f(s,t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = e^t + t\cos(st), \quad D_2 f(s,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = se^t + s\cos(s,t)$$

(ii) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + xy^2 + 2z^3$

$$D_1 g(x,y,z) = \partial_x g(x,y,z) = 2x + y^2, \quad D_2 g(x,y,z) = \partial_y g(x,y,z) = 2xy$$

$$D_3 g(x,y,z) = \partial_z g(x,y,z) = 6z^2$$

3.5 BEM (Höhere part. Abl. & eine wichtige Frage)

Sei wiederum $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $f : G \to \mathbb{R}$.

(i) Falls f auf G partiell diffbar ist, so erhalten wir n-Stück Fkt

$$D_1 f : G \to \mathbb{R}, \dots, D_n f : G \to \mathbb{R}$$

Falls $D_i f$ in $\xi \in G$ partiell nach x_j diffbar ist, so erhalten wir eine partielle Ableitung 2. Ordnung von f im Pkt $\xi \in G$, genauer erhalten wir die part. Abl 2. Ordnung

$$D_j D_i f(\xi)$$

Auf diese Weise erhalten wir n^2-Stück partielle Ableitungen 2. Ordnung.

(ii) Falls $D_j D_i f$ auf ganz G existiert und in $\xi \in G$ nach x_ℓ partiell diffbar ist, so erhalten wir die part. Abl. 3. Ordnung in ξ

$$D_\ell D_j D_i f(\xi)$$

usw, usw.

(iii) Eine wichtige Frage, die sich nun stellt ist, ob bei den gemischten partiellen Ableitungen, zB $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ die Reihenfolge der Differentiation wesentlich ist oder nicht, d.h ob etwa

d.h. nicht von der Form $D_i D_i D_i \dots D_i f$

$$D_1 D_2 f(\xi) = D_2 D_1 f(\xi) \text{ gilt oder nicht.}$$

Die Antwort ist i.a. NEIN [siehe UE]; unter der milden Voraussetzung, dass die betroffenen part. Ableitungen stetig sind lautet sie aber JA.

Bevor wir das einschlägige Resultat formulieren & beweisen, ein Bsp.

3.6 BSP (Höhere part. Abl.) Wir betrachten nochmals $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x^2+xy^2+2z^3$. Lt 3.4(iii) gilt

$$D_1g=2x+y^2,\ D_2g=2xy,\ D_3g=6z^2 \quad \text{und daher}$$

$$\begin{array}{lll} D_1D_1g=2, & D_1D_2g=2y, & D_1D_3g=0 \\ D_2D_1g=2y, & D_2D_2g=2x, & D_2D_3g=0 \\ D_3D_1g=0, & D_3D_2g=0, & D_3D_3g=12z \end{array}$$

vertauschen alle D?

3.7 SATZ (von Schwarz) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\xi\in G$, $f:G\to\mathbb{R}$. Falls D_iD_jf und D_jD_if $(1\le i,j\le n)$ auf G existieren und in ξ stetig sind, so gilt

$$D_iD_jf(\xi)=D_jD_if(\xi)$$

nicht vorgetragen

3.8 BEM (zum Satz v. Schwarz)

(i) Wie aus dem Beweis ersichtlich genügt die Existenz von D_iD_jf und D_jD_if auf eine (kleinen) Umgebung von ξ

(ii) Induktiv ergibt sich natürlich eine analoge Aussage für partielle Ableitungen höherer Ordnung; d.h.

Gemischte part. Abl. vertauschen, falls sie stetig sind!

Beweis von 3.7: [lange & technisch aufwendige Anwendung des MWS]

(1) Vorbereitung 1: (2-d Spezialfall genügt)

Es genügt den Satz für $n=2$ zu zeigen, denn oBdA sei $x_i = x$, $x_j = y$ und alle anderen Variablen werden ohnehin festgehalten.

Sei also $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(\xi,\eta) \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$ und $D_1 D_2 f$, $D_2 D_1 f: G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu zeigen ist, dass

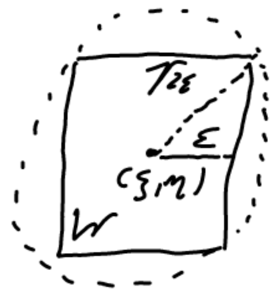
$$D_1 D_2 f(\xi,\eta) = D_2 D_1 f(\xi,\eta)$$

NICHT VORGETRAGEN

(2) Vorbereitung 2: (Festlegen der Umgebungen)

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta) \subseteq G$.

$\Longrightarrow W := [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \times [\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon] \subseteq U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta) \subseteq G$



$U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta)$

Seien $\alpha, \beta \neq 0$, $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$

$\Longrightarrow [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|] \times [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|] \subseteq W$

(3) Darstellung von $D_2 D_1 f$

Setze $\varphi(x) := f(x, \eta+\beta) - f(x,\eta)$ für $x \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists x_1 \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$:

$$\varphi(x+\alpha) - \varphi(x) = \alpha\, \varphi'(x_1) = \alpha\left(D_1 f(x_1, \eta+\beta) - D_1 f(x_1,\eta)\right) = (*)$$

Setze $\psi_1(y) := D_1 f(x_1, y)$ für $y \in [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|]$

$$\Longrightarrow \quad (*) = \alpha\left(\psi_1(\eta+\beta) - \psi_1(\eta)\right) \quad (\Delta)$$

$$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \ \exists y_1 \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$$

$$\underline{\varphi(\xi+\alpha) - \varphi(\xi)} \overset{(\Delta)}{=} \alpha\beta\,\varphi_1'(y_1) = \alpha\beta\,\underline{D_2 D_1 f(x_1, y_1)} \qquad (\square)$$

(4) Darstellung von $D_1 D_2$:

Setze $\psi(y) := f(\xi+\alpha, y) - f(\xi, y)$ für $y \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$

Wie in (3) gilt nun mit (2-maliger Anwendung des) MWS: $\exists x_2 \in [\xi - |\alpha|, \xi + |\alpha|]$, $y_2 \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$ sodass

$$\underline{\psi(\eta+\beta) - \psi(\eta)} = \beta\,\psi'(y_2) = \beta\big(D_2 f(\xi+\alpha, y_2) - D_2 f(\xi, y_2)\big)$$

$$= \beta\alpha\,\underline{D_1 D_2 f(x_2, y_2)} \qquad (\square\square)$$

(5) Die beiden Darstellungen stimmen überein: Es gilt

$$\varphi(\xi+\alpha) - \varphi(\xi) = f(\xi+\alpha, \eta+\beta) - f(\xi+\alpha, \eta) - f(\xi, \eta+\beta) + f(\xi, \eta)$$

$$= f(\xi+\alpha, \eta+\beta) - f(\xi, \eta+\beta) - \big(f(\xi+\alpha, \eta) - f(\xi, \eta)\big)$$

$$= \psi(\eta+\beta) - \psi(\eta)$$

$$\overset{(\square),(\square\square)}{\Longrightarrow} \alpha\beta\,D_1 D_2 f(x_2, y_2) = \alpha\beta\,D_2 D_1 f(x_1, y_1)$$

$$\overset{\alpha,\beta\neq 0}{\Longrightarrow} \underline{D_1 D_2 f(x_2, y_2) = D_2 D_1 f(x_1, y_1)}$$

(6) Abschluss: $\alpha, \beta \to 0$: Wir betrachten nun den Limes

$$(\alpha, \beta) \to (0,0) \Longrightarrow (x_1, y_1) \to (\xi, \eta) \leftarrow (x_2, y_2)$$

$$\xrightarrow[\boxed{2}\ 1.26]{D_1D_2 f,\ D_2 D_1 f \text{ stetig!}} D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta) \qquad \square$$

NICHT VORGETRAGEN

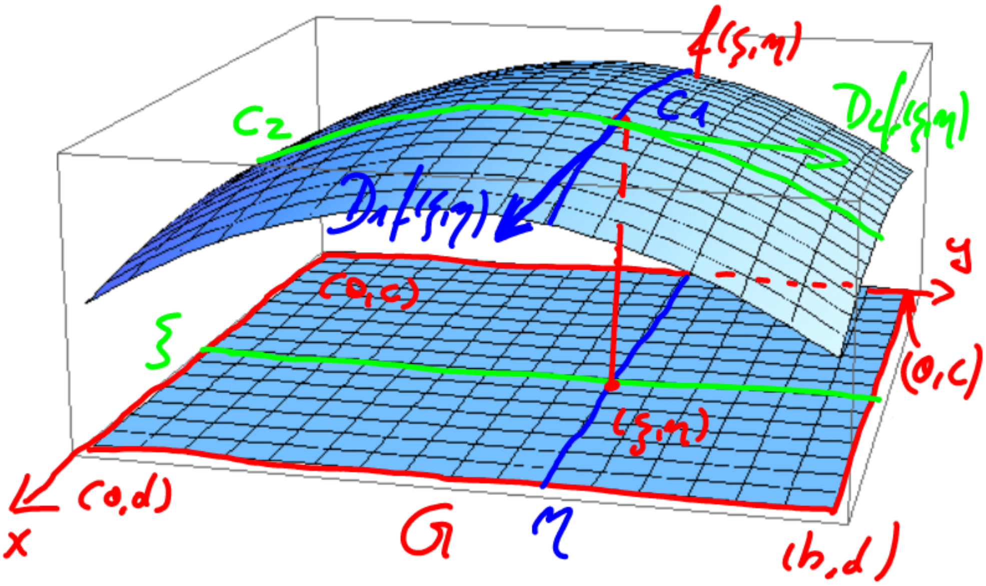
3.9 Rückblick & Ausblick (Differenzierbarkeit)

(i) Was wir bis jetzt getan haben: Wir wollen die Bedeutung der part. Ableitungen graphisch darstellen. Sei dazu $G := (a,b) \times (c,d)$ ein offenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$, $(\xi,\eta) \in G$ und $f: G \to \mathbb{R}$ part. diffbar. Wir betrachten die part. Fkt.

$$g: x \mapsto f(x,\eta)$$
$$h: y \mapsto f(\xi,y)$$

und zeichnen sie im Graphen $\Gamma(f) = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in G\}$ ein:

- g beschreibt die Kurve c_1, die durch Schnitt von $\Gamma(f)$ mit der Ebene $y = \eta$ entsteht.
- h beschreibt die Kurve c_2, die durch Schnitt $\Gamma(f)$ mit der Ebene $x = \xi$ entsteht



- Daher ist $D_1f(\xi,\eta) = g'(\xi)$ der Anstieg von c_1 im Pkt $(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$ und $D_2f(\xi,\eta) = h'(\eta)$ — " — c_2 — " —

(ii) FAZIT: Die Information, die in D_1f, D_2f steckt bezieht sich nur auf die Änderung von f

in 2 sehr speziellen Richtungen – nämlich den Koordinatenrichtungen. Ohne weitere Zusatzbedingungen sagen $\partial_1 f, \partial_2 f$ nichts über die Änderung von f in allen anderen Richtungen aus!
Diese Information wird also nicht ausreichen um einen guten Differenzierbarkeitsbegriff daraus aufzubauen. Daher erinnern wir uns an

(iii) Differenzieren als lin. Approximation im 1-d Fall
[3] Thm. 1.19 besagt für $f: \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$, I ein Intervall

$$f \text{ diffbar in } \xi \iff \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; \exists r: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}: \\ f(\xi + h) - f(\xi) = a h + r(h) \quad \forall |h| < \delta \text{ mit } \xi + h \in I \\ \text{und } \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \; (h \to 0) \end{array}$$

Bemerke [vgl. [3] 1.20], dass dabei

$$\mathbb{R} \ni h \mapsto a \cdot h \in \mathbb{R}$$

eine lineare Fkt ist, die die Inkrementfkt

$$\varphi(h) := f(\xi + h) - f(\xi)$$

beschreibt die Änderung von f nahe ξ

approximiert; es ist außerdem $a = f'(\xi)$.
Dieser Aspekt der Diffbarkeit lässt sich nun gut auf den Fall $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ verallgemeinern. Bevor wir das tun noch eine allgem. Bemerkung

3.10 Strategische Bemerkung (Verallgemeinerungen am besten Weg?!)

Unsere Vorgehensweise beim Verallgemeinern des Begriffs der Diffbarkeit von 1-d auf n-d Definitionsbereich folgt einer in der Mathematik weitverbreiteten Strategie beim Verallgemeinern von Begriffen. Daher wollen wir sie genauer betrachten:

$n=1$: (Definition via Differenzialq. $\overset{[3]\ 1.18}{\Longleftrightarrow}$ Char. mittels lin Approx.)

↓ Verallgemeinerung   ↓ Verallg.

$n>1$: ✗ NEIN; A.4!   ✓

Der Begriff der Diffbarkeit kann im Fall $n=1$ durch die lin. Approximation des Inkrements vollständig charakterisiert werden. Während die ursprüngliche Def mittels Differentialquotienten sich nicht auf den Fall $n>1$ verallgemeinern lässt, ist dies für die in $n=1$ äquivalente Formulierung aus [3] 1.18 sehr wohl [und zwar sehr direkt!] möglich.

Falls in der math. Forschung ein Begriff verallgemeinert werden soll, steckt oft viel Arbeit & Kreativität im 0. Schritt, indem man die für die Verallgemeinerung am besten geeignete äquivalente Formulierung des Begriffs findet – oft muss sie überhaupt erst neu erfunden werden!

3.11 DEF (Differenzierbarkeit) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^m$.

(i) Die Fkt f heißt <u>differenzierbar im Pkt $\xi \in G$</u>, falls

$$\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear},\ \exists \delta > 0\ \exists r: \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m \text{ sodass}$$

$$f(\xi + h) - f(\xi) = A \cdot h + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } \xi + h \in G$$

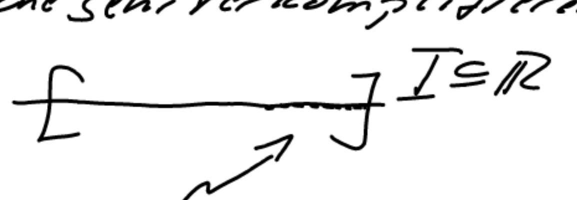
$$\text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

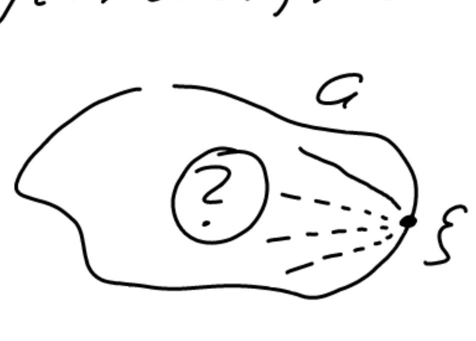
(ii) Ist f diffbar in allen Pkten $\xi \in G$, dann nennen wir f <u>diffbar (auf G)</u>.

3.12 BEM (zur Def der Diffbarkeit)

AUF FOLIE VORGETRAGEN

(i) (Offener Defbereich) Wir beschränken uns bei der mehrdim Diffbarkeit auf <u>offene</u> Definitionsbereiche. Anders als im 1-d Fall kann man sich dem Rand des Defbereichs aus vielen Richtungen nähern, was die Sache sehr verkomplizieren würde.





einseitige; hier linksseitige Abl leicht zu definieren $\boxed{3}$ 1.7(iii)

(ii) (Übereinstimmung im Fall $n = 1 = m$) Def 3.11 reduziert sich im Fall $n = 1 = m$ tatsächlich auf die Bedingung in $\boxed{3}$ 1.19 – vgl 3.8(iii). Dabei ist die lin. Abbildung A dargestellt durch die 1×1-Matrix $a = f'(\xi) \in \mathbb{R}$.

(iii) (Die Ableitung?) Pkt (ii) legt nahe, dass wir (auch) in 3.11 A als die Ableitung von f in ξ bezeichnen. Dies haben wir in 3.11 allerdings aus gutem Grund nicht getan: bevor wir das können, müssen wir sicherstellen, dass A eindeutig durch 3.11 bestimmt ist.

Außerdem würden wir A auch gerne berechnen (können) – bevor wir es großartig benennen.

Erfreulicherweise kommen uns bei beiden Problemen die partiellen Ableitungen zuhilfe!

3.13 SATZ+DEF (Diffbar $\Rightarrow$ part diffbar, Jacobi-Matrix)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f = (f_1, \dots, f_m): G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Dann sind alle Komponentenfkt $f_j: G \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$ (in alle Richtungen) partiell diffbar in ξ und es gilt

$$A = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\xi) & D_2 f_1(\xi) & \dots & D_n f_1(\xi) \\ D_1 f_2(\xi) & & \dots & D_n f_2(\xi) \\ \vdots & & & \\ D_1 f_m(\xi) & & \dots & D_n f_m(\xi) \end{pmatrix} =: Df(\xi).$$

d.h. $a_{ij} = D_j f_i(\xi)$ eine $(m \times n)$-Matrix $\hat{=}$ Abb: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Die Matrix $Df(\xi)$ heißt Jacobi-Matrix von f in ξ.

3.14 BEM+TERMINOLOGIE (3.12(iii) gelöst, die Ableitung)

Eine Kurzfassung von 3.13 ist:

f diffbar in ξ $\Longrightarrow$ Alle Komponenten f_j part. diffbar in ξ und $A = Df(\xi)$

Insbesondere ist A durch die Jacobi-Matrix $Df(\xi)$ eindeutig bestimmt & (leicht) berechenbar und wird die Ableitung von f in ξ genannt.

Nichts Neues nur $(n\cdot m)$-mal soviel Arbeit

Beweis [nicht schwierig aber viel Bürokratie]

Seien (mit der Notation von 3.13)

Komponenten von r

$$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n),\quad h=(h_1,\dots,h_n),\quad r=(r_1,\dots,r_m)$$

Die Gleichung in 3.12, $f(\xi+h)-f(\xi)=Ah+r(h)$ lautet in Komponenten $(1\leq j\leq m)$

Matrixmult $A\cdot h$

$$(*)\qquad f_j(\xi+h)-f_j(\xi)=a_{j1}h_1+\dots+a_{jn}h_n+r_j(h).$$

Aus der Bedingung an r, $\frac{r(h)}{\|h\|}\to 0\ (h\to 0)$ folgt $\forall 1\leq j\leq m$

$$(**)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{r_j(h)}{\|h\|}=0.$$

Idee: So kommt man zu part. Abl.

Speziell für $h=s\cdot e_i$ ($s\in\mathbb{R}$, e_i der i-te Einheitsvektor) nehmen $(*)$, $(**)$ folgende Form an:

$\sum_{l=1}^{n}a_{jl}(e_i)_l=\sum_l a_{jl}\delta_{il}=a_{ji}$

$$f_j(\xi+se_i)-f_j(\xi)=a_{ji}\,s+\rho_j(s)\quad\text{mit}$$

$$\rho_j(s):=r_j(se_i)\quad\text{und}\quad\lim_{s\to 0}\frac{\rho_j(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{r_j(se_i)}{\|se_i\|}=0.$$

$$\overset{\boxed{3}\,1.19}{\Longrightarrow}\ s\mapsto f_j(\xi+se_i)\ \text{diffbar im Pkt}\ \xi\ \text{mit Abl.}\ a_{ji}$$

$$\overset{3.3}{\Longrightarrow}\ f_j\ \text{part diffbar in}\ \xi\ \text{nach}\ x_i\ \text{und}\ D_i f_j(\xi)=a_{ji}.$$

$\square$

AUF FOLIE VORGEZ.

3.15 BEM (Spezialfälle)

offenes Intervall

NICHT VORGETR.

(i) $n=1=m$. Also $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$. Dann gilt
$Df(\xi) = f'(\xi)$, eine (1×1) Matrix und wir sind zurück in Kap. 13

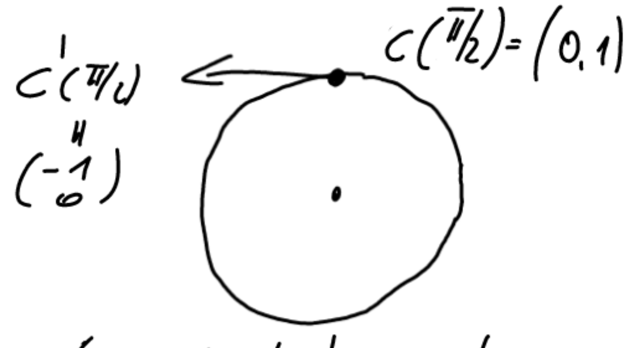
(ii) $n=1$, Kurven: Sei $c = (c_1, \dots, c_m): I \to \mathbb{R}$ diffbar in $t \in I$. Dann gilt

vgl. 2.4 (ii)

$$Dc(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_m'(t) \end{pmatrix} := c'(t)$$
, eine $(m\times 1)$-Matrix, also ein Spaltenvektor

z.B.
$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$Df(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$



Veranschaulichung als „Geschwindigkeitsvektor"

(iii) $m=1$, skalare Fkt: Sei $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in G$, dann gilt

$$Df(\xi) = (D_1 f(\xi), \dots, D_n f(\xi))$$
, eine $(1\times n)$ Matrix, also ein Zeilenvektor

Setzen wir in die Def der Diffb. ein, so erhalten wir

$$f(\xi+h) - f(\xi) = D_1 f(\xi) h_1 + \dots + D_n f(\xi) h_n + r(h)$$

$$= \langle Df(\xi)^t, h \rangle + r(h).$$

Skalarprod. auf $\mathbb{R}^n$

$$Df(\xi)^t = \begin{pmatrix} D_1 f(\xi) \\ \vdots \\ D_n f(\xi) \end{pmatrix}$$

der transponierte Zeilenvektor ist ein Spaltenvektor

Oft wird folgende Terminologie verwendet:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\xi) := Df(\xi)^t}$$

heißt der <u>Gradient</u> von f im Pkt ξ. Damit schreibt sich die Def der Diffbarkeit für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ohne den Bowteisen des allg Falls, vgl 2.3(i) — wie folgt

$$\boxed{f(\xi+h) - f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle + r(h)}$$

mit $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0 \ (h \to 0)$

<u>z.B.</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$,

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

<u>3.16 BEM</u> (Umformulierungen der Diffbarkeit) Folgende einfache Umformulierungen der Diffbarkeit sind oft nützlich: Für $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m): G \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in G$ sind folgende Aussagen äquivalent

(1) f diffbar in ξ

$$Df(\xi) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \vdots & & \\ D_1 f_m & \dots & D_n f_m \end{pmatrix}(\xi) \overset{3.15(iii)}{=} \begin{pmatrix} Df_1 \\ \vdots \\ Df_m \end{pmatrix}$$

(2) Alle Komponenten $f_j: G \to \mathbb{R}$ sind diffbar in ξ

(3) $\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - Ah}{\|h\|} = 0$$

$r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - Ah$
vgl. Bew [3] 1.19

AUSGELASSEN

3.17 BSP (Differenzieren, Jacobi-Matrix)

(i) (lin. Abb) Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, also $f(x) = Bx$ mit B eine $(m\times n)$-Matrix. Dann gilt $\forall \xi\ \forall h$

$$f(\xi+h) - f(\xi) = B(\xi+h) - B\xi = Bh + 0.$$

Also ist Def 3.11 mit $r(h) = 0$ erfüllt und es gilt $A = B$, d.h. $Df(\xi) = B\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n$.

[Die Ableitung einer lin. Abb ist (in jedem Pkt) die Matrix selbst; das ist schon auf $\mathbb{R}$ so: $f(x) = ax$ $f'(x) = a\ \forall x$]

(ii) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+xyz \\ 2x+z\end{pmatrix}$. Dann hat die Jacobi-Matrix die Gestalt

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1 \\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_3\end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+yz & xz & xy \\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3.18 WARNUNG (part diffbar $\not\Rightarrow$ diffbar; ja nicht einmal stetig)

(i) In 3.17(ii) haben wir zwar die Jacobi-Matrix berechnet, damit ist aber nicht gezeigt, dass f auch diffbar ist! Tatsächlich gilt

$$\underbrace{f \text{ diffbar in } \xi \ \overset{3.13}{\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}}\ \text{Alle Komponenten } f_j \text{ part diffbar in alle Richtungen in } \xi}\quad (*)$$

(ii) Es kommt sogar noch dicker: Die Bedingung auf der rechten Seite impliziert nicht einmal die Stetigkeit, genauer sei $f: G\to\mathbb{R}$, $\xi\in G$ dann gilt

$$\boxed{f \text{ stetig in } \xi \quad \not\Leftarrow \quad f \text{ part diffbar in } \xi}$$

Ein explizites Gegenbsp ist das Peano-Bsp aus 2.13:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

UE

Dann gilt [2.13] für die part. Fkt

$$x \mapsto f(x,0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow D_1 f(0,0) = 0$$

$$y \mapsto f(0,y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow D_2 f(0,0) = 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ part diffbar aber unstetig – und daher auch nicht diffbar wie aus Satz 3.19 (unten: diffbar $\Rightarrow$ stetig) folgt.

(iii) Alles wird wieder gut, wenn die part. Ableitungen nicht nur existieren, sondern auch stetig sind. Das zeigen wir in Satz 3.20 unten.

AUSGELASSEN

(iv) Zunächst halten wir aber fest, dass – wie auf $\mathbb{R}$ – die Diffbarkeit die Stetigkeit impliziert und weil dieselben Gegenbsp wie auf $\mathbb{R}$ gültig bleiben für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in G$ gilt

$$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \quad f \text{ stetig in } \xi.}$$

$f(x) = |x|$ in $x = 0$ [[3], 3.8(vi)]

3.19 SATZ (diffbar $\Rightarrow$ stetig) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Dann ist f auch stetig in ξ.

<u>Beweis</u>: [selbe Idee wie [3] 1.13 nur mit Folgen statt lim v. Fkt]

Sei $(x^{(k)})$ Folge in G mit $x^{(k)} \to \xi$; setze $h^{(k)} := x^{(k)} - \xi$

$\Longrightarrow h^{(k)} \to 0$ und es gilt

$$f(x^{(k)}) - f(\xi) = f(\xi + h^{(k)}) - f(\xi)$$
$$\overset{3.13}{=} Df(\xi)h^{(k)} + r(h^{(k)}) \xrightarrow{(k\to\infty)} Df(\xi)\cdot 0 + 0$$

Also $f(x^{(k)}) \to f(\xi) \overset{2.7}{\Longrightarrow} f$ stetig in ξ. $\square$

<u>3.10 SATZ</u> (stetig part diffb $\Rightarrow$ diffbar) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und seien alle partiellen Ableitungen $D_i f: G \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le n)$ stetig in ξ. Dann ist f diffbar in ξ.

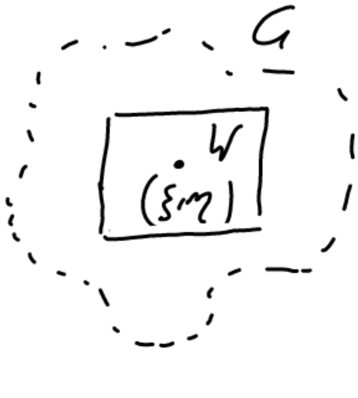
<u>Beweis</u> [Anwenden des MWS & etwas Bürokratie]

AUSGELASSEN

(1) <u>Vorgeplänkel</u>:

Wir setzen $n=2$; der allgemeine Fall erfordert dann nur eine Anpassung der Notation.

Sei also $(\xi,\eta) \in G$ und ε so klein, dass
$W := [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \times [\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon] \subseteq G$



(2) <u>Berechnen des Inkrements</u>:

Für (α,β) mit $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$ gilt $(\xi,\eta)+(\alpha,\beta) \in W$ und wir können rechnen

Trick: geeigneten Term einschieben

$$f((\xi,\eta)+(\alpha,\beta)) - f(\xi,\eta)$$

$$= f(\xi+\alpha,\eta+\beta) - f(\xi,\eta+\beta) + f(\xi,\eta+\beta) - f(\xi,\eta)$$

$$= \alpha D_1 f(x_1,\eta+\beta) + \beta D_2 f(\xi,y_1)$$

(1d)-MWS für passende Zwischenstellen $x_1 \in [\xi-|\alpha|,\xi+|\alpha|]$, $y_1 \in [\eta-|\beta|,\eta+|\beta|]$

Trick

$$= \alpha D_1 f(\xi,\eta) + \beta D_2 f(\xi,\eta)$$

hätten wir gerne

stört → Rest

$$\underbrace{+\,\alpha\Big(\underbrace{D_1 f(x_1,\eta+\beta) - D_1 f(\xi,\eta)}_{=:\,r_1(\alpha,\beta)\ (*)}\Big) + \beta\Big(\underbrace{D_2 f(\xi,y_1) - D_2 f(\xi,\eta)}_{=:\,r_2(\alpha,\beta)\ (*,*)}\Big)}_{=:\,r(\alpha,\beta)}$$

Matrixprodukt

$$= \big(D_1 f(\xi,\eta), D_2 f(\xi,\eta)\big) \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + r(\alpha,\beta)$$

(3) Nachweis der Differenzierbarkeit. Gemäß 3.13 genügt es zu zeigen, dass für $h=(\alpha,\beta)$ $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ $(h\to 0)$.

Daher schätzen wir ab

$$\frac{|r(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \frac{|\alpha|\,|r_1(\alpha,\beta)| + |\beta|\,|r_2(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad \left[\ \}^{\circledast} = \left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix} \right\rangle\ \right]$$

$$\overset{\text{CS-Ugl}^{\circledast}}{\le} \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sqrt{r_1^2(\alpha,\beta)+r_2^2(\alpha,\beta)}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \sqrt{r_1^2(\alpha,\beta)+r_2^2(\alpha,\beta)} \qquad (\Delta)$$

Nun gilt: mit $(\alpha,\beta)\to(0,0)$ folgt

$$x_1\to\xi,\ y_1\to\eta,\ \eta+\beta\to\eta$$

D_1f, D_2f stetig in (ξ,η)

$$\Longrightarrow\ D_1f(x_1,\eta+\beta)\to D_1f(\xi,\eta)$$

2.7.

$$D_2f(\xi,y_1)\to D_2f(\xi,\eta)$$

$$\overset{(*),(**)}{\Longrightarrow}\ r_1(\alpha,\beta)\to 0,\ r_2(\alpha,\beta)\to 0\quad \text{für } (\alpha,\beta)\to(0,0)$$

$$\overset{(\Delta)}{\Longrightarrow}\ \frac{r(\alpha,\beta)}{\left\|\binom{\alpha}{\beta}\right\|}\to 0\quad (\alpha,\beta)\to(0,0)$$

$\square$

3.21 BEM (Terminologie – Zusammenfassung der Situation)

(i) ($\mathcal{C}^1$-Fkt)

Gelten die Bedingungen von Satz 3.20 in allen Pkten $\xi\in G$, d.h. falls für $f:\mathbb{R}^n\supseteq G\to\mathbb{R}$ alle part. Ableitungen auf ganz G stetig sind, dann ist auch die Abb

$$G\ni\xi\mapsto Df(\xi)\in M_{(1\times n)}(\mathbb{R})$$

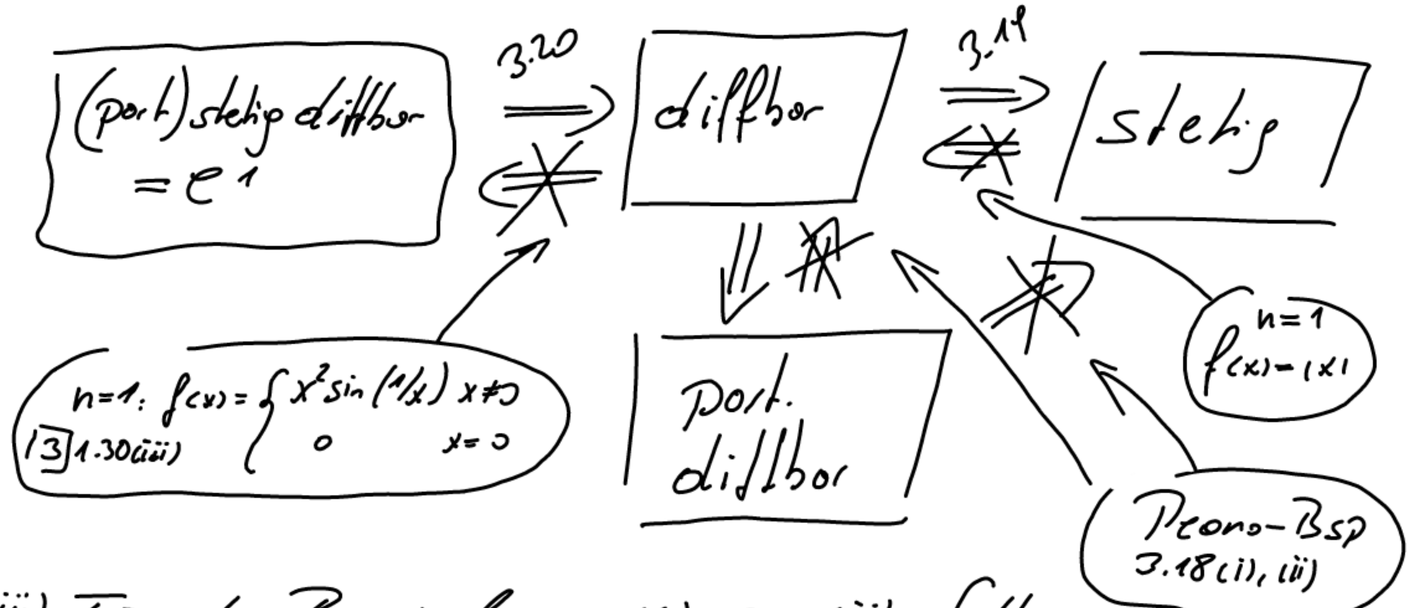
$(1\times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen

stetig [wegen 2.8]. In völliger Analogie zum 1-d Fall [[3] 1.30(ii)] nennen wir solche Fkt

$\boxed{\text{stetig diffbar bzw } \mathcal{C}^1\text{-Fkt}}$.

Also sind stetig diffbare Fkt per def partiell stetig diffbare Fkt.

(ii) (Überblick) Wir können nun folgenden Überblick über die (Nicht-)Implikationen der Diffbarkeitsbegriffe geben:



(iii) Für die Praxis lernen wir aus (ii): Soll eine Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ auf Diffbarkeit untersucht werden, so ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

(1) Berechne die Jacobi-Matrix; natürlich nur falls möglich, aho alle Komp. alle part. Ableitungen besitzen

(2) Überprüfe die Einträge der Jacobi-Matrix auf Stetigkeit. Falls ja, dann ist f sogar C^1; falls nein, muss die Def der Diffbarkeit herangezogen werden ...

[Höchste Zeit für ...]

3.22 BSP (Differenzierbare Fkt)

(i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+xyz \\ 2x+z \end{pmatrix}$, $Df(x,y,z) \overset{3.17(iii)}{=} \begin{pmatrix} 2x+yz & xz & xy \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist stetig auf $\mathbb{R}^3$ also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$, insbes diffbar

[(ii) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
ist stetig also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, insbes. diffbar auf $\mathbb{R}^2$]

(iii) $f: G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+\sqrt{y} \\ \sqrt{x}+y \end{pmatrix}$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2\sqrt{y} \\ 1/2\sqrt{x} & 1 \end{pmatrix}$ ist stetig auf $G \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(G;\mathbb{R}^2)$

insbes diffbar auf G

3.23 BEM (Baukasten)

Analog zum 1-d Fall wollen wir die Verträglichkeit der Differentiation mit den Grundoperationen untersuchen [vgl [3] 1.13] und daraus ein „Baukastensystem" fürs mehrdim Differenzieren plus Differentiationsregeln gewinnen — natürlich sind hier Einschränkungen gegeben, da z.B. Produkte nur für Fkt mit Zielbereich $\subseteq \mathbb{R}$ möglich sind...

3.24 PROP (Differentiationsregeln) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i) (Linearkombinationen) Seien $f,g: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Für $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f+\mu g$ diffbar in ξ und es gilt

$$\boxed{D(\lambda f+\mu g)(\xi) = \lambda Df(\xi) + \mu Dg(\xi)}$$

Zahl·Matrix

Matrix+Matrix

(ii) (Produktregel) Seien $f, g: G \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in G$. [?]

Dann ist fg diffbar in ξ und es gilt

$$\operatorname{grad}(fg)(\xi) = f(\xi) \operatorname{grad} g(\xi) + g(\xi) \operatorname{grad} f(\xi)$$

Zahl · Vektor

Vektor + Vektor

(iii) (Kettenregel) Seien $f: G \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \supseteq W \to \mathbb{R}^e$ Funktionen $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f(G) \subseteq W$. Ist f diffbar in $\xi \in G$ und g diffbar in $\eta := f(\xi) \in W$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: G \to \mathbb{R}^e$ diffbar in ξ und es gilt

Das übliche Vorgeplänkel: $\mathbb{R}^n \supseteq G \xrightarrow{f} f(G) \subseteq W \xrightarrow{g} \mathbb{R}^e$

$$D(g \circ f)(\xi) = Dg(f(\xi)) \cdot Df(\xi)$$

Jacobi-Matrix einer Abb $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^e$: $(e \times n)$-Matrix)

Produkt der Jacobi-Matrizen: $Dg(\eta) \in M(e,m)$, $Df(\xi) \in M(m,n)$ gibt eine Matrix in $M(e,n)$ oho okay

3.25 BSP (Kettenregel)

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ xy \end{pmatrix}$; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+2y \\ y \end{pmatrix}$

$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (0,1)$, $f(0,1) = (-1,0) = (\eta_1, \eta_2) = \eta$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}, \quad Df(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Dg(f(0,1)) = Dg(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hängt garnicht vom Pkt ab

$$\underline{D(g\circ f)(0,1)} \overset{3.24(iii)}{=} Dg(-1,0)\cdot Df(0,1) = \begin{pmatrix}1&1\\3&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\\1&0\end{pmatrix}}$$

Natürlich können wir auch direkt rechnen:

$$g\circ f(x,y) = g(x-y, xy) = \begin{pmatrix}x-y+xy\\3(x-y)+2xy\\xy\end{pmatrix}$$

$$D(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix}1+y, & -1+x\\3+2y & -3+2x\\y & x\end{pmatrix},\quad D(g\circ f)(0,1) = \underline{\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\\0&1\end{pmatrix}}$$

(ii) Ein wichtiger Spezialfall der Kettenregel ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Dann ist $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und es gilt

$$\underline{(g\circ f)'(\xi)} = Dg(f(\xi))\cdot Df(\xi) = \begin{pmatrix}f_1'(\xi)\\ \vdots\\ f_n'(\xi)\end{pmatrix}$$

$(n\times 1)$-Matrix = Spaltenvektor

$$= (D_1 g \;\cdots\; D_n g)(f(\xi))\cdot\begin{pmatrix}f_1'(\xi)\\ \vdots\\ f_n'(\xi)\end{pmatrix}$$

$(1\times n)$ Matrix = Zeilenvektor

$$= \underline{\langle \operatorname{grad} g(f(\xi)) \cdot f'(\xi)\rangle}$$

Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

UE

Beweis von 3.24

(i) [Einfaches Zusammensetzen der Defs] Für $\|h\|$ klein gilt

$$\left.\begin{aligned} f(\xi+h)-f(\xi) &= Df(\xi)h + r_1(h), \quad r_1(h)/h\to 0\\ g(\xi+h)-g(\xi) &= Dg(\xi)h + r_2(h), \quad r_2(h)/h \to 0\end{aligned}\right\}(*)$$

$$\Rightarrow (\lambda f+\mu g)(\xi+h) - (\lambda f+\mu g)(\xi) =$$
$$= \lambda f(\xi+h) - \lambda f(\xi) + \mu g(\xi+h) - \mu g(\xi)$$
$$\overset{(*)}{=} \lambda Df(\xi) + \mu Dg(\xi) + \underbrace{\lambda r_1(h) + \mu r_2(h)}_{=r(h)}$$

AUSGELASSEN

Wieder wegen (*) gilt
$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \lambda \frac{r_1(h)}{\|h\|} + \mu \frac{r_2(h)}{\|h\|} \longrightarrow 0 .$$

(ii) Analog zu (i) [Heuser II 165.3]

(iii) Einfaches Umschreiben des 1-d Beweises [3] 1.23. $\square$

3.26 MOTIVATION (Richtungsableitung)

Wir stellen uns jetzt folgende Aufgabe: Wir wollen durch ein hügeliges Gelände eine Straße bauen. Dazu müssen wir ausgehend von einem Punkt die Steigung in verschiedene Richtungen bestimmen, um zu sehen was ein günstiger Trassenverlauf wäre.

Das zugrundeliegende math. Problem ist es die Ableitung einer Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ in eine bestimmte Richtung zu bestimmen. Dabei ist die Richtung durch einen Vektor v mit $\|v\| = 1$ gegeben – einen sogenannten Richtungsvektor.

Eine naheliegende Definition – gleich für $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

3.27 DEF (Richtungsableitung) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$ $f: G \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$
Falls der Grenzwert

$$D_v f(\xi) := \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}$$

existiert und endlich ist, so nennen wir $D_v f(\xi)$ die Richtungsableitung von f in ξ in Richtung v.

3.28 BEOBACHTUNG (Richtungsabl. vs part. Ableitung)

Setzen wir in 3.27 $v = e_i$, dann sehen wir

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + te_i) - f(\xi)}{t} = D_i f(\xi)$$

also ist die Richtungsableitung in Richtung der i-ten Koordinatenachse gerade die i-te part. Ableitung.
Die part. Ableitungen sind also spezielle Richtungsableitungen.

Andererseits lassen sich Richtungsableitungen in allg. Richtungen aus den part. Ableitungen zusammensetzen, wie die folgende Proposition zeigt.

3.29 PROP (Richtungsabl. via part. Abl.) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$ $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ. Dann existiert $D_v f(\xi)$ für jeden Richtungsvektor v und es gilt

$$D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$$

Beweis: [Einfache Rechnung] Für alle $0\neq t$ klein genug gilt

$$\frac{f(\xi+tv)-f(\xi)}{t} \overset{3.13}{=} \frac{Df(\xi)\cdot tv + r(tv)}{t} = Df(\xi)\cdot v + \frac{r(tv)}{t}$$

$$\xrightarrow{3.13} Df(\xi)\cdot v = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle \qquad \square$$

3.30 BSP (Richtungsableitung)

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$, $\xi=(1,1)$, $v=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

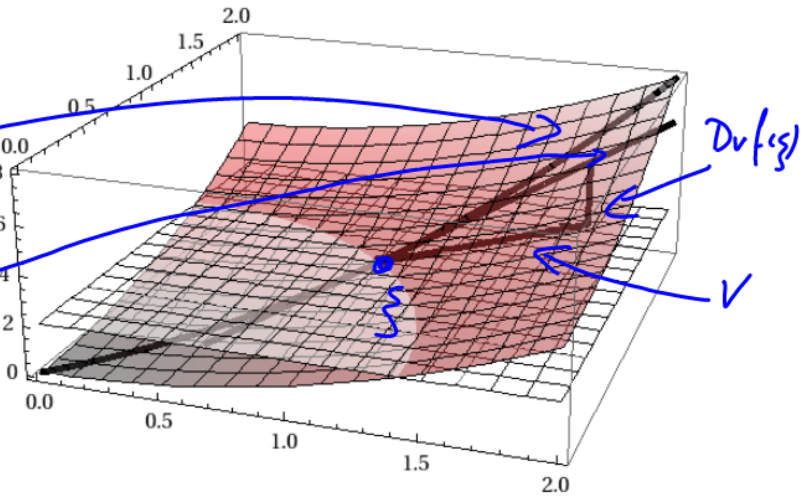
Dann gilt

$$D_vf(\xi)=\langle \underbrace{\operatorname{grad} f(\xi)}_{\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}}, v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Graphische Interpretation

Schnittkurve des Graphen mit der Ebene $\{(x,x,z)/x,z\in\mathbb{R}\}$

Tangente an die Schnittkurve



3.31 BEOBACHTUNG

(Richtung des stärksten Anstiegs)

In der Formel aus 3.29 ist eine wichtige Information versteckt, die wir jetzt herauskitzeln wollen. Es gilt

$$|D_vf(\xi)| = |\langle \operatorname{grad} f(\xi), v\rangle| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|\operatorname{grad} f(\xi)\|\,\underbrace{\|v\|}_{\|v\|=1} = \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$$

D.h. die Norm des Gradienten beschränkt den Betrag aller Richtungsableitungen.

Ist außerdem $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$ dann ist $v_0 := \dfrac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$ ein Richtungsvektor und wir haben

$$D_{v_0} f(\xi) \overset{3.29}{=} \frac{\langle \operatorname{grad} f(\xi), \operatorname{grad} f(\xi) \rangle}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|} = \|\operatorname{grad} f(\xi)\| .$$

Das bedeutet, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(\xi)$ die Richtung des größten Anstiegs angibt. Genauer zeigt $\operatorname{grad} f(\xi)$ in Richtung des größten Anstiegs und $-\operatorname{grad} f(\xi)$ in Richtung des stärksten Gefälles.

Diese überaus wichtigen Ergebnisse halten wir in einem Satz fest

3.32 SATZ (Bedeutung des Gradienten) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ. Dann gilt

(i) Ist $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$, dann verschwinden alle Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ von f in ξ.

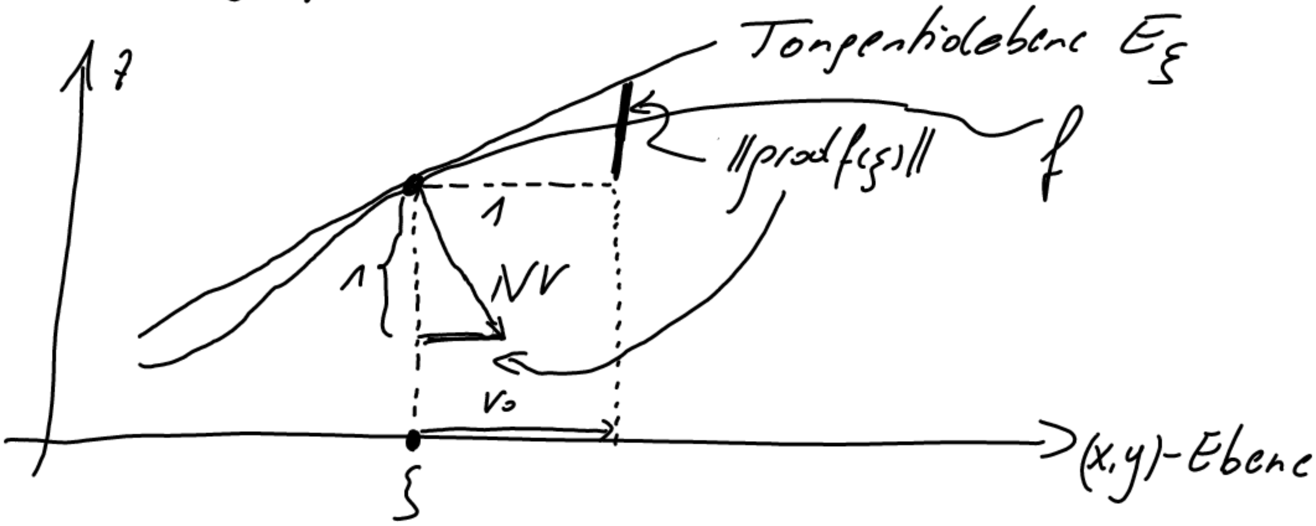
(ii) Ist $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$, so gibt es unter allen Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ eine größte, nämlich die Richtungsableitung in Richtung des Gradienten $\operatorname{grad} f(\xi)$ [d.h. $v = \operatorname{grad} f(\xi) / \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$]. Ihr Wert ist gerade $\|\operatorname{grad} f(\xi)\|$.

WEGGELASSEN

3.33 Veranschaulichung & Anwendung: Tangentialebene

Sei $f:\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ diffbar, $\xi \in G$.

(i) Wir betrachten den vertikalen Schnitt durch den Graphen $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der senkrechten Ebene über der Geraden $t \mapsto \xi + t v_0$ mit $v_0 = \operatorname{grad} f(\xi)/\|\operatorname{grad} f(\xi)\|$.
[Schneide geeignet durch die Grafik in 3.30]



(ii) Wir können nun leicht die Tangentialebene an $\Gamma(f)$ in $(\xi, f(\xi))$ beschreiben. Ein Normalvektor ist gegeben durch

$$NV = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{siehe Skizze}}$$

Daher ergibt sich für die Hessesche Normalform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\xi \iff \left\langle NV, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-\xi_1 \\ y-\xi_2 \\ z-f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle \operatorname{grad} f(\xi), \begin{pmatrix} x-\xi_1 \\ y-\xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle - (z-f(\xi)) = 0$$

Also

$$\boxed{z = f(\xi) + \left\langle \operatorname{grad} f(\xi), \begin{pmatrix} x-\xi_1 \\ y-\xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0}$$

§4 Eigenschaften diffbarer Fkt

4.1 Intro. Nachdem im vorigen § der Differentiarbarkeits-
begriff für Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ genau beleuchtet
wurde werden wir in diesem § [analog zu 1] §2] Anwendungen der mehrdim Differentialrechnung behandeln.
Genauer werden wir die folgenden 5 Themen studieren

(1) Mittelwertsätze. In 1-d hat sich der Mittelwertsatz als entscheidendes Werkzeug herauskristallisiert, das hinter vielen Resultaten steckt – bis hinauf zu Bew. 3.8, 3.20. Hier werden wir Verallgemeinerungen bzw. Abschwächungen des MWS kennen lernen

(2) Taylorentwicklung. In 1] §3 haben wir den Satz v. Taylor kennengelernt, der es ermöglicht Fkt aus ihren Ableitungen in einem Pkt zu rekonstruieren – Er bleibt im Wesentlichen für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ gültig

(3) Satz über implizite Fkt: Eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ lässt sich als „Landschaft" interpretieren. Hier gehen wir der höchst relevanten Frage nach, wann sich die Höhenschichtlinien als als Fkt einer Variable schreiben lassen bzw. welche Eigenschaften diese Fkt haben.

(4) Ableitung der inversen Fkt. Ebenfalls ein Thema das wir in 1-d betrachtet, geklärt & vielfach angewendet haben. Hier lernen wir die Verallgemeinerung kennen

(5) Extremwerte. Wir studieren die Extreme von Fkt $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Differentialrechnung. Die Situation ist hier viel reichhaltiger als in 1-d und die Sätze (verwenden einiges an lin. Algebra und) sind etwas schwächer als in 1-d.

Da wir hier das Ende unserer Reise in die Grundlagen der Differentialrechnung erreichen und auf diese Resultate im Rahmen der VO nicht weiter aufbauen werden wir die techn. Details stärker in den Hintergrund treten lassen und mehr auf die Ideen & Begriffe fokussieren – insbesondere werden wir uns oft mit dem Fall $n=2$ begnügen, da er oft schon alle relevanten Aspekte beinhaltet.

4.2 MITTELWERTSÄTZE

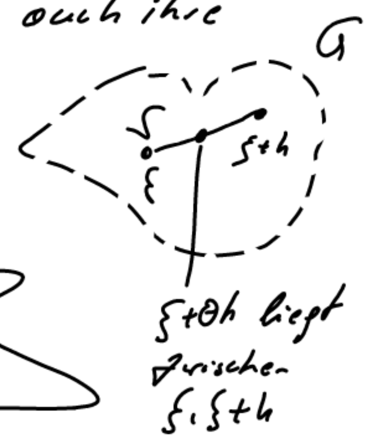
(i) Wie schon in 4.1(1) gesagt, ist im 1-d Fall der MWS das Werkzeug hinter vielen Resultaten (vgl. [B] 2.14, 2.17, 2.30, ...). Daher kann die Bedeutung eines analogen Satzes in der mehrdim Analysis garnicht überschätzt werden.

(ii) Für Fkt $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ bleibt der Satz im wesentlichen – mit den entsprechenden Anpassungen – erhalten; genauer

THM (Mittelwertsatz) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar auf G und seien $\xi, \xi+h \in G$ sodass auch ihre gesamte Verbindungsstrecke S in G liegt.
Dann $\exists\, \theta \in (0,1)$ sodass

THETA

$$f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi+\theta h)\cdot h$$



Beweis. [Anwendung des 1-d MWS & der Kettenregel]

Wir setzen $\varphi(t) := f(\xi+th)$, $t \in [0,1]$. $\varphi \mathrel{\hat=} f$ längs S

$\overset{3.24(iii)}{\Longrightarrow}$ φ diffbar auf $[0,1]$ und $\varphi'(t) = Df(\xi+th)\cdot h$

$\underset{\text{MWS}}{\overset{[3]\,2.8}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, \theta \in (0,1)$ mit $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)$ also

$$f(\xi+h) - \varphi(\xi) = Df(\xi+\theta h)\cdot h$$

$\blacksquare$

(iii) Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\underline{m>1}$) ist der Satz allerdings falsch, da die Zwischenstellen für die verschiedenen Komponenten (für diese gilt je das Thm in (ii)) durchaus verschieden sein könnten. Ein explizites Gegenbsp ist $c: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$.

Kein MWS für $m>1$ sogar wenn $n=1$

ÜE

Es gilt $[\xi = 0, h = 2\pi]$

$c(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c(2\pi)$ aber $\nexists\, \theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c(2\pi) - c(0) = Dc(\theta 2\pi)\, 2\pi =$$

(N1)

denn $Dc(t) = c'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \|c'(t)\| = 1 \Rightarrow c'(t) \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

(iv) Punkt (iii) weist aber schon in Richtung einer „Ersatz-Lösung". Wenn schon keine gemeinsame Zwischenstelle für alle Komponenten existiert, so kann man doch zumindest eine Abschätzung erreichen wenn man Schranken an alle $D_i f_j$ auf der Verbindungsstrecke von ξ nach $\xi+h$ zur Verfügung hat. Tatsächlich gilt

SATZ (MWS für vektorwertige Fkt) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar auf G und seien $\xi, \xi+h \in G$ sodass ihre Verbindungsstrecke S in G liegt. Dann $\exists M > 0$ sodass

$$\|f(\xi+h) - f(\xi)\| \leq M \|h\|$$

d.h. f ist Lipschitz stetig vgl. [3] 2.14 (i)

[Dabei ist $M = \max\{|D_i f_j(x)| : x \in S, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
$\exists$ wegen [2] 2.11].

Beweis 7.3 Heuser II, 167.4 □

(v) Schließlich halten wir folgende wichtige Konsequenz von (iv) fest

KOROLLAR: (Ableitung $= 0 \Rightarrow$ Fkt konst.) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $G = B_r(x_0)$ und $f: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar mit $Df(x) = 0$ $\forall x \in G$. Dann ist f konstant auf G. [vgl. [3] 2.14 (ii)]

ACHTUNG Korrektur gegenüber VO.

[$B_r(\xi) = \{x : \|x - \xi\| < r\}$ ist konvex [3] 2.22 (i) und somit liegen für je 2 Pkte die Verbindungsstrecken in $B_r(\xi)$. □]

4.3 Der Satz von Taylor

kann ähnlich dem MWS entlang von Strecken für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ aus dem 1d-Satz [S] 3.8] gefolgert werden. Sogar eine „komponentenweise Ausdehnung" auf $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ $(m>1)$ ist möglich; siehe [Heuser 2, 168]. Wir betrachten hier nur den 2-d Spezialfall $(n=2, m=1)$.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in G$, $h = (h_1, h_2)$ so dass die Strecke $S = \{\xi + th : 0 \le t \le 1\}$ ganz in G liegt.

Sei $f: G \to \mathbb{R}$ eine C^3-Fkt.

Wir betrachten f „über der Strecke S", d.h. $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{\{\varphi(t) = f(\xi + th) = f(\xi_1 + th_1, \xi_2 + th_2)\}}$$

Taylor 1D

$$\overset{\text{Taylor 1D}}{\underset{[S]\,3.8}{\Longrightarrow}} \underbrace{\varphi(1)}_{f(\xi+th)} = \underbrace{\varphi(0)}_{f(\xi)} + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + R_3(t) \qquad (*)$$

Wir übersetzen nun $(*)$ in eine Gleichung für f:

Kettenregel

- $\varphi'(t) \overset{3.26(iii)}{=} Df(\xi + th)\, h \implies \varphi'(0) = Df(\xi) \cdot h = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle$
- $\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\left(D_1 f(\xi_1 + th_1, \xi_2 + th_2)\, h_1 + D_2 f(\xi_1 + th_1, \xi_2 + th_2)\, h_2\right)$

$$= D_1 D_1 f(\xi + th)\, h_1^2 + D_2 D_1 f(\xi + th)\, h_2 h_1 + D_1 D_2 f(\xi + th)\, h_1 h_2 + D_2 D_2 f(\xi + th)\, h_2^2$$

$D_1^2 := D_1 D_1$

$$\overset{\text{Skalarprod}}{=} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} D_1^2 f & D_2 D_1 f \\ D_1 D_2 f & D_2^2 f \end{pmatrix}}_{=:\, H(f)(\xi + th)} (\xi + th)\, h, h \right\rangle$$

$=: H(f)(\xi + th)$ die sog. Hesse-Matrix

genauer $H(f)(\xi) := \left(D_i D_j f(\xi)\right)_{i,j}$ $\quad 3.7 \implies H(f)(\xi)$ symmetrisch falls $f \in C^2$

Insgesamt erhalten wir aus (*) die TAYLOR-ENTWICKLUNG von f in ξ

$$f(\xi+th) = f(\xi) + \langle \operatorname{grad} f(\xi), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle + R_3(\xi)$$

lineare Näherung

quadratische Form

Man kann zeigen, dass $\frac{\text{Rest}}{\|h\|} \to 0 \ (h \to 0)$.

4.4 DER SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

(i) Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben sei eine Landschaft und wir interessieren uns für die Höhenschichtlinien (etwa in einer Landkarte). Können wir diese als Funktion darstellen & wie?

Globales Auflösen sicher unmöglich: keine Graphen von Fkt $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(ii) Präzisierung der Problemstellung:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ eine C^1-Fkt.

Können wir die sog. Niveaumengen

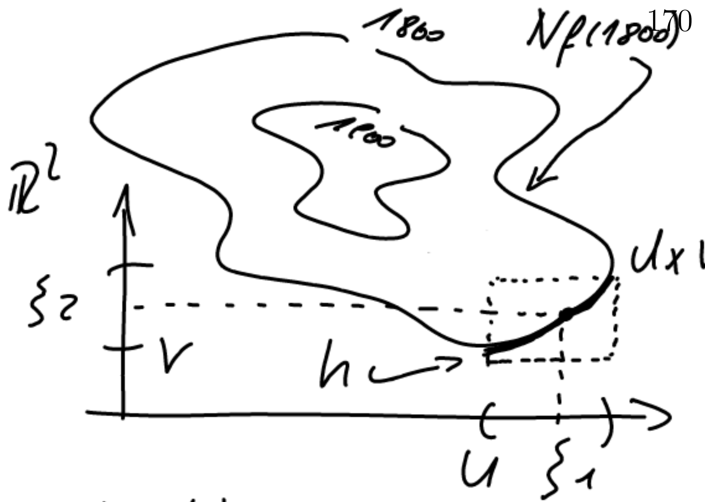
$$N_f(c) := \{(x,y)\in G : f(x,y) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

zumindest lokal, d.h. in einer Umgebung eines (jeden) Punktes $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in N_f(c)$, durch eine 1-d Fkt beschreiben? Genauer lautet die Frage also:

$$\exists h: U \to V \qquad U \text{ Umgebung von } \xi_1,\ V \text{ von } \xi_2 \quad (*)$$

sodass:
$$f(x,y) = c \iff y = h(x) \quad \forall (x,y) \in U\times V$$

Falls (*) erfüllt ist, dann sagt man



- Wir haben die Gleichung $f(x,y)=c$ „nach y aufgelöst"

bzw

- Die Fkt h ist (falls sie eindeutig ist), „durch die Gleichung $f(x,y)=c$ implizit gegeben"

[„NAME"?]

(iii) Bei der Antwort auf (ii) können wir 2 Fälle sofort ausschließen

- $c \notin f(G) \Rightarrow N_f(c)=\emptyset$ und es ist nichts zu tun
- $\operatorname{grad} f(x)=0$ auf einer Umgebung W von ξ $\overset{4.2(v)}{\Longrightarrow}$ $f(x)=c$ auf W und $N_f(c)$ ist keine Kurve

Wir nehmen daher ab jetzt an:

$$\boxed{c \in f(G), \quad \operatorname{grad} f(\xi) \neq 0} \quad (**)$$

(iv) Eine notwendige Bedingung und eine Info über h'

Ang (*) gilt, dann gilt $f(x,h(x))=c \quad \forall x \in U$

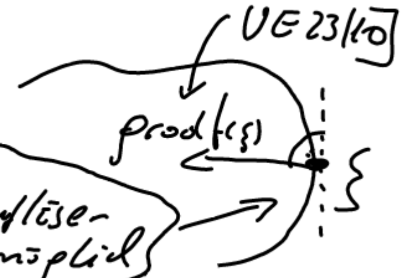
$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} \quad 0 = D_1 f(x,h(x)) + D_2 f(x,h(x))\, h'(x) \qquad (***)$

$\Longrightarrow D_2 f(\xi) \neq 0$, denn sonst $\overset{(***)}{\Longrightarrow} D_1 f(\xi)=0$

$\Longrightarrow \operatorname{grad} f(\xi)=0$ ↯ zu $(**)$

$$\Longrightarrow \boxed{h'(x) = \frac{-D_1 f(x,h(x))}{D_2 f(x,h(x))}}$$

(v) Die Bedeutung der notwendigen Bedingung $D_2 f(\xi)\neq 0$ ist, dass die Höhenschichtlinie nicht senkrecht ist; dann wäre ein Auflösen auch anschaulich nicht möglich, da der Graph der Fkt h „umdrehen" würde.



bei ξ kein Auflösen möglich

(vi) Der Witz des Satzes über implizite Fkt ist es, dass die notwendige Bed. auch hinreichend ist.

THM (IMPLIZITEN-SATZ) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^2$ offen, $f:G\to\mathbb{R}$ eine C^1-Fkt, $c\in\mathbb{R}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in G$ mit $f(\xi)=c$ und $\operatorname{grad} f(\xi)\neq 0$. Falls $D_2 f(\xi)\neq 0$, dann gibt es Umgebungen U von ξ_1 und V von ξ_2 und eine Fkt $h: U\to V$ sodass $h\in C^1$ und eindeutig mit der Eigenschaft

$$\forall x,y\in U\times V: \quad \left[\, f(x,y)=c \iff y=h(x) \,\right].$$

Außerdem gilt

$$h'(x) = -\frac{D_1 f(x,h(x))}{D_2 f(x,h(x))}$$

[Ein analoges Statement mit $D_1 f(\xi)\neq 0$ und $x=h(y)$ gilt ebenfalls.]

(vii) Ein BSP: $G=(0,\infty)^2$, $f(x)=x+y+\log(xy)$

$\xi=(1,1)$, $c=2$ [check: $f(1,1)=1+1+\log(1)=2$ ✓]

Wir wollen

$$x+y+\log(xy)=2 \qquad \text{bei } \xi=(1,1)$$

nach y auflösen.

Es gilt: $D_2 f(x,y) = 0+1+\frac{1}{xy}x = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow D_2 f(1,1)=2\neq 0$

$\overset{(vi)}{\Longrightarrow}$ $\exists h$ stetig diffbar nahe $x = 1$ mit

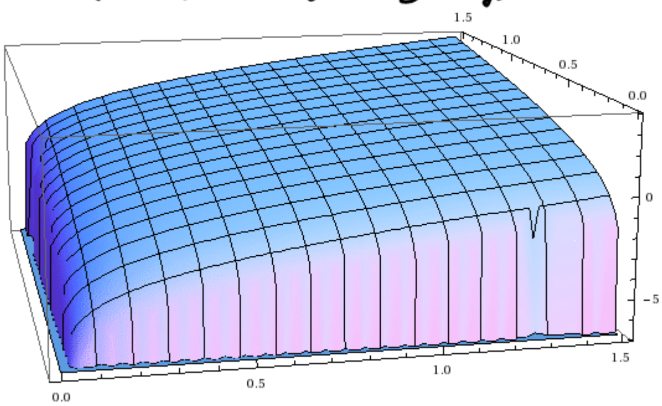
$$x + h(x) + \log(x\,h(x)) = 2$$

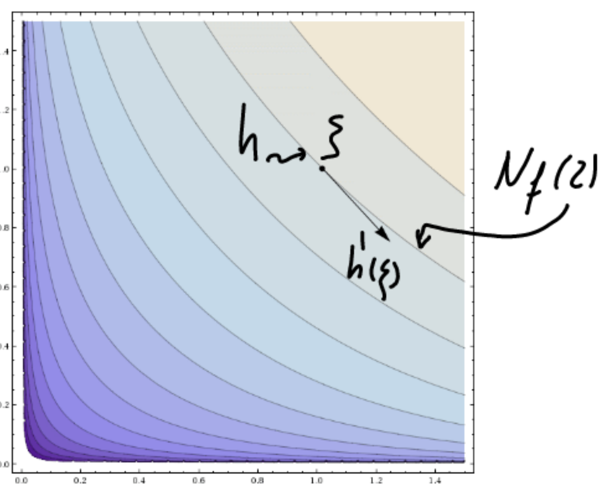
<u>ACHTUNG</u>: Das Thm liefert nur die Existenz von h, nicht aber die explizite Gestalt von h. Immerhin aber doch

$$h'(x) = \frac{-D_1 f(x, h(x))}{D_2 f(x, h(x))} = -\frac{1 + 1/x}{1 + 1/h(x)}$$

$$\Longrightarrow h'(1) = -2/2 = -1$$

$f(x,y) = x + y + \log(xy)$





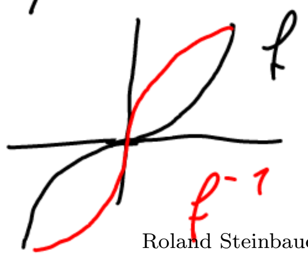
4.5 UMKEHRSATZ (Problem der Diffbarkeit der Umkehrfkt)

(i) Wir stellen uns nun folgende Frage. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $H \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : G \to H$ bijektiv ($\Rightarrow \exists\, f^{-1} : H \to G$) & diffbar.
<u>Ist dann $f^{-1} : H \to G$ diffbar?</u>

(ii) i.a. <u>NEIN</u>, denn sei $f : (-1,1) \to (1,1)$, $f(x) = x^3$

$$\Longrightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} y^{1/3} & 0 \le y < 1 \\ -|y|^{1/3} & -1 < y \le 0 \end{cases}$$

nicht diffbar bei $y = 0$



$\left[h>0: \frac{1}{h}\left(f^{-1}(h)-f^{-1}(0)\right)=1/h\, f^{-1}(h)=\frac{h^{1/3}}{h}=h^{-2/3}\to\infty\ (h\to 0)\right]$

(ii) Falls JA, dann muß $m=n$ und $Df(x)$ invertierbar sein!

Denn es gilt

$$f^{-1}\circ f(x)=x\ \forall x\in G;\quad f\circ f^{-1}(y)=y\ \forall y\in H$$

Identische Matrix auf $\mathbb{R}^m$

NICHT VORGETRAGEN

Kettenregel

$$\Rightarrow Df^{-1}(f(x))\,Df(x)=I_n;\quad Df(f^{-1}(y))\,Df^{-1}(y)=I_m$$

$\Rightarrow Df(x)$ injektiv [EMA 4.3.32(2)] $\Rightarrow n\le m$

$\Rightarrow Df^{-1}(y)$ injektiv $\Rightarrow m\le n$

$\Rightarrow m=n$ und somit $Df(x)$ bijektiv

$$\Longrightarrow D(f^{-1})(f(x))=\left(Df(x)\right)^{-1}$$

(iii) Invertieren vs Auflösen: Dem Invertieren von f entspricht das Auflösen von $f(x)=y$ nach x bzw das Auflösen von $F(x,y):=f(x)-y=0$ nach x. Daher läßt sich der Implizite-Satz 4.4(vi) verwenden um folgenden Umkehrsatz zu beweisen

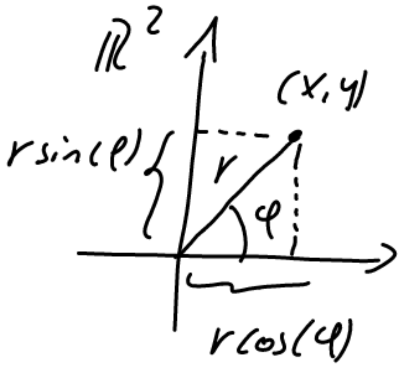
(iv) THM (Umkehrsatz) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:G\to\mathbb{R}^n$ C^1, $\xi\in G$ mit $Df(\xi)$ invertierbar. Dann gibt es Umgebungen U von ξ und V von $f(\xi)$ sodass $f:U\to V$ bijektiv ist und $f^{-1}:V\to U$ stetig diffbar mit

inv. Matrix

$$Df^{-1}(f(x))=\left(Df(x)\right)^{-1}\quad\forall x\in U.$$

(v) Diffeomorphismen. Abbildungen wie in (iv) heißen (lokale) Diffeomorphismen; genauer $f:U\to V$ bijektiv, C^1 mit C^1-Inverse heißt (C^1) Diffeomorphismus [analog, C^k-Diffeo, C^∞-Diffeo.]

(vi) BSP (POLARKOORDINATEN)



$f: G := (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix}$

ist C^1 und $Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi), -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi), r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(Df(r,\varphi)) = r(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) = r > 0$

$\overset{\text{lin Alg}}{\Longrightarrow}$ $Df(r,\varphi)$ invertierbar $\forall (r,\varphi)\in G$

$\overset{(v)}{\Longrightarrow}$ f ist in der Umgebung jedes Pktes $(r,\varphi)\in G$ ein Diffeo und $Df^{-1}(f(r,\varphi)) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

WARNUNG: f ist global (d.h. auf G) kein Diffeo

4.6. EXTREMWERTE.

(i) Wir beschäftigen uns nun mit lok. Extremwerten von Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ [$\mathbb{R}^m$ hätte wenig Sinn?]. Zunächst können die Definitionen aus dem 1-D Fall wortwörtlich übernehmen [[3] Def 2.6].

DEF (lok Extrema)

Ein Pkt $\xi\in G$ heißt lokales Maximum [Minimum], falls
$\exists$ Umgebung U von ξ mit $f(x)\le f(\xi)$ $\forall x\in U\cap G$ (*)
[$f(x)\ge f(\xi)$]

Ein Max [Min] heißt strikt, falls in (*) $<$ [$>$] statt $\le$ [$\ge$] gilt.

(ii) Wie im 1-d-Fall ist das Verschwinden der Ableitung eine notwendige Bedingung für ein Extremum; genauer gilt die folgende [vgl [2] Prop 2.4]

PROP (Notwendige Bedingung für Extrema) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und $\xi \in G$ ein lok. Extr. Dann gilt

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\xi) = 0.}$$

Beweis [Anwenden des 1-d Satzes längs der Koordinatenachsen.]

$\forall\, 1 \le i \le n$ betrachte $\varphi_i(t) := f(\xi + t e_i)$

ξ lok Extr für $f \Rightarrow t = 0$ lok Extr. für φ_i

$$\overset{[2]\,2.9}{\Longrightarrow} 0 = \varphi_i'(0) = D_i f(\xi) \Rightarrow Df(\xi) = 0 \qquad \square$$

(iii) Heuristik für hinreichende Bedingung

Aus dem 1d-Fall wissen wir, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend ist [vgl. [3] 2.6] sondern für „Kandidatenstellen" ξ mit verschwindender 1. Ableitung die 2. Ableitung in ξ betrachtet werden muß [[3] 2.18].

Um ein analoges Vorgehen im Fall $n=2$ zu erforschen ziehen wir die Taylorentwicklung 4.3(v) heran, also

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle}_{= 0 \text{ für „Kandidatenstellen"}} + \frac{1}{2} \langle Hf(\xi) h, h \rangle + \text{Rest}$$

Also wird das Verhalten von f nahe ξ von der Hesse-Matrix

$$Hf(\xi) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(\xi) & D_1 D_2 f(\xi) \\ D_1 D_2 f(\xi) & D_2^2 f(\xi) \end{pmatrix} =: A$$

dominiert, genauer gilt für x nahe ξ (dort wo Rest klein)

$$f(x) \approx f(\xi) + \frac{1}{2} \underbrace{\langle A(x-\xi) | (x-\xi) \rangle}_{\begin{cases} >0, & \text{falls } A \text{ positiv definit} \\ <0, & \text{falls } A \text{ negativ definit} \end{cases}}$$

(iv) FAKTEN AUS DER LIN ALG.

Eine symmetrische $(n\times n)$-Matrix A heißt [Heuser 2, 172.5]

- positiv definit, falls $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ $\langle Ax|x\rangle > 0$
- positiv semidefinit —"— ≥ 0
- negativ definit —"— < 0
- negativ semidefinit —"— ≤ 0
- indefinit, falls $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Ax|x\rangle > 0$, $\langle Ay|y\rangle < 0$

Ein Satz der lin. Alg [Heuser 2, 172.6] besagt für symmetrische (2×2)-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $\Delta = \det(A) = ac - b^2$:

$$\begin{aligned} A \text{ pos definit} &\iff \Delta > 0,\ a > 0 \\ \text{negativ def.} &\iff \Delta > 0,\ a < 0 \\ \text{indefinit} &\iff \Delta < 0 \end{aligned}$$

(v) Die Heuristik aus (iii) führt zum folgenden

SATZ (Hinreichende Bed f. lok. Extrema) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ eine C^2-Fkt und $\xi \in G$ mit $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} Hf(\xi) \text{ pos. definit} &\Rightarrow \xi \text{ striktes lokales Min} \\ \text{neg. definit} &\Rightarrow \xi \text{ —"— Max} \\ Hf(\xi) \text{ indefinit} &\Rightarrow \xi \text{ kein lok Extr} \end{aligned}$$

man sagt auch Sattel

(vi) Die Bedingungen in (v) sind wie im 1d-Fall nicht notwendig. Außerdem kann im Fall $Hf(\xi)$ (pos. oder neg.) semidefinit keine allg. Aussage gemacht werden.

(vii) Bsp. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=yx^2-y^3+6y^2-9y$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(2xy,\ x^2-3y^2+12y-9\right)$$

krit. Pkte: $x=0$ oder $y=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3$

$\Downarrow$ $y^2-4y+3=0$ $\quad y_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=1,3$

$$\Rightarrow \xi_1=(0,1),\ \xi_2=(0,3),\ \xi_3=(3,0),\ \xi_4=(-3,0)$$

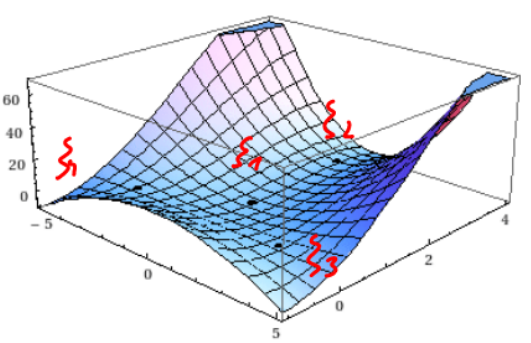
Hesse-Matrix
$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2y & 2x\\ 2x & -6y+12\end{pmatrix}$$

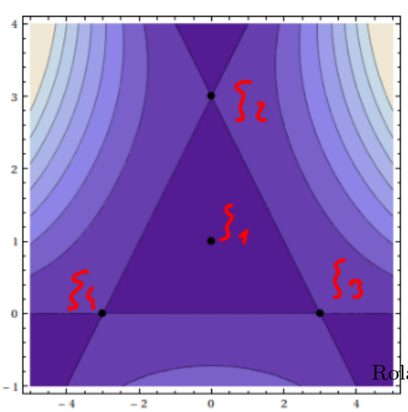
$$\Rightarrow Hf(0,1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix},\ \Delta=12>0,\ a=2>0 \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \text{pos def}$$
$$\overset{(v)}{\Longrightarrow} \text{lok Min in } (0,1)$$

$$Hf(0,3)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix},\ \Delta=-36<0 \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \text{indefinit}$$
$$\overset{(v)}{\Longrightarrow} \text{Sattelpkt in } (0,3)$$

$$Hf(3,0)=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix},\ \Delta=-36<0 \Rightarrow \text{indefinit}$$
$$\Rightarrow \text{Sattel in } (3,0)$$

$$Hf(-3,0)=\begin{pmatrix}0 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix},\ \Delta=-36<0 \Rightarrow \text{indefinit}$$
$$\Rightarrow \text{Sattel in } (-3,0)$$





7 INTEGRATION

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu. Wie im Fall $n=1$ ersichtlich hat die Integralrechnung 2 Aspekte:

(1) Berechnen der Fläche unter einem Fktsgraphen

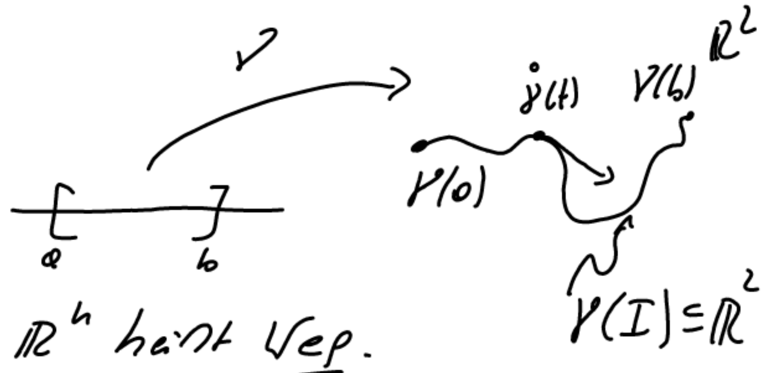
(2) Berechnen von Stammfkt

Wir werden zunächst (2) aufgreifen und Stammfkt für VF v auf $\mathbb{R}^n$ suchen, d.h. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} \varphi$. Das wird grob gesprochen durch Herstellen einer 1-d Situation über Kurven erreicht; genauer indem VF über Kurven integriert werden. Damit beschäftigen wir uns in §2. In §1 beschäftigen wir uns zur Vorbereitung mit Kurven.

Aspekt (2) greifen wir in §3 auf wo wir den R-Integralbegriff so erweitern, dass wir Volumina unter den Graphen skalarwertiger Fkt berechnen können.

Im abschließenden §4 beschäftigen wir uns mit Oberflächenintegralen & den Integralsätzen von Stokes & Gauß, die weitgehende Verallgemeinerungen des HsDI darstellen.

§1 Wege & Kurven



1.1. Def (Weg) [GAMMA]

(i) Eine stetige Abb $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg.
Ist $I = [a,b]$ und $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, dann heißt γ Weg von p nach q. ($\in \mathbb{R}^n$)

(ii) Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ ein diff'barer Weg. Dann heißt $\dot\gamma(t) := D\gamma(t)$ Tangentenvektor an γ im Pkt $\gamma(t)$. [Falls $\dot\gamma(t) \neq 0$, dann heißt $\dot\gamma(t)/\|\dot\gamma(t)\|$ Tangenteneinheitsvektor.]

(iii) Ein $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls $\dot\gamma(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

1.2 Interpretation & Bsp

(i) Kinematische Interpretation aus der Physik:

I ... Zeitintervall

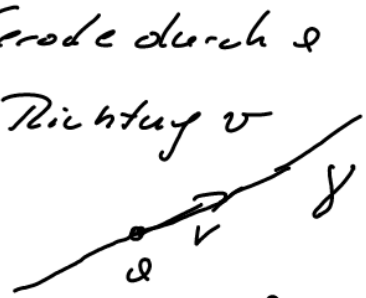
$\gamma(t)$ ... Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt $t \in I$

$\dot\gamma(t)$ ... Momentangeschwindigkeit(svektor) [velocity]

$\|\dot\gamma(t)\|$ ... „Betrag" der Momentangeschw. [speed]

(ii) $a, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$; $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = a + tv$ Gerade durch a in Richtung v

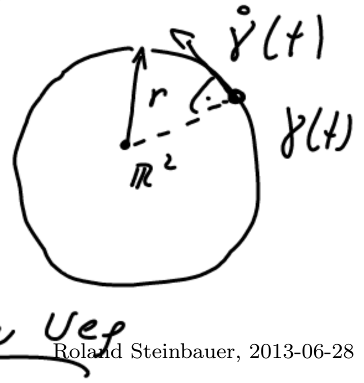
$\dot\gamma(t) = v \ \forall t \Rightarrow \gamma$ ist regulärer Weg



(iii) Sei $r > 0$, $I = [0, 2\pi]$ [vgl. [6] 2.4(i)]

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$ Kreis um den Ursprung mit Radius r

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t) \perp \gamma(t) \ \forall t$$



$\|\dot\gamma(t)\| = r > 0 \Rightarrow$ reguläre Weg

(iv) Seien $r, c > 0$, $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix}$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ \underset{\displaystyle 0}{\overset{\displaystyle c}{\neq}} \end{pmatrix} \neq 0 \implies \text{reguläre Weg}$$

Schraubenlinie vgl [6] 2.4(i)

1.3 WEG vs KURVE

(i) Oft ist man weniger an der konkreten Fkt $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ interessiert als an ihrem Bild $\gamma(I)$, das man natürlich auch durch andere Fkt $\sigma: J \to \mathbb{R}^n$ (J ein Intervall) „erzeugen" kann. Wir wollen alle solche Funktionen miteinander identifizieren. Präziser fassen wir diese Idee in den folgenden Definitionen.

[SIGMA]

(ii) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine zulässige Parametertransformation ist eine C^1-Fkt: $\varphi: I \to J$ mit $\varphi'(t) > 0 \ \forall t \in I$

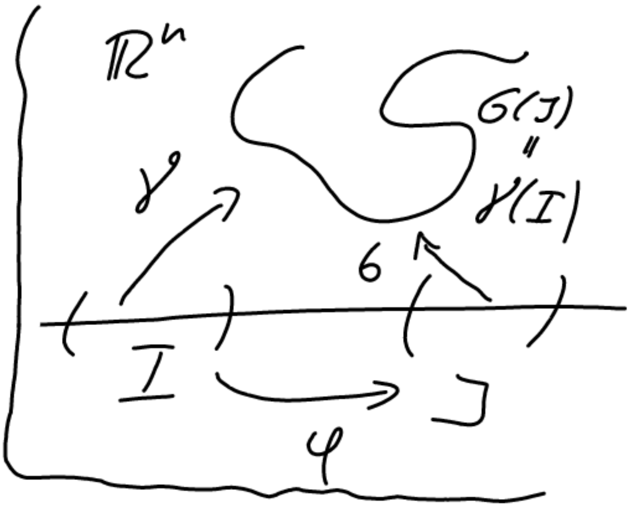
[PHI]

Zwei Wege $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma: J \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine zulässige Parametertrafo $\varphi: I \to J$ gibt mit $\sigma \circ \varphi = \gamma$; wir schreiben dann $\gamma \sim \sigma$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in $\mathbb{R}^n$ definiert.

Eine orientierte reguläre Kurve C ist dann definiert als eine Äquivalenzklasse regulärer Wege. Jeder Repräsentant γ von C heißt dann eine Parametrisierung von C.

(iii) Veranschaulichung & Bsp



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix} \quad 0\le t\le \pi \quad \mathbb{R}$$

$\gamma\sim\sigma$ denn $\varphi: [0,2\pi]\to[0,\pi]$
$\quad t\mapsto t/2$

ist zulässige Parametertrafo [$\varphi'(t)=1/2>0\ \forall t$] und
$\sigma\circ\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ mit
$$\sigma\circ\varphi(t) = \sigma(t/2) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} = \gamma(t).$$

1.4. BOGENLÄNGE

Wir wollen nun den Begriff „Länge einer Kurve" präzisieren

(i) Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ ein regulärer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

Weglänge von γ.

(ii) Bsp: $\gamma:[0,2\pi]$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}}_{1}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(iii) In der kinematischen Interpretation [vgl. 1.2(i)] ist $\|\dot\gamma(t)\|$ der Betrag der Momentangeschw. und somit entspricht $L(\gamma)$ dem zurückgelegten Weg.

Eine andere Möglichkeit zu sehen, dass $L(\gamma)$ die „Länge des Weges" beschreibt steckt in der Aussage:

$L(\gamma)$ = Limes der Gesamtlängen eingeschriebener Polygone [siehe Hauser 2, 178]

einfache Rechnung: verwendet Kettenregel & Substitution

(iv) Man kann zeigen, dass die Weglänge unabhängig von der Parametrisierung ist; genauer $\gamma \sim \sigma \Rightarrow L(\gamma) = L(\sigma)$. Daher kann der Begriff der <u>Bogenlänge einer Kurve</u> definiert werden. [genauer $L(C) = L(\gamma)$ für eine resp. jede Parametrisierung γ von C.]

(v) <u>Parametrisierung nach der Bogenlänge</u>: Unter allen Parametrisierungen γ einer Kurve C ist eine ausgezeichnet: die für die gilt $\|\dot\sigma(t)\| = 1 \ \forall t$. Das wird dadurch erreicht, dass der „neue Parameter" gleich der Länge der Kurve ist; genauer sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ irgendeine Param. von C. Wir definieren

$$\varphi^{-1}(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(s)\|\, ds, \quad \sigma = \gamma \circ \varphi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n.$$

Nun ist φ zulässige Paratrf, denn $(\varphi^{-1})'(t) = \|\dot\gamma(t)\|$

$$\Rightarrow \varphi'(s) = 1/(\varphi^{-1})'(\varphi(s)) = 1/\|\dot\gamma(\varphi(s))\| > 0 \ [\text{da } \gamma \text{ regulär}]$$

und es gilt $$\dot\sigma(s) = \dot\gamma(\varphi(s))\,\varphi'(s) = \dot\gamma(\varphi(s)) / \|\dot\gamma(\varphi(s))\|$$

also tatsächlich $\|\dot\sigma(s)\| = 1$.

1.5 AUSBLICK (Krümmung – Differentialgeometrie)

Ist C eine Kurve mit Param. nach Bogenlänge γ. Dann gilt

$$1 = \|\dot\gamma(t)\|^2 = \langle \dot\gamma(t) | \dot\gamma(t) \rangle$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \quad 0 = 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle \quad (*)$$

$\ddot\gamma$ wird Beschleunigungsvektor genannt; (*) besagt $\ddot\gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$ also enthält nur $\|\ddot\gamma(t)\|$ eine relevante/neue Information.

Die Größe $\|\ddot\gamma(t)\|$ wird Krümmung von C im Pkt $\gamma(t)$ genannt. Die Krümmung ist der Schlüsselbegriff des math. Gebiets der DIFFERENTIALGEOMETRIE!

Geometrie mit Hilfe der Differentialrechnung/Analysis

Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$ werden im Rahmen der sog. ELEMENTAREN DIFF-GEOMETRIE studiert.

mögliches Seminar-thema

§2 KURVENINTEGRALE

2.1 INTRO

In diesem § befassen wir uns mit STAMMFUNKTIONEN von Vektorfeldern. Genauer sei $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld [vgl. [6] 2.4(iii)]. Wir fragen uns unter welchen Umständen

$$\exists\, \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ sodass } \operatorname{grad} \varphi = v$$

und wie wir so ein φ konkret finden können. D.h. wir steuern auf Verallgemeinerungen des HsDI [[4] 2.7] zu.

Als Schlüsselbegriffe werden sich KURVENINTEGRALE und deren WEGUNABHÄNGIGKEIT erweisen. Wir beginnen also mit folgenden Begriffen.

Idee: „über" Kurven in die 1d Situation gelangen

2.2 KURVENINTEGRAL

(i) DEF (Wegintegral) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, v ein stetiges VF auf G [d.h. $v: G \to \mathbb{R}^n$ stetig], $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg mit $\gamma([a,b]) \subseteq G$. Dann heißt

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)) \mid \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt$$

Projektion von v in Richtung der Tangente an γ; siehe (iii)

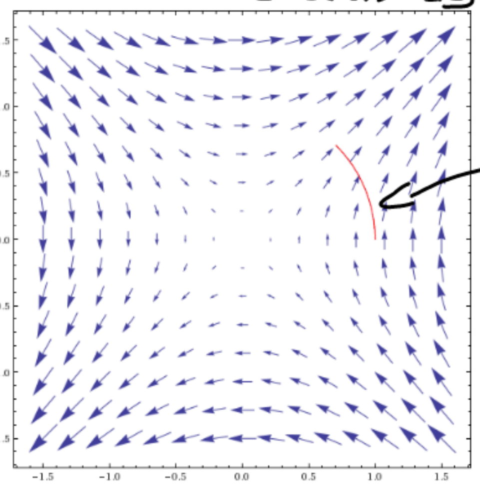
das WEGINTEGRAL von v längs γ.

Dieselbe Def funktioniert auch, falls γ nur stückweise C^1 ist, d.h. γ stetig und $\exists\, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ ist C^1 [denn die endlich vielen „Problemstellen" spürt das Integral nicht; Details [Heuser 2, S180]].

(ii) BSP $U=\mathbb{R}^2$, $v(x,y)=(y,x)$, $\gamma:[0,\pi/4]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$

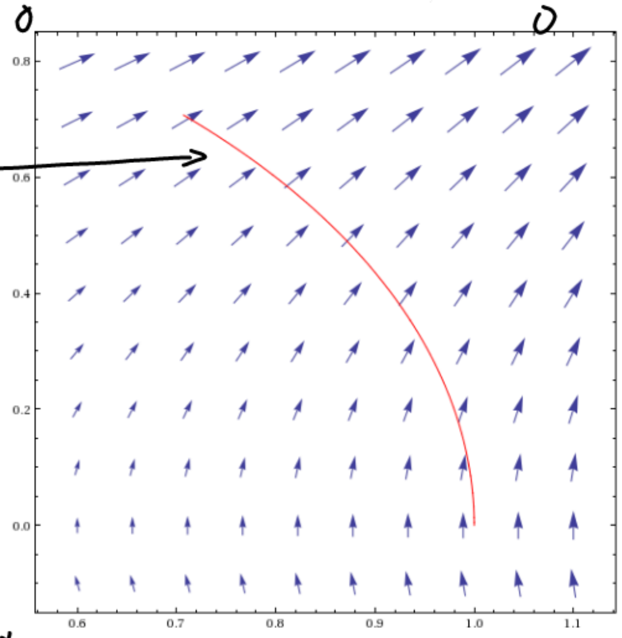
$$\int_\gamma v = \int_0^{\pi/4}\left\langle \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi/4}\underbrace{\left(-\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)}_{\cos(2t)\ [[3]\ 3.17(iv)]}dt = \int_0^{\pi/4}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$



S^γ

Viertelkreis



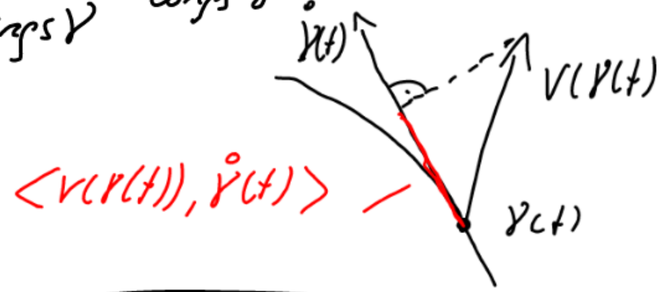
(ii') Zur Bedeutung von $\int_\gamma v$

$$\int_a^b \langle \underbrace{v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t)}\rangle\,dt \approx \text{Summe der Anteile des VF in Richtung der Kurve}$$

Tangentenvektor an γ

Projektion von v längs $\dot\gamma$

VF v längs γ



Physikalische Interpretation:

$\int_\gamma v$ ist die Arbeit die verrichtet wird falls ein Massepunkt längs γ im Kraftfeld v bewegt wird.

(iii) Eigenschaften des Wegintegrals

- $\left|\int_\gamma v\right| \le \max_{a\le t\le b}\|v(\gamma(t))\|\cdot L(\gamma)$

[3] 1.15(iii)

$$\left[\ \left|\int_\gamma v\right| \underset{[3]\,1.19}{\le} \int_a^b \underbrace{\left|\langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t)\rangle\right|}_{\overset{CS}{\le}\ \|v(\gamma(t))\|\,\|\dot\gamma(t)\|} \le \int_a^b \|v(\gamma(t))\|\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt\right.$$

∃ wegen [6] 2.15(i)

$$\left.\overset{MWSS}{\le} \max_{a\le t\le b}\|v(\gamma(t))\|\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \max_{a\le t\le b}\|v(\gamma(t))\|\ L(\gamma)\ \right]$$

- Das Wegintegral ist invariant unter Parametertrafos, genauer sei $\varphi : J \to I$ eine zulässige Parametertrafo, dann gilt

$$\boxed{\int_{\gamma\circ\varphi} v = \int_{\gamma} v .}$$

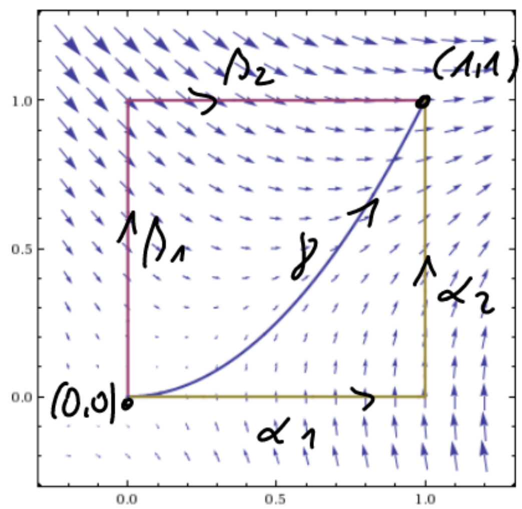
Daher kann man stetige VF über Kurven integrieren, genauer sei C eine Kurve mit Parametrisierung γ dann ist

$$\boxed{\int_C v := \int_{\gamma} v}$$

wohldefiniert (d.h. nicht von der Wahl von γ abhängig) und wir sprechen vom KURVENINTEGRAL von v über C.

2.3 EIN BSP & EINE FRAGE

Sei $G = \mathbb{R}^2$ und v ein VF auf $\mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$ und seien α, β, γ Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wie folgt



$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (t, t^2)$

$\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2, \quad \alpha_1(t) = (t, 0) \quad 0 \le t \le 1$

$\qquad \alpha_2(t) = (1, t-1) \quad 1 \le t \le 2$

$\beta = \beta_1 \oplus \beta_2, \quad \beta_1(t) = (0, t) \quad 0 \le t \le 1$

$\qquad \beta_2(t) = (t-1, 1) \quad 1 \le t \le 2$

Aneinanderhängung von Wegen: Zuerst α_1, dann α_2; das ergibt nur einen stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg – ist fürs Wegintegral aber egal [siehe (i)]

Wir berechnen

$$\int_\alpha v = \int_{\alpha_1} v + \int_{\alpha_2} v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ 2-t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 0\, dt + \int_1^2 (2-t)\, dt = -\frac{1}{2}(2-t)^2 \Big|_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\beta v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 -t\, dt + \int_1^2 1\, dt = -\frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\gamma v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t-t^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 \left(t^2 + 2t(t-t^2)\right) dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 2t^3)\, dt = \left(t^3 - \frac{t^4}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

ALLE GLEICH!

Das Wegintegral von v ist also für alle 3 Wege von (0,0) nach (1,1) gleich! WARUM?

Kann doch kein Zufall sein

Um diese Frage auf den Grund zu gehen brauchen wir etwas Terminologie...

2.4 STAMMFUNKTIONEN & GRADIENTENFELDER

(i) DEF (Stammfkt & Gradfelder) Sei v ein VF auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Falls $\exists \varphi : G \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

(PSI)

$$\{ \operatorname{grad} \varphi = v \}$$

dann sagen wir v ist ein GRADIENTENFELD und φ ist eine STAMMFUNKTION für v (auf G).

[Physik: $K = -\operatorname{grad} \varphi$, φ Potential für das Kraftfeld K]

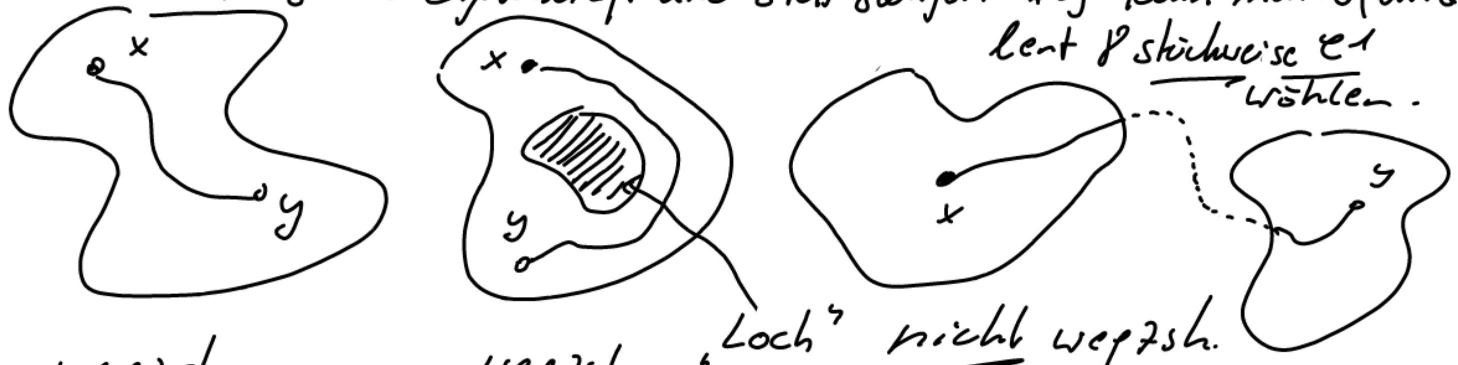
(ii) (Zur Eindeutigkeit von Stammfkt) Sei v ein C^0-VF und sei ψ Stammfunktion von v, dann ist auch $\psi + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfkt für v.
$[\operatorname{grad}(\psi + c) = \operatorname{grad} \psi = v]$

Sind umgekehrt φ, ψ zwei Stammfkt von v auf $G = B_r(x_0)$, dann ist $\varphi - \psi$ konstant, denn

offener Ball um x_0 $B_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$

$$\operatorname{grad}(\varphi - \psi) = \operatorname{grad}(\varphi) - \operatorname{grad}(\psi) = v - v = 0$$
$$\Longrightarrow D_i(\varphi - \psi) = 0 \ \forall\, 1 \le i \le n$$
$$\overset{[6]\,4.2(v)}{\Longrightarrow} \varphi - \psi \text{ konstant auf } B_r(x_0)$$

Hier wird essentiell der MWS [6] 4.2(iv) benötigt also dass die Verbindungsstrecken von je 2 Pkten in G wieder in G liegen. Tatsächlich bleibt obige Aussage richtig falls allgemeiner je 2 Pkte in G mit einem Weg verbunden werden können: genauer
Sei G offen & wegzusammenhängend, d.h. $\forall x, y \in G$ $\exists$ stetiger Weg von x nach y innerhalb von G, dann nennen wir G ein GEBIET. Tatsächlich handelt es sich hier um eine topologische Eigenschaft und statt stetigem Weg kann man äquivalent "stückweise C^1" wählen.



wegzsh   wegzsh   „Loch"   nicht wegzsh.

Nun gilt: Auf einem Gebiet unterscheiden sich je 2 Stammfkt von v nur um eine Konstante

(iii) Eine wichtige Eigenschaft von Gradientenfeldern (die hinter dem überraschenden Ergebnis in 2.3 steckt) ist

SATZ (Gradientenfelder haben wegunabhängige Kurvenint.)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, v ein stetiges Gradientenfeld auf G mit Stammfkt φ. Dann gilt $\forall\, p, q \in G$ und alle C^1-Wege γ von p nach q, die ganz in G verlaufen

$$\int_\gamma v = \varphi(q) - \varphi(p) \qquad (*)$$

Insbesondere hängt $\int_\gamma v$ nicht von γ ab; man sagt v hat wegunabhängige (Kurven-)Integrale $\quad \int_\alpha v = \int_\gamma v$

Bemerke (*) entspricht genau dem 2. Teil des HsDI:
$$\int_a^b f(t) = F(b) - F(a) \text{ für } F \text{ mit } F' = f.$$

Beweis: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wie oben. Definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F = \varphi \circ \gamma$

$$\Rightarrow F'(t) = \big(\varphi(\gamma(t))\big)' \underset{\substack{3.25(ii)\\ \text{bzw UE } 23[8]}}{=} \langle \operatorname{grad} \varphi(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle = \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma v \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt \overset{(**)}{=} \int_a^b F'(t)\, dt \overset{\text{HsDI}}{=} F(b) - F(a)$$

$$\overset{\text{Def } F}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(q) - \varphi(p). \qquad \square$$

(iv) Geschlossene Wege. Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$. Hat ein VF wegunabhängige Integrale, dann gilt offensichtlich für alle Wegintegrale über geschlossene Wege $\oint_\gamma v = 0$

Notation für Wegint. über geschlossene Wege

Man kann auch leicht die Umkehrung zeigen

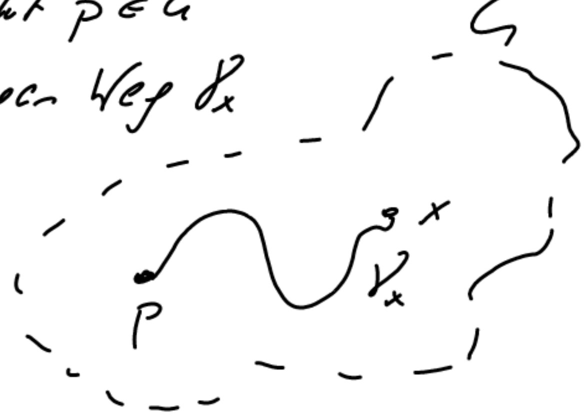
(v) Bleibt also nur noch die Frage, ob VF mit wegunabhängigen Integralen auch Stammfkt haben. Die positive Antwort gibt der folgende

SATZ (VF mit wegunabh. Integralen sind Gradientenfelder) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und v ein stetiges VF auf G mit wegunabhängigen Integralen. Dann

$$\exists \varphi: G \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^1: \operatorname{grad} \varphi = v,$$

d.h. v ist ein Gradientenfeld.
Darüberhinaus kann eine Stammfkt konkret wie folgt konstruiert werden:

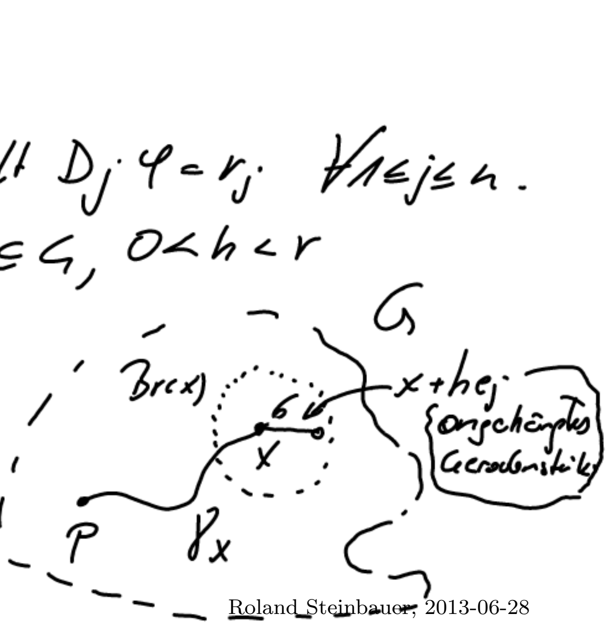
- fixiere einen beliebigen Pkt $p \in G$
- für $x \in G$ wähle einen beliebigen Weg γ_x von p nach x
- setze $\varphi(x) = \int_{\gamma_x} v$ $(*)$



Bemerke $(*)$ ist ein Analogon zum 1. Teil des HsDI:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies F' = f$$

Beweis: Zu zeigen ist: für φ wie in $(*)$ gilt $D_j \varphi = v_j$ $\forall 1 \leq j \leq n$.
Sei dazu $B_r(x)$ so klein, dass $B_r(x) \subseteq G$, $0 < h < r$
$\sigma: [0,1] \to B_r(x)$, $\sigma(t) = x + the_j$
$\implies \sigma$ ist $\mathcal{C}^1$-Weg von x nach $x + he_j$
OBdA ist $\gamma_x: [-1,0] \to G$ so parametrisiert, dass $\gamma_x(-1) = p$, $\gamma_x(0) = x$



Folie

Wir betrachten die Aneinanderhängung $\gamma_x \oplus \sigma$; das ist ein stückweiser C^1-Weg von p nach $x+he_j$. Nun gilt

Integrale wegunabh.

$$\Bigg|\underbrace{\frac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h} - v_j(x)}_{}\Bigg| = \frac{1}{|h|}\Bigg|\int_{\gamma_x\oplus\sigma} v - \int_{\gamma_x} v - h v_j(x)\Bigg|$$

27: $\to 0$

$$= \frac{1}{|h|}\Bigg|\cancel{\int_{\gamma_x} v} + \int_\sigma v - \cancel{\int_{\gamma_x} v} - v_j(x)\int_\sigma e_j\Bigg|$$

Trick: $\displaystyle\int_\sigma e_j = \int_0^1 \langle e_j | h e_j\rangle = h\int_0^1 dt = h$

$$= \frac{1}{|h|}\Bigg|\int_\sigma (v - v_j(x) e_j)\Bigg|$$

$$= \frac{1}{|h|}\Bigg|\int_0^1 \langle v(x+the_j) - v_j(x)e_j \,|\, \underbrace{he_j}_{\dot\sigma(t)\,\forall t}\rangle\, dt\Bigg|$$

$$= \frac{1}{|h|}\Bigg|\int_0^1 h\,(\underline{v_j(x+the_j) - v_j(x)})\, dt\Bigg| \le \int_0^1 |v_j(x+the_j)-v_j(x)|\, dt \longrightarrow 0$$

v_j stetig $\overset{[2]\,2.16}{\Longrightarrow}$ $v_j(x+the_j)$ glm stetig für $t\in[0,1]$

$\Longrightarrow |v_j(x+the_j)-v_j(x)| \to 0$ glm auf $[0,1]$ $(h\to 0)$

$\overset{[5]\,1.10}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\qquad}_{} \to 0 \quad (h\to 0)$

$$\Rightarrow D_j\varphi(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+the_j)-\varphi(x)}{h} = v_j(x). \qquad \square$$

(vi) <u>Zusammengefaßt</u> haben wir also folgende Situation auf Gebieten

v ist Gradientenfeld d.h. $\exists\varphi$: $\operatorname{grad}\varphi = v$ $\Longleftrightarrow$ v hat wegunabhängige Integrale

$\Updownarrow$

$\displaystyle\oint_\gamma v = 0$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

Bleibt noch die Frage: Wie kann praktisch überprüft werden, ob ein gegebenes $\mathcal{C}^0$-VF v ein Gradientenfeld ist? Um zu einer Antwort zu gelangen beginnen wir mit einer Beobachtung...

$\int_\alpha v = \int_\beta v$ für alle Wege zwischen allen Paaren von Pkten kann man schwer nachprüfen...

2.5 INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN

(i) Beobachtung: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ und $\operatorname{grad} \varphi = v$. Dann gilt

$$\underline{D_k v_j} = D_k D_j v \overset{\text{Satz v.}}{\underset{\text{Schwarz}}{=}} D_j D_k v = \underline{D_j v_k}\,, \text{ d.h.}$$

v $\mathcal{C}^1$ Gradientenfeld $\Longrightarrow$ $\boxed{D_k v_j = D_j v_k \quad \forall\, 1 \le j,k \le n}$ die sog. INTEGRABILITÄTSBED.

(ii) Ein aufklärendes Bsp: $v(x,y) = (y, x-y)$ auf $\mathbb{R}^2$ – also das VF aus 2.3. Es gilt

$$D_2 v_1(x,y) = 1 = D_1 v_2(x,y) \Longrightarrow \text{Integrabilitätsbed erfüllt}$$

Tatsächlich hat v auch eine Stammfkt, z.B. $\varphi(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$

Probe: $\operatorname{grad} \varphi(x,y) = (y, x-y)$

Somit ist aufgeklärt, warum alle 3 Integrale in 2.3 übereinstimmen!

(iii) Ein problematisches Bsp: $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$w(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$D_2 w_1(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_1 w_2(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

$=$

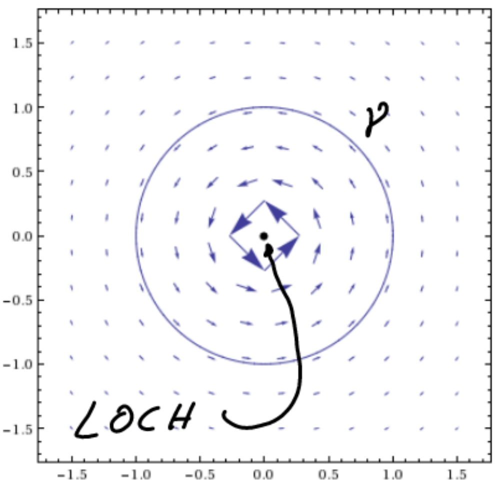
Also erfüllt w die Integrabilitätsbedingungen. $\square$

ABER w ist kein Gradientenfeld,

denn sei $\gamma:[0,2\pi]\to G$ $\quad \gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin(t)}{1}\\ \frac{\cos(t)}{1}\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$



$\overset{2.4(iii)}{\Longrightarrow}$ w kein Gradientenfeld

(iv) Es stellt sich heraus, dass das Problem im Bsp (iii) vom „Loch" im Gebiet $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ herrührt. $\square$

Man kann sogar die Existenz von VF ohne Stammfkt, die die Integrabilitätsbedingungen erfüllen zum „Erkennen von Löchern" in Gebieten einsetzen; das führt zur KOHOMOLOGIETHEORIE einem Teilgebiet der ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE.

FOLIE

Wir werden hier eine spezielle Art der „Löchervermeidung" ins Auge fassen.

FOLIE

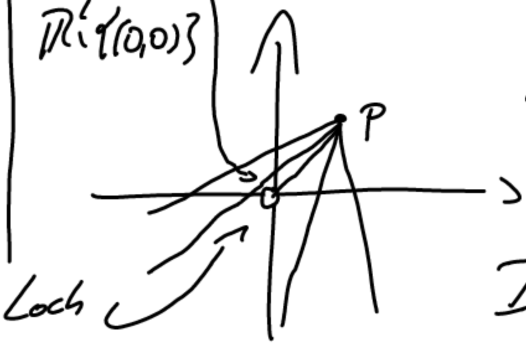
(v) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt STERNFÖRMIG, falls $\exists p \in M: \forall x \in M$ liegt die Verbindungsstrecke von p nach x ganz in M

Zentrum

sternförmig

„Jeder Winkel kann vom Zentrum aus ausgeleuchtet werden"

nicht sternförmig



Offensichtlich gilt

sternförmig $\Longrightarrow$ wegzusammenhängend

Die zentrale Aussage ist nun

d.h. offen & zshgd.

(vi) SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und sei v ein $\mathcal{C}^1$ VF auf G. Dann gilt

v ist Gradientenfeld $\Longleftrightarrow$ v erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

Beweisskizze: ($\Longrightarrow$): siehe (i)

($\Longleftarrow$): OBdA ist G sternförmig bzgl $p=0$ [die Integrabbed. ändern sich nicht bei Verschiebung $\tilde{v}(x)=v(x-p)$]

Für $x\in G$ sei $\sigma_x:[0,1]\to G$, $\sigma_x(t)=tx$ die Verbindungsstrecke von 0 nach x

Definiere $\varphi(x) := \int_{\sigma_x} V$ [selbe Idee wie in 2.4(ii)]

$$= \int_0^1 \langle V(tx) | x \rangle \, dt = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 V_k(tx)\, dt$$

Nun gilt

$$\underline{D_j \varphi(x)} \overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{k=1}^n \Big(\underbrace{D_j x_k}_{\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}} \int_0^1 V_k(tx)\, dt + x_k \underbrace{D_j \Big(\int_0^1 V_k(tx)\, dt\Big)}_{\int_0^1 D_j V_k(tx)\, dt} \Big)$$

Diffquot. kann unter das Integral gezogen werden, siehe [Heuser 2, 113.2]

Kettenregel

$$= \int_0^1 V_j(tx)\, dt + \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 t \underbrace{D_j V_k(tx)}_{= D_k V_j(tx)}\, dt$$

Integrabilitätsbed

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{V_j(tx)}_{=: f(t)} + t \underbrace{\langle \operatorname{grad} V_j(tx) | x \rangle}_{f'(t)} \Big)\, dt$$

Trick

Kettenregel 3.25(ii) bzw UE 23[8]

$$= \int_0^1 \big(\underbrace{t' f(t) + t f'(t)}_{(t f(t))'} \big)\, dt = \int_0^1 \big(t f(t) \big)'\, dt =$$

HsDI

$$= t f(t) \Big|_0^1 = f(1) - 0 = \underline{V_j(x)}$$

Also gilt $\operatorname{grad} \varphi = V$. $\square$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

(vii) Zusammenfassung der Gesamtsituation: v stetiges VF auf Gebiet G

$$\boxed{\begin{array}{c}v \text{ Gradientenfeld}\\ [\text{dh } v = \operatorname{grad}\varphi]\end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Integrale}\\ \text{wegunabh.}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\oint v = 0}$$

$v \in \mathcal{C}^1 \Longrightarrow \Downarrow \qquad \Uparrow \Longleftarrow$ sternförmig

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Integrabilitäts-}\\ \text{bedingungen}\end{array}}$$

Zum ganzen Glück fehlt uns noch eine Prozedur zum expliziten Finden einer Stammfkt

2.6 PRAKTISCHE BESTIMMUNG EINER STAMMFKT

Vorgelegt sei ein $\mathcal{C}^1$-VF v auf einem Gebiet G

(i) Ein Flussdiagramm zur Abklärung der Situation

G sternf. — NEIN — Andere Methode suchen, um zu sehen ob Integrale wegunabh.

JA

Intbed — NEIN — v hat keine Stammfkt

JA

Stammfkt $\exists$ — Konstruiere Stammfkt hier nur speziell für $n=2$

(ii) Explizite Konstruktion einer Stammfkt für $n=2$

$v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ erfüllt $D_1 v_2 = D_2 v_1$ [Details siehe Heuser 2, 183]

1. SCHRITT: Ansatz $\varphi(x,y) = \int v_1(x,y)\,dx + h(y)$ noch zu finden

D.h. eine Stammfkt; vgl [5] 2.10 (iii)

[dann gilt nämlich $D_1 \varphi = v_1$]

2. SCHRITT: d.h. soll sein

$$v_2(x,y) \overset{!}{=} \partial_y \varphi(x,y) = \int \partial_y v_1(x,y)\,dx + h'(y)$$

$$\Longrightarrow h'(y) = v_2(x,y) - \int \partial_y v_1(x,y)\,dx$$

Daraus kann h mittels Integration berechnet werden.

(iii) Bsp. $v(x,y) = (3x^2y, x^3)$ $\quad G = \mathbb{R}^2$

G sternförmig ✓

Intbed. $D_2 v_1 = 3x^2 = D_1 v_2$ ✓

Ansatz: $\varphi(x,y) = \int 3x^2y\,dx + h(y) = x^3y + h(y)$

$$v_2 = x^3 \overset{!}{=} \partial_y \varphi = x^3 + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0$$

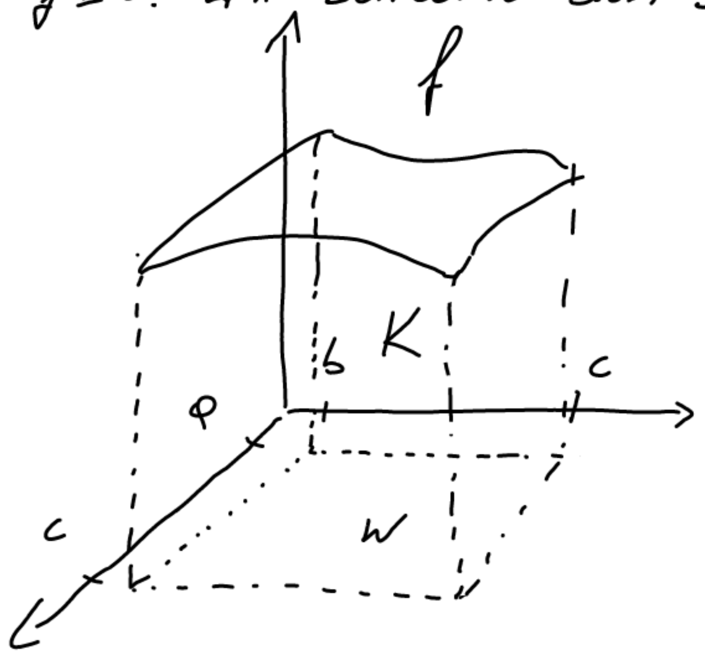
wähle $h(y) = 0$ und somit $\varphi(x,y) = x^3y$

Probe: $\operatorname{grad} \varphi = (3x^2y, x^3)$ ✓

§3 MEHRFACHE INTEGRALE

3.1 GRUNDIDEE (Volumen unter dem Graphen einer Fkt)

Sei $W = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und $f : W \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$. Wir betrachten den 3-D Bereich



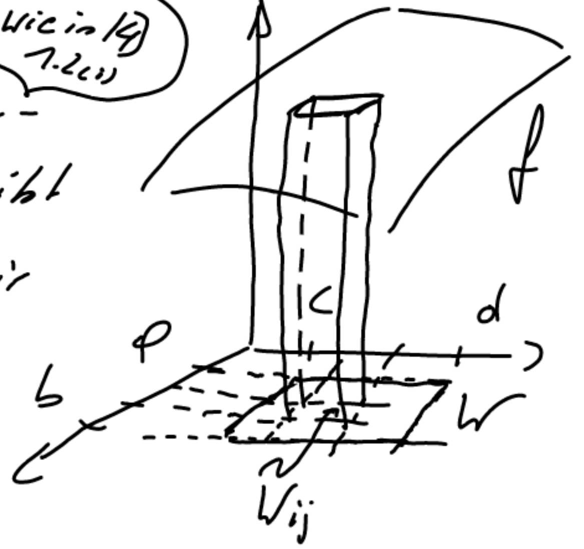
$$K := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in W,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

zwischen $(x$-$y)$-Ebene und der „Fläche" $z = f(x,y)$ also dem Graphen von f und wollen sein Volumen berechnen.

Eine Möglichkeit das Volumen $\mathrm{Vol}(K)$ von K näherungsweise zu berechnen besteht darin, Summen von Quadervolumina über kleinen Teilrechtecken von W zu bilden.

wie in [1] 1.2(ii)

Genauer seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$, $[c,d]$ dann ergibt sich eine Zerlegung W_{ij} von W und wir definieren



$$m_{ij} := \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in W_{ij}\}$$
$$M_{ij} := \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in W_{ij}\}.$$

Dann gilt sicherlich

$$\underbrace{\sum_{i,j} m_{ij} \cdot \text{Fläche } W_{ij}}_{\text{Untersumme}} \leq \mathrm{Vol}(K) \leq \underbrace{\sum_{i,j} M_{ij} \cdot \text{Fläche } W_{ij}}_{\text{Obersumme}}$$

Jetzt offiziell

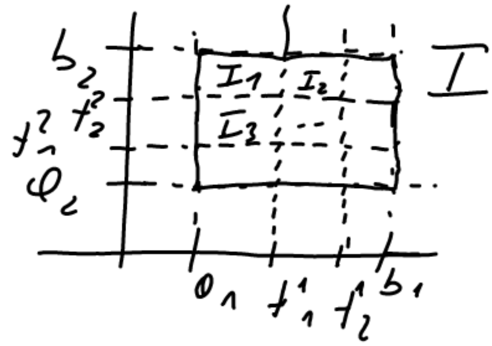
3.2 Integral über n-dim Intervalle

(i) Seien $a_\ell \le b_\ell$ $1 \le \ell \le n$, dann heißt $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kompaktes n-dim Intervall.

$|I| := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ heißt Inhalt von I

[$n=2$ ... Rechteck, $n=3$ ... Quader, ...]

(ii) Eine Zerlegung von I ist definiert als ein Produkt $Z_1 \times \dots \times Z_n$ wobei Z_j eine Zerlegung von $[a_j, b_j]$ in Teilintervalle gemäß [K] 1.2(i) ist, d.h.
$Z_j = \{a_j = t_0^j < t_1^j < \dots < t_n^j = b_j\}$.



Um die Notation übersichtlich zu halten, nummerieren wir die entstehenden n-dim Teilintervalle I_k beliebig, sodass

$$\boxed{I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k}$$

Beachte, dass die n-dim Teilintervalle I_k und I_ℓ höchstens Ränder gemeinsam haben

(iii) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Fkt. Wir setzen

$$m_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}, \; M_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$$

und bezeichnen

$$U(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{N} m_k |I_k|$$ <u>Untersumme</u> und

$$O(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k|$$ <u>Obersumme</u> von f bzgl $\mathcal{Z}$

(iv) Wir definieren <u>Ober- & Unterintegral</u> von f über I als

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{*I} f(x)\,dx &= \sup_{\mathcal{Z}} U(f,\mathcal{Z}) \\ \int_I^{*} f(x)\,dx &= \inf_{\mathcal{Z}} O(f,\mathcal{Z}) \end{aligned}}$$

Kurzschreib-weise

Offensichtlich gilt $\int_{*I} f\,dx \le \int_I^{*} f\,dx$

(v) Ein beschränktes f heißt <u>integrierbar</u>, falls $\int_{*I} f\,dx = \int_I^{*} f\,dx$ gilt und definieren das Integral von f über I als

$$\int_I f(x)\,dx := \int_{*I} f(x)\,dx \left[= \int_I^{*} f(x)\,dx \right]$$

Schreibweise $\int_I f = \int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_n)$

3.3 INTBARE FKT & EIGENSCHAFTEN DES INT

Sei I ein kp n-dim Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt

NICHT VORGETRAGEN

(i) Folgende Charakterisierung intbarer Fkt is nicht schwer zu beweisen

$$f \text{ intbar auf } \underline{I} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ Zerlegung } \mathcal{Z} \text{ von } I \text{ mit } O(f,\mathcal{Z}) - U(f,\mathcal{Z}) < \varepsilon$$

(ii) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f intbar auf I.

(iii) Eigenschaften des Integrals (Beweise alle nicht schwer)

- Linearität: Sind $f,g: I \to \mathbb{R}$ intbar $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f+g \text{ ist intbar } \& \int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$
$$\lambda f \text{ ist intbar } \& \int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$$

- Monotonie: Sind $f,g: I \to \mathbb{R}$ intbar mit $f \leq g$ dann gilt

$$\int_I f\,dx \leq \int_I g\,dx$$

Insbesondere gilt

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_I f \geq 0$$
$$|f| \leq M \Rightarrow \int_I f \leq M|I|$$

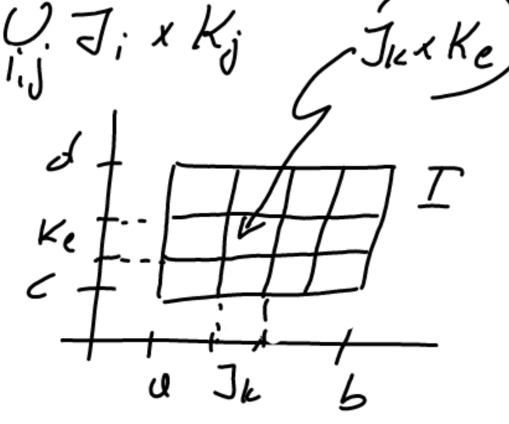
3.4. ITERIERTE INTEGRALE & DER SATZ V. FUBINI

(i) Fragestellung: Sei $J = [a,b]$, $K = [c,d]$ und $I = J \times K$ und $f: I \to \mathbb{R}$ intbar.

Wie können wir $\int_I f$ konkret ausrechnen?

(ii) Die Idee: Zurückführen auf nacheinander ausgeführte 1-d Integrale

Seien $J=\bigcup_{i=1}^{M} J_i$ und $K=\bigcup_{j=1}^{N} K_j$ Zerlegungen in Teilintervalle. Dann ist $I=\bigcup_{i,j} J_i \times K_j$



Wir sehen

$$m_{ij}=\inf\{f(x,y) \mid (x,y)\in J_i\times K_j\}$$
$$M_{ij}=\sup\{f(x,y) \mid (x,y)\in J_i\times K_j\}$$

Dann gilt

$$\forall (x,y)\in J_i\times K_j: \quad m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$$

$$\xRightarrow[\text{bzgl } x]{\text{Int über } J_i} \quad m_{ij}|J_i| \le \int_{*J_i} f(x,y)\,dx \le \int^{*}_{J_i} f(x,y)\,dy \le M_{ij}|J_i|$$

$$\xRightarrow{J=\bigcup J_i} \quad \sum_i m_{ij}|J_i| \le \sum_i \int_{*J_i} f(x,y)\,dx = \underbrace{\int_{*J} f(x,y)\,dx}_{=:F(y)}$$

und

$$G(y):=\int^{*}_{J} f(x,y)\,dx \le \sum_i M_{ij}|J_i|$$

$$\xRightarrow[\text{bzgl } y]{\text{Int über } K_j} \quad \sum_i m_{ij} \overbrace{|J_i||K_j|}^{|J_i\times K_j|} \le \int_{*K_j} \Big(\overbrace{\int_{*J} f(x,y)\,dx}^{F(y)}\Big)\,dy$$

und

$$\int^{*}_{K_j} \Big(\overbrace{\int^{*}_{J} f(x,y)\,dx}^{G(y)}\Big)\,dy \le \sum_i M_{ij} \overbrace{|J_i||K_j|}^{|J_i\times K_j|}$$

$$\xRightarrow[\text{über } j]{\text{Summation}} \quad \underbrace{\sum_{i,j} m_{ij}|J_i\times K_j|}_{=U(f,Z)} \le \int_{*K}\Big(\int_{*J} f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

$$\le \int^{*}_{K}\Big(\int^{*}_{J} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \le \underbrace{\sum_{i,j} M_{ij}|J_i\times K_j|}_{O(f,Z)}$$

$$\text{sup über } Z \Big\downarrow \qquad \int_{*J\times K} f(x,y)\,d(x,y) \overset{f \text{ int'b}}{=\!=} \int^{*}_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) \xleftarrow{\inf Z} O(f,Z)$$

Daraus ergibt sich mit einigen Zusatzüberlegungen [oB]

$$\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_K\Big(\int_J f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

analog $$= \int_J\Big(\int_K f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

(iii) Allgemein gilt im $\mathbb{R}^n$ der Satz v. Fubini:

Sei J ein m-dim kp Intervall, K ein n-dim kp Intervall und sei $f: J\times K\to\mathbb{R}$ intbar. Dann gilt

$$\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_J\Big(\int_K f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_K\Big(\int_J f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

(iv) Daraus ergibt sich für $I=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ und f intbar $I\to\mathbb{R}$

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

wobei die Reihenfolge der 1-d Integrale beliebig geändert werden darf.

(v) Bsp. $I=[0,1]^3$, $f: I\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xyz$

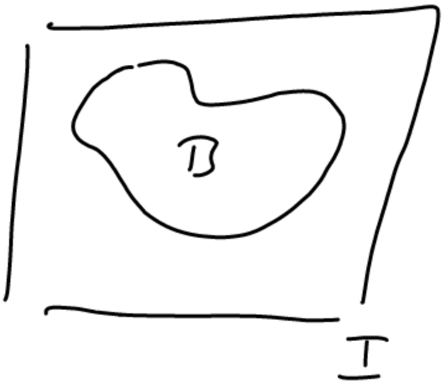
$$\int_I f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 yz\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 yz\,dy\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dz = \Big(\frac{1}{2}\Big)^3 = \frac{1}{8}$$

3.5 INTEGRALE ÜBER ALLGEMEINE BEREICHE

(i) Motivation: Weder für die Praxis noch die Theorie ist es ausreichend Funktionen nur über n-dim Intervalle zu integrieren. Wir werden nun unseren Integralbegriff auf allgemeinere Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ erweitern.

(ii) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt [d.h. $\exists R: B \subseteq B_R(0)$ vgl. [6] §1], dann gibt es sicherlich ein n-dim Intervall I mit $B \subseteq I$. Für $f: B \to \mathbb{R}$ definieren wir



$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschr. $\Leftrightarrow$ f beschränkt.

Wir sagen f sei auf B integrierbar, falls

f_B auf I intbar ist.

Es ist leicht zu sehen, dass dies nicht von der Wahl von I abhängt. Daher definieren wir weiters

$$\int_B f(x)\,dx = \int_I f_B(x)\,dx.$$

(iii) Die Rolle von B. Ob eine Fkt f über B intbar ist hängt sowohl von f als auch von B ab! Klarerweise ist man nur an solchen Bereichen B interessiert, auf denen die Fkt 1 bzw die charakteristische Fkt χ_B intbar ist. Dazu darf B nicht zu stark „zerfranst“ sein, vgl. [4] 1.9(ii): $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht intbar.

Wir geben den Mengen unseres Interesses einen Namen

(iv) DEF. Eine nichtleere, beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt JORDAN-MESSBAR, falls 1 intbar auf B ist [oder was dasselbe ist χ_B intbar ist] Kurz: messbar

In diesem Fall nennen wir

$$|B| := \int_B 1$$

der (Jordan-)Inhalt von B.

Im Fall $n=2$ auch (Jordan)-Fläche

$n=3$ (Jordan)-Volumen

(v) Wie häßlich kann B sein?

Eine Antwort liefert [Heuser 2, 201.2]: Der Rand von B darf nicht zu lang/groß werden.

Genauer: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gilt

B (Jordan-)messbar

$\Longleftrightarrow$ ∂B ist eine (Jordan-)Nullmenge

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ endlich viele n-dim kp Intervalle $I_1, \dots, I_n$ mit $\partial B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ und $\sum_{j=1}^{m} |I_j| < \varepsilon$

Rand von B

$x \in \partial B$

$:\Leftrightarrow \forall$ Umgebung U von x: $U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap B^c \neq \emptyset$

(vi) Eigenschaften des Integrals (die üblichen Verdächtigen)

Sei B J-messbar, $f,g: B \to \mathbb{R}$ intbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

• Linearität: $f+g$, λf intbar und

$$\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g\,, \quad \int_B (\lambda f) = \lambda \int_B f$$

• Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$

insbes $$\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f|$$

• MWS-$\int$: Falls $\exists\, m, M$: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in B$
$\Longrightarrow$

$$m\,|B| \leq \int_B f \leq M\,|B|$$

• A messbar, $A \cap B = \emptyset$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ intbar auf A & B

$\Longrightarrow$ $$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$ und speziell mit $f = 1$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

• Sei B kp & messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f intbar auf B

• Parameterintegral: $f: [a,b] \times B \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere φ als sog. Parameterintegral: $\varphi [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) := \int_B f(t,x)\,dx$$

[Heuser, 201.13]

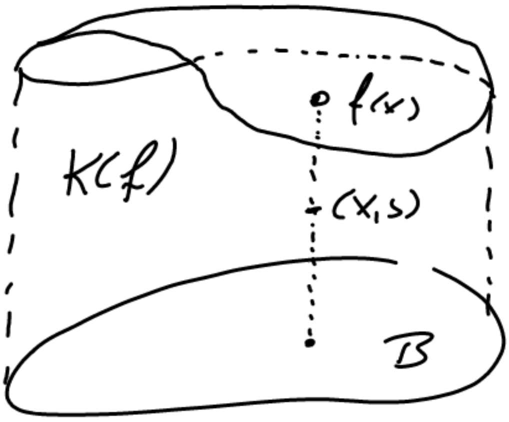
SEHR WICHTIGES KONZEPT

$\Longrightarrow \varphi$ stetig.

Falls $\partial_t f$ stetig $\Rightarrow \varphi$ diffbar mit $\varphi'(t) = \int_B \partial_t f(t,x)\,dx$

3.6 INHALT UNTER DEM GRAPHEN EINER FKT

(i) Die Fragestellung: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \geq 0$.



Wir betrachten die „Menge unter dem Graphen" die sog. Ordinatenmenge von f:

$$K(f) := \{(x,s) \in B \times \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Man kann zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen $K(f)$ messbar ist [Heuser 2. 203.1]. Darüberhinaus gilt

(ii) SATZ

$$|K(f)| = \int_B f$$

Spezialfall $n=1$
$B=[a,b]$

$$|K(f)| = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis. f int'bar $\Rightarrow$ f beschränkt
$\Rightarrow \exists C \geq 0: \ 0 \leq f(x) \leq C \ \forall x \in B$

B messbar $\Rightarrow$ B beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ n-dim kp Intervall I mit $B \subseteq I$

$\Rightarrow K(f) \subseteq I \times [0, C] =: J$ $(n+1)$-dim kp Intervall

Wir können rechnen

$$|K(f)| = \int_{K(f)} 1 \, d(x,s) = \int_J \chi_{K(f)} \, d(x,s) \overset{\text{[Fubini]}}{=} \int_I \Big(\int_0^C \chi_{K(f)}(x,s)\, ds \Big) dx. \qquad (*)$$

nicht vorgetragen

Für $x \in I \setminus B$ gilt $\chi_{K(f)}(x,s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$f_B(x) = 0$$

Für $x \in B$ ist $\chi_{K(f)}(x,s) = \begin{cases} 1 & 0 \le s \le f(x) \ [\Leftrightarrow s \in [0, f(x)]] \\ 0 & s \notin [0, f(x)] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^c \chi_{K(f)}(x,s)\, ds = \int_0^{f_B(x)} 1\, ds \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \underline{|K(f)|} \overset{(*)}{=} \int_I \Big(\int_0^{f_B(x)} 1\, ds \Big) dx = \int_I f_B(x) = \underline{\int_B f(x)\, dx} \qquad \square$$

(iii) Bsp (Kreisscheibe) $\quad B = [-r, r],\ r > 0,\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$K(f)$ ... Halbkreisscheibe vom Radius r

$$|K(f)| = \int_B \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= \begin{bmatrix} \text{subst} \\ x = r\sin(t) \end{bmatrix} \text{; siehe 1.4 2.17 (iii)}$$

$$= r^2 \, \pi/2$$

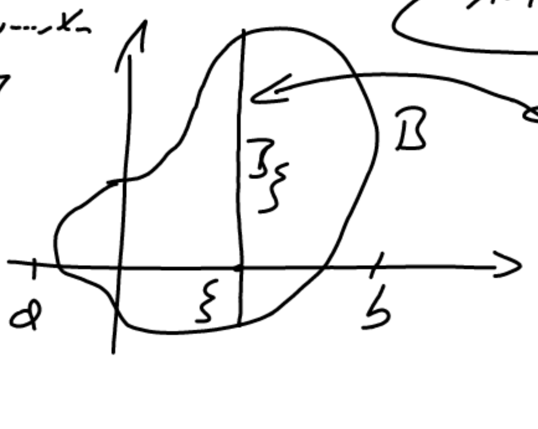
3.7 DAS PRINZIP VON CAVALIERI

(i) Die Idee: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ gelte $a \le x_1 \le b$ ← Einschränkung in 1. Koordinate

Bezeichne für $\xi \in [a,b]$

$$B_\xi := \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (\xi, x_2, \dots, x_n) \in B\}$$

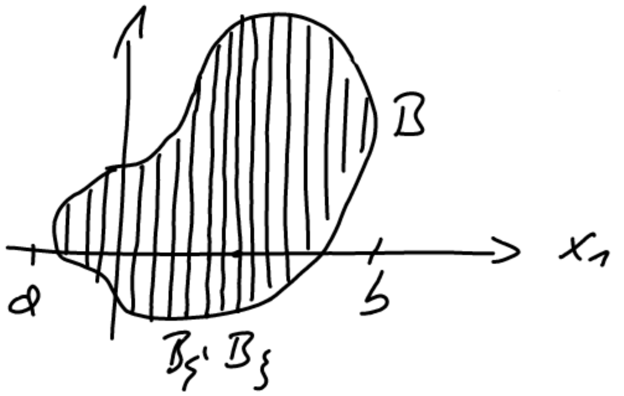
und $q(\xi) := |B_\xi|$



Schnitt von B mit Ebene $x_1 = \xi$

Die Idee des Prinzips von Cavalieri ist es nun den Inhalt von B mittels „Salamitaktik" zu berechnen indem alle $\rho(\xi)$ „aufsummiert" d.h. aufintegriert werden.

„Genauer gilt der folgende



(ii) SATZ: $\boxed{|B| = \int_a^b \rho(\xi)\,d\xi}$

Beweis [ähnliche Idee wie 3.6(ii)]

Sei J ein $(n-1)$ dim kp Intervall sodass $B \subseteq [a,b] \times J$, dann gilt

$$|B| = \int_B 1\,dx = \int_{[a,b]\times J} \chi_B(x)\,dx \overset{[\text{Fubini}]}{=} \int_a^b \Big(\int_J \chi_B(\xi, x_1, \dots, x_n)\, d(x_1 \dots x_n) \Big) d\xi. \qquad (*)$$

Es gilt

$$\chi_B(\xi, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \begin{matrix} 0 & (x_2, \dots, x_n) \notin B_\xi \\ 1 & (x_2, \dots, x_n) \in B_\xi \end{matrix} \right\} = \chi_{B_\xi}(x_2, \dots, x_n) \qquad (**)$$

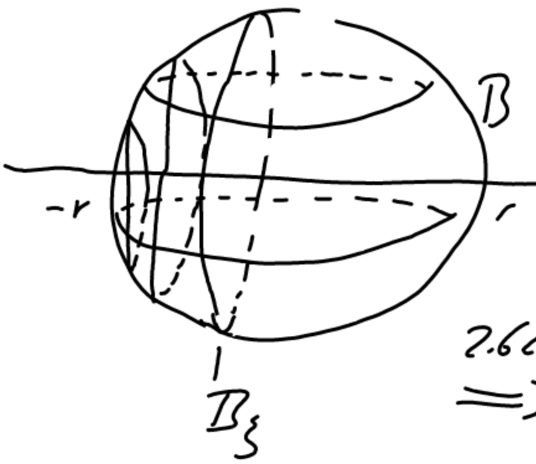
und daher

$$|B| \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \int_a^b \Big(\underbrace{\int_J \chi_{B_\xi}(x_2, \dots, x_n)\, d(x_2, \dots, x_n)}_{= \int_{B_\xi} 1\, d(x_2, \dots, x_n) = |B_\xi| = \rho(\xi)} \Big) d\xi = \int_a^b \rho(\xi)\, d\xi$$

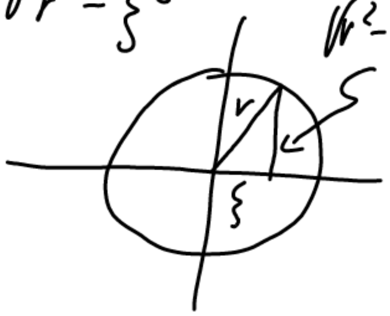
$\square$

(iii) Bsp (Kugel) $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le r\}$ $(r>0)$

Kugel vom Radius r



Für $-r\le\xi\le r$ ist B_ξ eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2-\xi^2}$



$$\overset{2.6(iii)}{\Longrightarrow} |B_\xi| = \rho(\xi) = (r^2-\xi^2)\pi$$

$$\Longrightarrow |B| \overset{(ii)}{=} \int_{-r}^{r} (r^2-\xi^2)\pi\, d\xi = \pi\left(r^2\xi - \frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_{\xi=-r}^{\xi=r}$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

3.8 Integration über Normalbereiche

(i) Fragestellung & DEF. Wir stellen eine weitere Methode vor, Funktionen über „schöne" Flächen zu integrieren; eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen kann problemlos bewerkstelligt werden.

bzgl. einer Koordinate durch Graphen begrenzt

WEGGELASSEN

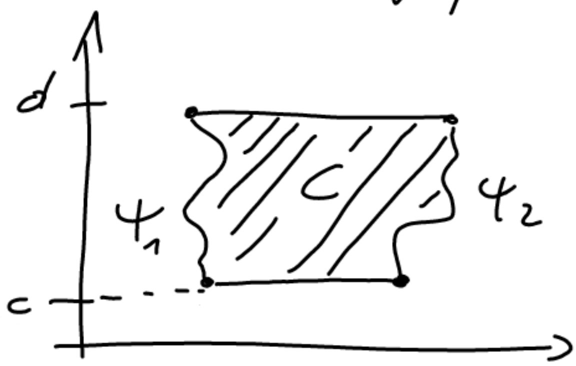
Eine Menge $B\subseteq\mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bzgl. der x-Achse, falls
$$B=\{(x,y) \mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(y)\}$$
wobei $a,b\in\mathbb{R}$, $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetige Fkt sind

Analog dazu heißt $C \subseteq \mathbb{R}^2$ Normalbereich bzgl der y-Achse, falls

$$C = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

mit $c, d \in \mathbb{R}$ und

$\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig



Die Integration über Normalbereiche kann nun mittels derselben Ideen wie in 3.6, 3.7 bewerkstelligt werden.

(ii) SATZ Sei B [C] ein Normalbereich bzgl. der x-[y-] Achse und sei $f : B \to \mathbb{R}$ bzw $f : C \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \Big) dx \qquad \text{bzw}$$

$$\int_C f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \Big) dy$$

WEGGELASSEN

Beweis. Wir behandeln nur den 1. Fall, der 2. ist analog.

Setze $m := \min \varphi_1$, $M = \max \varphi_2$ [$\exists$ weil f stetig auf $[a,b]$]

$I := [a,b] \times [m, M]$

Es gilt

$$\int_B f = \int_I f_B\, d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \Big(\int_m^M f_B(x,y)\, dy \Big) dx. \quad (*)$$

Für $x \in [a,b]$ fix gilt:

$$f_B(x,y) = \begin{cases} 0 & y \notin [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \\ f(x,y) & y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \end{cases}$$

Daher $\displaystyle\int_B f \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \int_0^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(y,x)\,dy \right) dx .$ $\square$

Ja, das gibt es
siehe Bsp (iv)

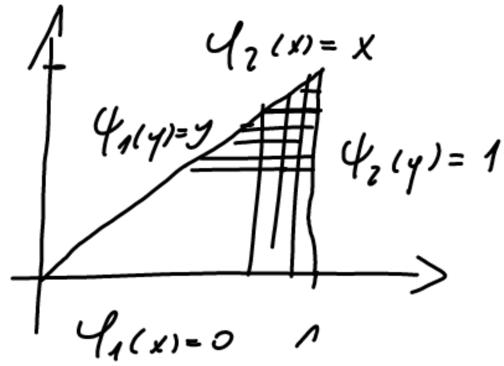
(iii) Eine einfache Folgerung aus (ii) ist

<u>KOR</u>. Sei A NB bzgl x- und y-Achse, dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)\,dx \right) dy$$

WEGLASSEN

(iv) <u>BSP</u>. Sei A wie folgt, f stetig auf A.

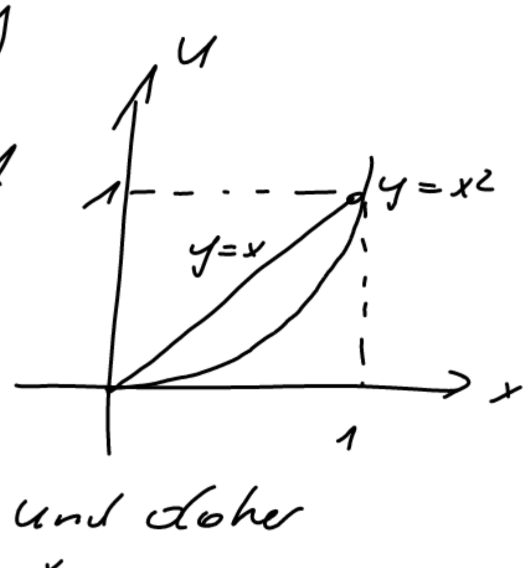


Dann ist A NB bzgl x- & y-Achse und daher

$$\int_A f = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

(v) <u>Ein explizites Bsp</u>

$f(x,y)=xy$ und B der Bereich im 1. Quadranten zwischen den Fkt $y=x$ und $y=x^2$



• B ist NB bzgl der x-Achse mit $\varphi_1(x)=x^2$, $\varphi_2(x)=x$, $x\in[0,1]$ und daher

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x} dx =$$

WEGGELASSEN

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-x^5)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

- B ist auch NB bzgl y-Achse mit $\psi_1(y)=y$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$, $y\in[0,1]$ und es ergibt sich

Zum Spaß auch andersrum

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1\left(\int_y^{\sqrt{y}} xy\,dx\right)dy = \int_0^1 y\,\frac{x^2}{2}\Big|_y^{\sqrt{y}}\,dy$$

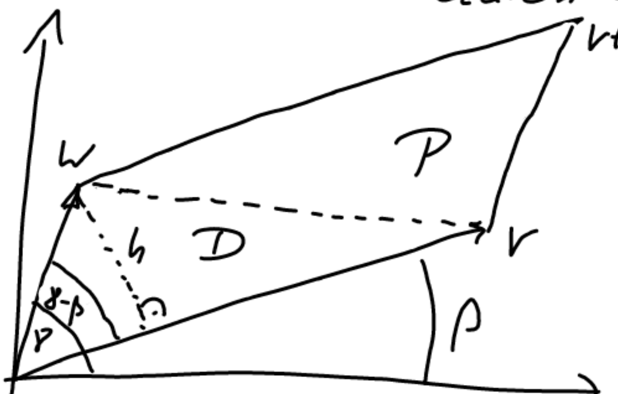
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2-y^3)\,dy = \frac{1}{2}\left(y^3/3 - y^4/4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

3.9 Substitutionsregel für Mehrfachintegrale

AUF FOLIE

(i) Problemstellung: Ein wesentliches Werkzeug der 1-d Integralrechnung ist die Substitutionsmethode. Auch die mehrdim Integralrechnung kommt nicht ohne eine analoge Methode aus; diese werden wir hier kennenlernen

(ii) Vorgeplänkel: Die Fläche eines Parallelogramms ist durch die Determinante gegeben



Seien $v,w\in\mathbb{R}^2$;
P das Parallelogramm $0, v, v+w, w$
D das Dreieck $0, v, w$
Es gilt $|P| = 2|D|$

Wir berechnen $|P|$ explizit. Zunächst schreiben wir

$v_1 = \|v\|\cos(\beta)$, $v_2 = \|v\|\sin(\beta)$
$w_1 = \|w\|\cos(\gamma)$, $w_2 = \|w\|\sin(\gamma)$

$h = \|w\|\sin(\gamma-\beta)$

Damit gilt

$$|P| = 2|D| = \|v\|\, h = \|v\|\,\|w\| \sin(\gamma-\beta)$$
$$= \|v\|\,\|w\| \big(\sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma)\big)$$
$$= v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$|\;|$ benötigt falls $\gamma < \beta$

also $$\boxed{|P| = |\det(v,w)|}$$

n-dim Parallelogramme

Ähnlich ergibt sich für Parallelepipede im $\mathbb{R}^n$
$$|P| = \det(v_1, \dots, v_n)$$

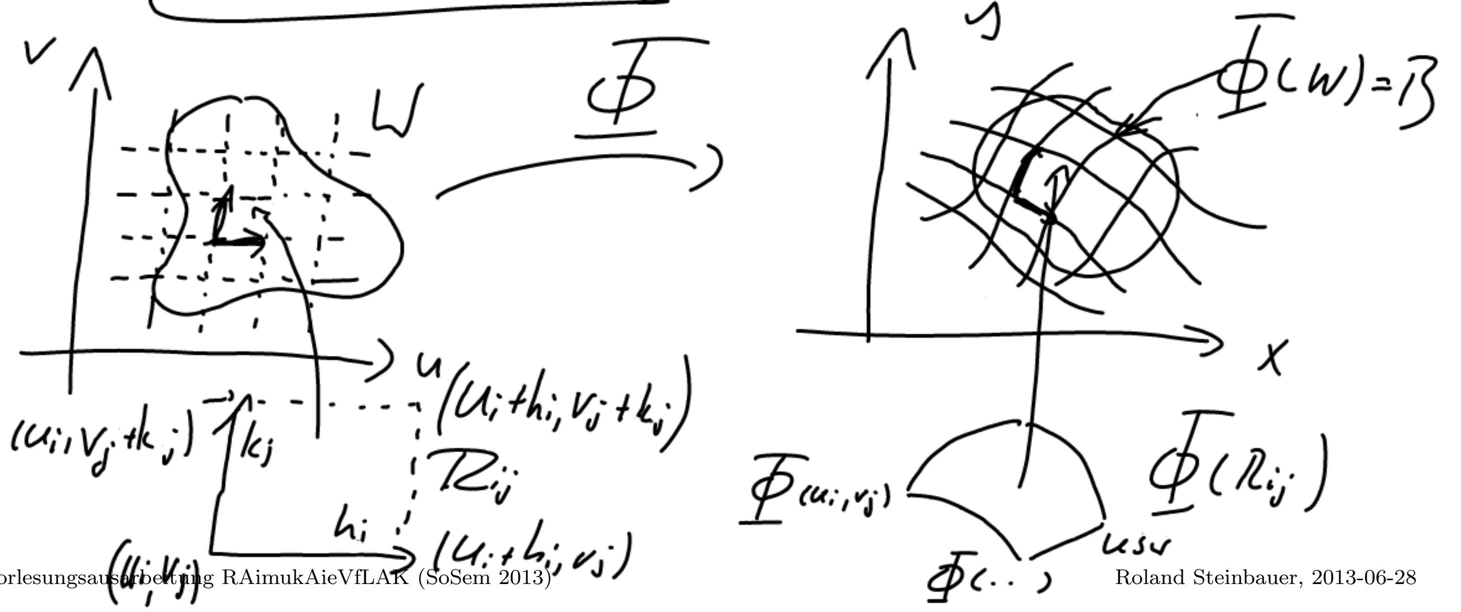
(iii) <u>Heuristik</u>. Wie verändert sich das Volumen unter einer Koordinatentransformation?

AUF FOLIE

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ intbar. In
$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) \quad \text{substituieren wir} \quad \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

wobei $\underline{\Phi}(u,v) := \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix}$ eine inj. $\mathcal{C}^1$ Abb

$\underline{\Phi}: W \to B$ ist mit $W \subseteq \mathbb{R}^2$



Auf Folie

Betrachten wir eines der kleinen Rechtecke in W

$$R_{ij} \;\text{---}\; \begin{pmatrix} u_i \\ v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_i + h_i \\ v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_i + h_j \\ v_j + k_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_j + k_j \end{pmatrix}$$

Dieses wird von Φ auf ein „krummes Parallelogramm" abgebildet

$$\Phi(R_{ij}) \;\text{---}\; \Phi\begin{pmatrix} u_i \\ v_j \end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix} u_i + h_i \\ v_j \end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix} u_i + h_i \\ v_j + k_j \end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix} u_i \\ v_j + k_j \end{pmatrix}$$

Wäre dieses ein „echtes Parallelogramm" so wäre seine Fläche $\det(\tilde{v}, \tilde{w})$ mit

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \varphi(u_i + h_i, v_j) - \varphi(u_i, v_j) \\ \psi(u_i + h_i, v_j) - \psi(u_i, v_j) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} \varphi(u_i, v_j + k_j) - \varphi(u_i, v_j) \\ \psi(u_i, v_j + k_j) - \psi(u_j, v_j) \end{pmatrix}$$

Für kleine h_i, k_j ist lt. MWS

$$\tilde{v} \approx \begin{pmatrix} \partial_u \varphi(u_i, v_j) \cdot h_i \\ \partial_u \psi(u_i, v_j) \cdot h_i \end{pmatrix} = h_i \, \partial_u \Phi(u_i, v_j)$$

$$\tilde{w} \approx \begin{pmatrix} \partial_v \varphi(u_i, v_j) \, k_j \\ \partial_v \psi(u_i, v_j) \, k_j \end{pmatrix} = k_j \, \partial_v \Phi(u_i, v_j)$$

Jacobi Matrix

und daher

$$|\Phi(R_{ij})| \approx |\det(\tilde{v}, \tilde{w})| = |\det D\Phi(u_i, v_j)| \, |h_i k_j| = \underline{|\det D\Phi(u_i, v_j)| \, |R_{ij}|}$$

AUF FOLIE

Mit dieser Heuristik ergibt sich

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) \approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i,v_j),\psi(u_i,v_j))\,|\det D\Phi(u_i,v_j)|\,|R_{ij}|$$

$$\Big\downarrow\ h_i, k_j \to 0, \text{ d.h. } |R_{ij}| \to 0$$

$$\int_V f(\Phi(u,v))\,|\det D\Phi(u,v)|\,d(u,v)$$

Das Integral transformiert also mit dem Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation.

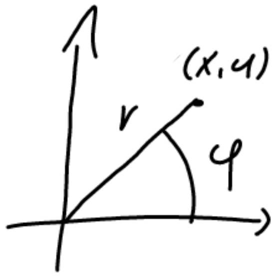
Ein strenger Beweis dieser Aussage ist sehr aufwendig [siehe [Heuser 2, §205]. Wir halten hier das Resultat exakt fest.

(iv) THM (Substitutionsregel) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Fkt mit $\det D\Phi(u) \neq 0$ $\forall u \in U$. Für $K \subseteq U$ kp & messbar und $f: \Phi(K) \to \mathbb{R}$ stetig gilt dann

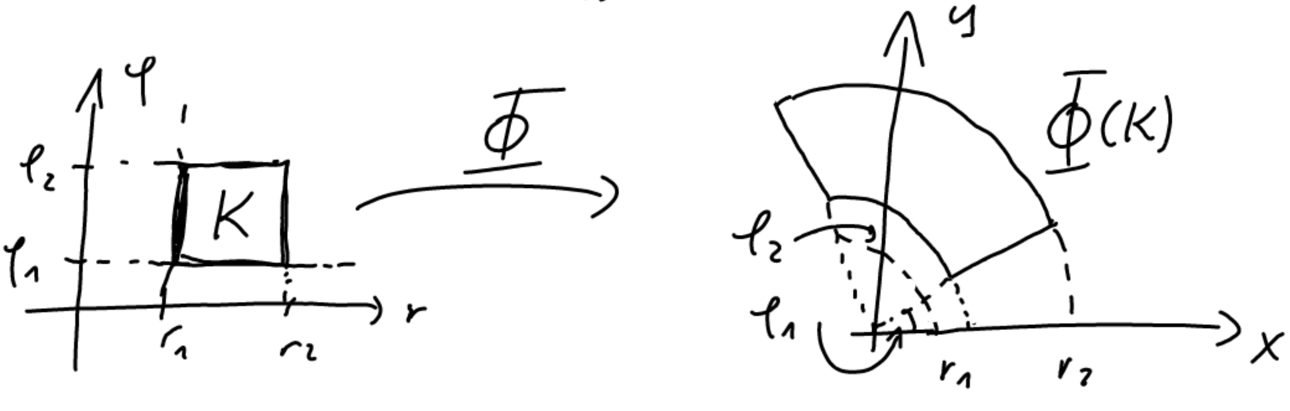
$$\int_{\Phi(K)} f(x)\,dx = \int_K f(\Phi(u))\,|\det D\Phi(u)|\,du$$

Die Aussage gilt auch noch falls die Voraussetzungen an Φ auf einer J-Nullmenge verletzt sind (*)

(vi) BSP (Polarkoordinaten) $\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$



$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\det D\Phi(r,\varphi) = r$



[6] 4.5(vi) $\Rightarrow$ Φ Diffeo in einer Umgebung jedes Pkts (r,φ), $r>0$

UE 24[5] $\Rightarrow$ Φ injektiv $U := \{(r,\varphi) \mid r>0,\ 0<\varphi<2\pi\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

AUF FOLIE

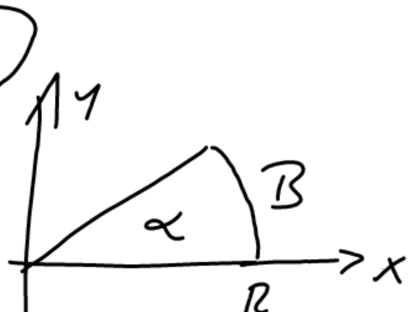
Daher gilt für jedes Rechteck $K = \{(r,\varphi) \mid r_1 \le r \le r_2,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$ mit $0<r$, $0<\varphi_1$, $\varphi_2 < 2\pi$ und allgemeiner für jede kp, messbare Menge $M \subseteq U$ [Heuser 2, §208]

$$\int_{\Phi(K)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_K f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, r\, d(r,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, r\, dr\, d\varphi .$$

nur für K Rechtecke

Reihenfolge egal



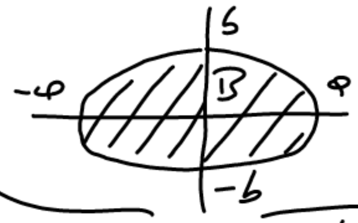
z.B. KREISSEKTOR mit Winkel α, Radius R

$B = \Phi(K)$ mit $K = [0,R] \times [0,\alpha]$ (beachte (*) in (vi))

$$|B| = \int_{\Phi(K)} 1\, d(x,y) = \int_K r\, d(r,\varphi) = \int_0^\alpha \int_0^R r\, dr\, d\varphi = \int_0^\alpha \frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_0^\alpha d\varphi = \boxed{\frac{R^2}{2}\alpha}$$

(vi) <u>Bsp (Ellipsenfläche)</u> $B = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ $a > b > 0$

Setze $\Phi(r,\varphi) = r \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \end{pmatrix}$



$B = \Phi\big([0,1] \times [0,2\pi]\big)$ (beachte ∞ in (iv))

(elliptische Koordinaten alles völlig analog zu (v))

$|B| = \int_B 1 \, d(x,y)$

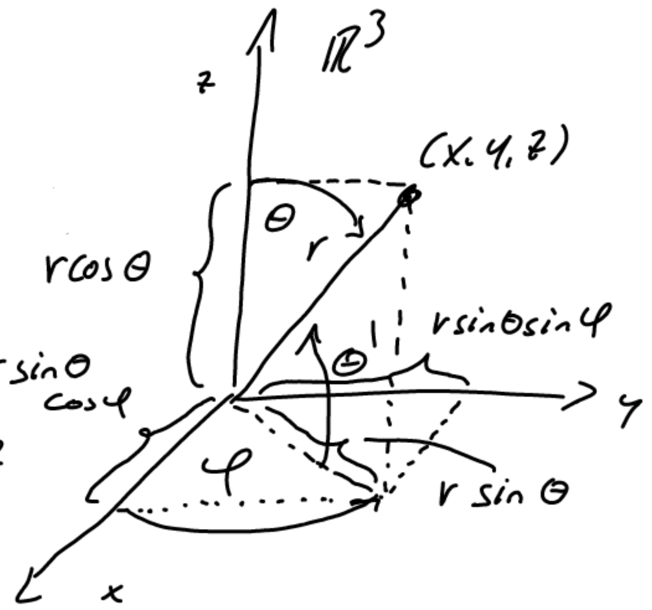
$= \int_{\phi(B)} |\det D\Phi(r,\varphi)| \, d(r,\varphi)$ $\qquad \det D\Phi(r,\varphi) = abr$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, dr \, d\varphi = ab \frac{1}{2} 2\pi = \underline{\underline{ab\pi}}$ $\qquad$ [Kreis: $a = b = r$ $\Rightarrow |B| = r^2\pi$]

Auf Folie

(vii) <u>Bsp (Kugelkoordinaten)</u>

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$



<u>ACHTUNG</u>: Es gibt auch eine andere Konvention mit θ' statt θ [Heuser]; wir verwenden die [Forster]-Konvention vgl. auch UE 24/6

UE 24/6 $\Rightarrow \det D\Phi(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta$ und Φ ist injektiv auf $U = (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$.

Daher gilt für jedes Rechteck $K = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ mit $0 < r_1 < r_2$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ bzw. allgemein für $K \subseteq U$ kp & messbar

AUF FOLIE

$$\int_{\Phi(K)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_K f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, d(r,\varphi,\theta)$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(\cdots)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

nur falls Rechteck

Reihenfolge egal

z.B. KUGELVOLUMEN

$$B = K_R(0) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \quad R>0$$

$$= \Phi([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi])$$

(beachte (*) in (iv))

$$|B| = \int_B 1\, d(x,y,z)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^R r^2\, dr$$

$$= 2\pi\underbrace{\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}_{2}\frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}R^3$$

8 KOMPLEXE ANALYSIS – EINE EINLADUNG

8.1 INTRO. In diesem letzten Teil der VO unternehmen wir einen kleinen Spaziergang durch die Grundlagen der komplexen Analysis – also der Analysis von Fkt

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}. \qquad (*)$$

Dieses reiche & schöne Gebiet befasst sich vor allem mit komplex differenzierbaren Fkt wie in (*). Diese werden auch als holomorphe oder analytische Fkt bezeichnet – wobei es bereits ein Resultat ist, dass diese eigentlich eigenständigen Begriffe zusammenfallen.

Holomorphe Fkt sind in der gesamten Mathematik weit verbreitet und tatsächlich sind uns auch schon viele solcher Fkt begegnet: So ist etwa die komplexe Exp-Fkt [$\boxed{2}$ 3.12] ebenso holomorph wie die Cos- & Sinusfunktion oder Polynome wenn man sie als Fkt einer komplexen Variable auffasst.

Es stellt sich heraus, dass die holomorphen Fkt erstaunliche Eigenschaften besitzen und merkwürdigen strikten Gesetzen gehorchen – die man garnicht ahnen kann, wenn man sie nur mit der „reellen Brille" ansieht.

8.2 WH: WAS WIR SCHON ALLES ÜBER $\mathbb{C}$ WISSEN

(i) $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, wobei wir $\mathbb{C} \ni z = \underbrace{x}_{\mathrm{Re}(z)} + i \underbrace{y}_{\mathrm{Im}(z)}$ mit dem Paar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren.

$\mathbb{C}$ wird mit der Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

zum Körper [$\boxed{10}$ 1.4]. Die Zahl $i = (0,1)$ ist die imaginäre Einheit und erfüllt $i^2 = -1$!

$\mathbb{C}$ kann zwar nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden, aber der komplexe Betrag [$\boxed{2}$ 3.10]

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

ermöglicht es Konvergenz von Folgen & Reihen sowie Stetigkeit von Fkt völlig analog zum reellen Fall zu betrachten [Es muss nur der reelle Betrag durch den komplexen Betrag ersetzt werden.] Es ist eine einfache Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert, also $\mathbb{C}$ vollständig ist [$\boxed{2}$ 3.10(4)].

8.3 FUNKTIONEN AUF $\mathbb{C}$ & IHRE DIFFBARKEIT

(i) Fkt auf $\mathbb{C}$. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen [d.h. jedes $z \in G$ besitzt eine „Schutzkugel" $U_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < \varepsilon\}$, die ganz in G liegt – vgl. [6] 1.11], $f: G \to \mathbb{C}$

Wir schreiben
$$f(z) = \mathrm{Re} f(z) + i \,\mathrm{Im} f(z)$$

und erhalten daraus 2 reelle Fkt ($G \subseteq \mathbb{R}^2$ aufgefasst)

$$u: G \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := \mathrm{Re} f(x+iy)$$
$$v: G \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$$

sodass

$$\boxed{f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)}$$

Vektorfeld auf $G \subseteq \mathbb{R}^2$

gilt; wir sehen dann

$$F: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

(ii) <u>DEF</u> $f: G \to \mathbb{C}$ heißt <u>komplex differenzierbar</u> in $z_0 \in G$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{(als eigentlicher Limes)}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Wert $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ die <u>komplexe Ableitung</u> von f in z_0. Ist f in allen Punkten $z_0 \in G$ diffbar, so heißt f <u>komplex diffbar auf G</u> und wir erhalten die <u>Ableitungsfkt</u>

$$f': G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f'(z)$$

(iii) <u>Einfache Folgerungen</u>: Genauso wie im Reellen zeigt man

- f komp. diffbar in $z_0 \iff \exists a \in \mathbb{C} \ \exists r: \mathbb{C} \supseteq U_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = a \cdot h + r(h), \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (\mathbb{C} \ni h \to 0)$$

- f komp. diffbar in $z_0 \Longrightarrow f$ stetig in z_0

(iv) Komplexe vs reelle Diffbarkeit – die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Wir beantworten die Frage, was eine komplex diffbare Abb $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von einer reell diffbaren Abb $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ unterscheidet.

Die Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0)$ im Pkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stellt eine lin. Abb $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dar. Die komplexe Ableitung $f'(z_0)$ im Pkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ vermittelt die lin. Abb: $\mathbb{C} \ni z \mapsto f'(z_0) \cdot z \in \mathbb{C}$ also die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$.
Wir müssen also fragen, wann eine reelle (2×2)-Matrix die Multiplikation mit einer komplexen Zahl darstellt: Beispiel

$$\mathbb{C} \ni z = x+iy \longmapsto \alpha \cdot z = (a+ib)(x+iy)$$
$$= \underline{ax - by + i(ay+bx)}.$$

Diese Abb. wird dargestellt von

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Also muss eine solche reelle (2×2)-Matrix von der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sein. Für die Jacobi-Matrix von DF von $F = (u,v)$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$ bedeutet das

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Wir haben also bewiesen

SATZ: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ mit zugeordneter Abb $F = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: G \to \mathbb{R}^2$ dann gilt:

f komplex diffbar auf G $\Longleftrightarrow$ F reell diffbar auf G und es gilt $\begin{vmatrix} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{vmatrix}$ die sog. Cauchy-Riemann-Differentialgl. (CRDG)

(v) Holomorphe Fkt

Wie im reellen ist es praktischer nicht bloß diffbare Fkt zu betrachten, sondern C^1-Fkt, diese heißen holomorphe Fkt; genauer

DEF: $f: G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls f auf G kompl. diffbar mit stetiger Ableitung $f': G \to \mathbb{C}$ ist.

Aus (iv) folgt sofort: f holomorph $\Longleftrightarrow \begin{cases} F \in C^1 \text{ und es} \\ \text{gelten die (CRDG)} \end{cases}$

(vi) Man kann sogar zeigen:

SATZ VON GOURSAT: Jede komplex differenzierbare Fkt ist automatisch holomorph.

Siehe dazu auch 8.9.

Bemerke den großen Unterschied zur reellen Analysis

(vii) BSP. • $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ [R 3.12]

ist holomorph, denn mit $z = x + iy$ gilt

$$e^z = e^{x+iy} \underset{[2]\,3.15}{=} e^x e^{iy} \underset{[2]\,3.17}{=} \underbrace{e^x\cos(y)}_{=:u(x,y)} + i\underbrace{e^x\sin(y)}_{=:v(x,y)}$$

und $\partial_x u = e^x\cos(y) = \partial_y v$

$\partial_y u = -e^x\sin(y) = -\partial_x v \Longrightarrow \binom{\text{CRDG}}{\&\ C^1} \Longrightarrow$ holomorph

- $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h(z)=\sin(z)$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \underset{\text{analog zu [2] 3.17(iii)}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

ist holomorph mit

$$h'(z) = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} =: \cos(z)$$

- $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\varphi(z)=\bar{z}$, dh $\varphi(x+iy)=x-iy$

$u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$

$\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v \Longrightarrow$ nicht holomorph

8.4 KOMPLEXE WEGINTEGRALE

(i) Notation & Terminologie. Einen Weg $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ identifizieren wir mit dem Weg $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(x(t),y(t))$. Alle Begriffe für Wege aus [7] §1–2 übertragen sich somit auf komplexe Wege. Insbesondere entspricht $\dot\gamma(t)=\dot x(t)+i\dot y(t)$ dem Geschwindigkeitsvektor $\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix}$.

(ii) DEF (Wegintegral) Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ stückweise C^1, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ stetig, dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

$\cdot$ in $\mathbb{C}$

Wegintegral von f längs γ

(iii) Reelle Schreibweise: Mittels $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ und $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ schreibt sich (ii) ab

$$\boxed{\int_\gamma f(z) = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}(t)\,dt + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}(t)\,dt}$$

$$= \Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big)\Big(\dot x(t) + i\dot y(t)\Big)$$

$$= u(x(t),y(t))\,\dot x(t) - v(x(t),y(t))\,\dot y(t)$$
$$+\, i\,\Big(u(x(t),y(t))\,\dot y(t) + v(x(t),y(t))\,\dot x(t)\Big)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} u(x(t),y(t)) \\ -v(x(t),y(t)) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} v(\dots) \\ u(\dots) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

(iv) Bsp. $\gamma(t) = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos(t) + i\sin(t))$

$$\Longrightarrow \quad \dot\gamma(t) = r(-\sin(t) + i\cos(t)) = ire^{it}$$

Kreis mit Radius r um z_0

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt$$
$$= i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i$$

und etwas allgemeiner für $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^m\, ire^{it}\,dt = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{it(m+1)}\,dt$$

$$= ir^{m+1}\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((m+1)t)\,dt}_{} + i\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin((m+1)t)\,dt}_{=0}\Big)$$

$$= \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi & (m=-1) \\ \int_0^{2\pi(m+1)} \frac{\cos\tau}{m+1}\,d\tau = 0 & (m\neq -1) \end{cases} \qquad [\text{vgl } [5]\ 4(2)]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Ein zentrales Resultat ist der folgende Satz

8.5 DER INTEGRALSATZ VON CAUCHY

offen + sternf. vgl. [7] 2.5(iv)

(i) THM. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg γ in G.

(ii) BEM (Zur Bedeutung von (i)) Im Hinblick auf [7] §2 (vgl. insbes. [7] 2.5(vii)) kann die Bedeutung von (i) gar nicht überschätzt werden. Im Kern besagt das Thm, dass holomorphe Fkt automatisch die Integrabilitäts-bedingungen erfüllen – der Beweis zeigt genauer, dass die (CRDG) die Integrabilitätsbed. sind !

(iii) Beweis: Wieder schreiben wir $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

f holomorph $\Rightarrow$ (CRDG) $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$

$\Longrightarrow$ die VF $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ erfüllen die IntBed

Daher

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{8.5(iii)}{=} \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \overset{[7]\,2.5(vi)}{=} 0 + i\,0 = 0$$

$\square$

(iv) Konsequenzen aus (i). Völlig analog zu [7] 2.4(iv) zeigt man, dass holomorphe Fkt wegunabhängige Integrale haben und analog zu [7] 2.4(iii), [7] 2.4(v) ergibt sich eine komplexe Version des HsDI. Die wichtigste Konsequenz aus dem Cauchyschen Integralsatz ist:

8.6 Die Cauchysche Integralformel

(i) Thm. Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet G und sei Γ ein pos orientierter Kreis innerhalb von G. Dann gilt für jedes z innerhalb von Γ die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

[zeta]

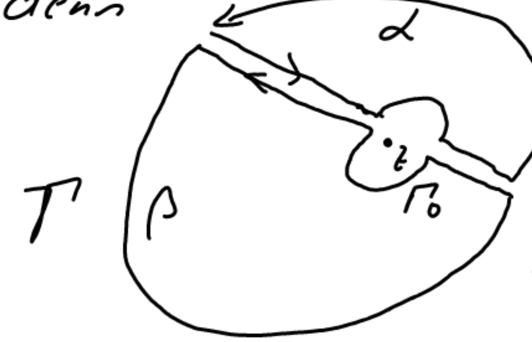
(ii) Bedeutung von (i): Die Formel besagt insbesondere, dass die Werte einer holomorphen Fkt innerhalb einer Kreisscheibe schon allein durch die Werte am Randkreis Γ bestimmt sind.

(iii) Beweisskizze. Seien z, Γ wie im Thm. Wähle einen kleinen Kreis Γ_0 um z der innerhalb von Γ liegt.

(1) Da $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ holomorph auf $G\setminus\{z\}$ ist, gilt

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}} \quad (*)$$

denn



$$\int_\Gamma - \int_{\Gamma_0} = \int_\alpha + \int_\beta \overset{8.5(i)}{=} 0$$

Analog erhalten wir

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (**)$$

(2) Wir rechnen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)+f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$\overset{(*),(*)}{=} \frac{f(z)}{2\pi i}\underbrace{\int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{=2\pi i\ [8.4(iv)]} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=:h(z)}$$

(3) Wir zeigen $h(z)=0$; dann fertig.

f stetig $\Longrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists r_0$ Radius von Γ_0 s.d. $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| < \varepsilon/r_0 \quad \forall \zeta \in \Gamma_0$

$$\Longrightarrow |h(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| d\zeta$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r_0} L(\Gamma_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r_0}2\pi r_0 = \varepsilon \qquad \square$$

8.7 Potenzreihen

(i) Intro. Wir zeigen jetzt, dass komplexe Potenzreihen holomorphe Fkt definieren. Das ist eine Erweiterung von [5] Prop 2.15, die besagt, dass reelle PR C^∞-Fkt darstellen.

Wir beginnen mit unseren Überlegungen und formulieren erst danach das Resultat.

Erinnerung: In [5] §2 haben wir ja schon einiges über komplexe PR gelernt...

(ii) Komplexe PR. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine PR mit KR $R>0$ und

$$f: B_R(z_0) \to \mathbb{C},\ f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \quad (*)$$

ihre Summenfkt. Fkt f mit einer PR-Darstellung $(*)$ heißen analytisch.

(iii) Wir wollen nun analytische Fkt kompl. differentieren und beginnen mit einer Vorüberlegung:

Sei $z_1 \in B_R(z_0)$, $z_1 \neq z$

Binom. LS

$$\Rightarrow (z-z_0)^k = ((z-z_1)+(z_1-z_0))^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$\binom{k}{l}=0$ für $l>k$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

abs. konv.

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$\binom{k}{l}=0$ für $k<l$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{k=l}^{\infty} c_k \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} \Big)}_{=:\, b_l\ (*)} (z-z_1)^l = \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_1)^l$$

Entwicklung mit Entwicklungspkt z_1!

Jetzt können wir den Differentenquotienten berechnen:

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_1)^l - b_0}{z-z_1} = \frac{b_1 (z-z_1) + b_2 (z-z_1)^2 + \dots}{z-z_1}$$

$$= b_1 + b_2 (z-z_1) + b_3 (z-z_1)^2 + \dots \to b_1 \quad (z \to z_1)$$

$\Longrightarrow f$ komplex diffbar in z_1 mit

$$\underline{f'(z_1)} = b_1 \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \binom{k}{1} (z_1 - z_0)^{k-1} = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z_1 - z_0)^{k-1}}$$

Weil z_1 in $B_R(z_0)$ beliebig war gilt insgesamt

- f komplex diffbar auf $B_R(z_0)$ und
- $f' : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist durch die gliedweise differenzierte Reihe gegeben

$\overset{[6]\, 7.5}{\Longrightarrow}$ Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist wieder R

$\Longrightarrow f'$ stetig auf $B_R(z_0)$

$\Longrightarrow f$ holomorph auf $B_R(z_0)$

Wir haben also gezeigt: analytisch $\Rightarrow$ holomorph, genauer

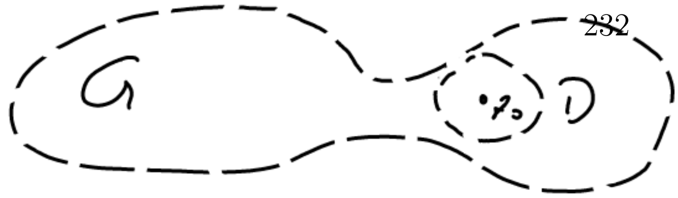
(iii) SATZ (Potenzreihen definieren holomorphe Fkt)

Sei $\sum c_k (z-z_0)^k$ eine PR mit KR R. Dann ist die Summenfkt $f(z) = \sum c_k (z-z_0)^k$ holomorph auf $B_R(z_0)$ und die Ableitung kann gliedweise berechnet werden, d.h. $f'(z) = \sum k c_k (z-z_0)^{k-1}$.

Desweiteren folgt durch Iterieren [vgl. [5] 2.15] dass analytische Fkt beliebig oft kompl. diffbar sind.

(iv) Es ist eine weitere Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz bzw. der Integralformel, dass auch eine Umkehrung von (iii) gilt. Diese besprechen wir nun.

8.8 Entwicklungssatz



(i) THM. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.
Sei $z_0 \in G$ und $U_r(z_0)$ die größte offene Kreisscheibe mit Mittelpkt z_0 sodass $\overline{U_r(z_0)} = K_r(z_0) \subseteq G$ [vgl. [6] 1.31].
Dann gilt $\forall z \in U_r(z_0)$ eine eindeutige PR-Entwicklung

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k.}$$

Dabei sind die Koeffizienten c_k gegeben durch

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz.}$$

(ii) Bemerke, dass das analoge Resultat für $\mathcal{C}^\infty$-Fkt auf $\mathbb{R}$ falsch ist. In [5] Bsp 3.12 haben wir gesehen, dass $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ keine PR-Entwicklung hat — vgl [5] 3.17. Dort mussten wir die Frage offenlassen, welche reellen $\mathcal{C}^\infty$-Fkt eine Entwicklung haben — wir kommen gut am Ende der VO darauf zurück.

(iii) Beweisskizze. OBdA sei $z_0 = 0$, $z \in U_r(0)$.
Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\, d\zeta$$

$\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$ geom. Reihe $|z| < |\zeta|$ da $z \in U_r(0)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \underset{\text{konv. glm}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \right) z^n \qquad \square$$

8.9 Die fabelhafte Welt der holomorphen Fkt

(i) Wie bereits in 8.1 angedeutet, sind komplex diffbare Fkt sehr „schöne" Fkt. Wir fassen unsere diesbezüglichen Resultate zusammen.

Thm. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen alle äquivalent.

(i) f kompl. diffbar.

(ii) f ist holomorph.

(iii) f ist analytisch, d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ in einer Umgebung jedes Pkts $z_0 \in G$.

(iv) f ist beliebig oft kompl. diffbar.

(v) f ist reell C^1 & erfüllt die (CRDG).

(vi) $\oint_\gamma f = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \subseteq U_r(z_0) \subseteq G$.

(vii) f hat in jedem Pkt eine (lokale) Stammfkt.

Beweisskizze [Fast alles haben wir schon erwähnt, viel sogar bewiesen.]

(i) kompl diffbar $\Longrightarrow$ (ii) holomorph $\overset{8.8(i)}{\Longrightarrow}$ (iii) analytisch $\overset{8.7(iii)}{\Longrightarrow}$ (iv) bel. oft kompl. diffb. $\overset{\text{klar}}{\Longrightarrow}$ (i) kompl. diffbar

Satz v. Goursat vgl 8.3(vi)
Beweis etwa mit allgemeiner Version des Cauchy-Integralsatzes für kompl. diffbar statt holomorph

(iii) analytisch $\overset{8.3(v)}{\Longrightarrow}$ (v) reell C^1 & (CRDG) $\overset{8.5(i)}{\Longrightarrow}$ (vi) $\oint_\gamma f = 0$ $\Longrightarrow$ (iii)

Satz von Morera [Jänich 3 Satz 8]

(i) f kompl. db. $\Longleftarrow$ (vii) lok. Stammf. $\Longleftarrow$ 8.5(iv)

$F' = f$ & (iv)

$\square$

(ii) Weitere schöne Eigenschaften holomorpher Fkt, (die allerdings auch zeigen, dass holomorphe Fkt sehr speziell sind) sind etwa:

SATZ v. LIOUVILLE: Jede Fkt $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph & beschränkt ist, ist schon konstant.

IDENTITÄTSSATZ. Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Fkt, die auf eine Teilmenge von G, die einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen. Dann gilt $f \equiv g$ auf ganz G.

Insbesondere können sich die Nullstellen (nichttriviale) holomorpher Fkt nicht häufen. Somit ist ein Bsp wie in [5] 3.11-12 ausgeschlossen.

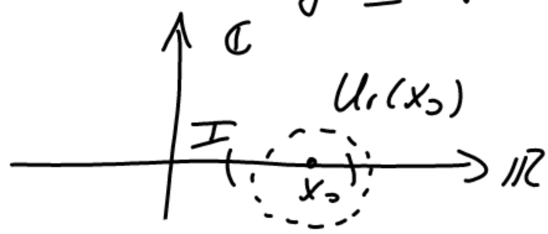
(iii) Holomorphe Fkt bzw. die komplexe Analysis hilft auch öfters Fragen der reellen Analysis zu beantworten; So können wir nun die Frage aus [5] 3.17 beantworten [vgl. auch 8.8(iii)]:
Eine reelle Fkt ist genau dann um einen Pkt in eine PR entwickelbar, falls sie sich auf einen Kreis um x_0 in der kompl. Ebene holomorph fortsetzen lässt; genauer

SATZ. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

f lässt sich um $x_0 \in I$ in eine (reelle) PR entwickeln

$$\Updownarrow$$

$\exists$ Fkt $g: \mathbb{C} \supseteq U_r \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g|_I = f$.



Siehe [Heuser 2, 187.6]

(iv) AUSBLICK. Die komplexe Analysis ist im Wesentlichen die Theorie der holomorphen Fkt. Ein weitreichender Gesichtspunkt dabei ist es, holomorphe Fkt als Lösungen der (CRDG) zu sehen – damit ergeben sich viele Verbindungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (PDE).

Die Analysis von Fkt mehrerer komplexer Variablen unterscheidet sich grundlegend von der 1-d Theorie. Wiederum gibt es starke Bezüge zur Theorie der PDE aber auch der Funktionalanalysis und zur Algebraischen Geometrie.

Dabei handelt es sich um ein aktives Forschungsgebiet – [am Inst: F. Haslinger & B. Lamel]

(v) LITERATUR. Diese Ausarbeitung beruht wesentlich auf [Heuser 2, 185–187]. Eine knappe Einführung ist [Jänich, Funktionentheorie], ein umfassendes (m.E. sehr schönes) Buch [Remmert, Schumacher, Funktionentheorie 1-2].