Reelle Analysis in mehreren und Komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Sommersemester 2013
5 WStd / 10 ECTS

A Vorbemerkungen zu Titel & Inhalt der VO

A.1. Rückblick (Das Grundthema der Analysis & wo wir stehen – nach EidA + AieVfLAK)

Das Grundthema der Analysis [vgl [9]§0, [3]§0] ist das

Verstehen & Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen

Diesbezüglich haben wir schon viel erreicht; genauer haben wir folgende Begriffe studiert

EidA
- Grenzwertbegriff für Folgen in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$]
- Stetigkeit für Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

entscheidende Schritt vgl [3] 0.3

AieVfLAK
- Differentialrechnung für Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
- Integralrechnung

Verbindung [HsDI]

Insbesondere hat sich herauskristallisiert

> Die Ableitung einer Fkt (in einem Pkt) ist das zentrale Werkzeug zum Verständnis ihres lokalen Änderungsverhaltens.

> Über die Kenntnis der Ableitung an allen Pkten können wichtige Rückschlüsse auf das globale Verhalten einer Fkt gezogen werden.

> Die zentrale Verbindung zwischen lokalen Eigenschaften (meist mittels Ableitung beschrieben) und globalen Eigenschaften (oft mittels Integralrechnung beschrieben) einer Fkt liefert der HsDI.

nett, aber eher oberflächlich

A2. Zentrales Unterthema: Approximation/Näherung

Immer wieder ist in unseren Untersuchungen das Thema Approximation bzw. Näherung aufgetaucht.

- für reelle Zahlen: zB $\sqrt{2} \approx 1,44$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n$$

wobei x_n rekursiv definiert ist via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 2/x_n\right)$$ [vgl [1] 3.24]

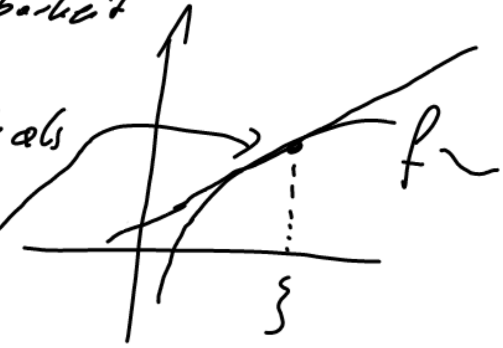
[Heron-Verfahren]

Sehr subtile Fragen, die oft mit dem „unendlich Kleinen" zu tun haben ... In den Grenzwertbegriff verpackt

• für Fkt z.B. bei der Differenzierbarkeit

Tangente als lin. Bestapprox.

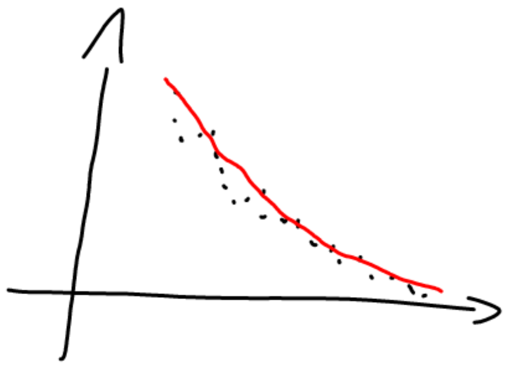
[[3] 1.19 – 1.20]



Wir wollen uns nun etwas allgemeinere Gedanken zum Approximieren von Fkt machen. Die Relevanz des Konzepts steht (auch) in den Anwendungen außer Frage, z.B.

will die komplizierte Fkt durch eine einfachere Fkt gut annähern.

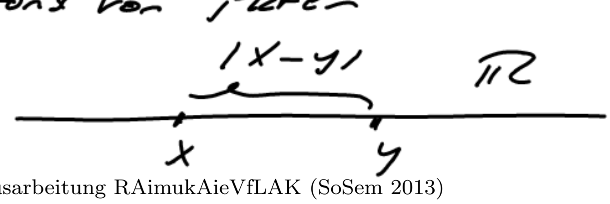
Will durch vorgegebene Pkte (Meßwerte in den NaWi, Schätzungen in den SoWi) möglichst gut eine Fkt legen.

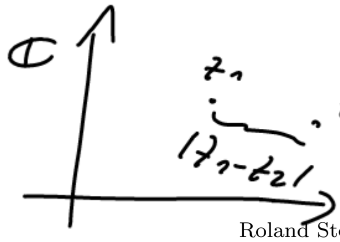


Die entscheidende Frage ist natürlich nun:

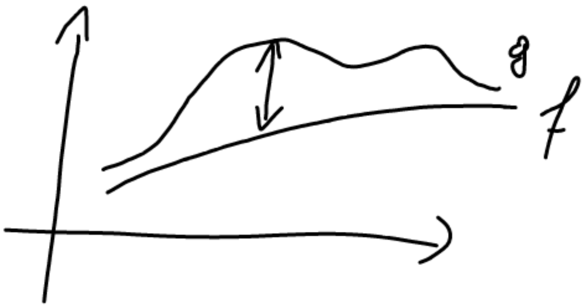
Wie gut ist die Näherung?

Im Fall von Zahlenfolgen messen wir dazu den Abstand von Pkten



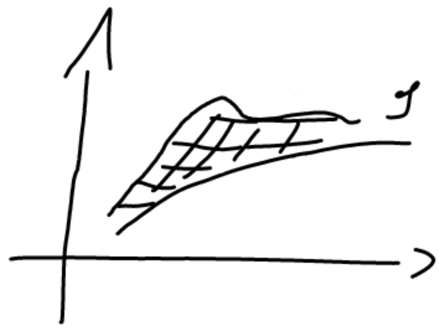


Wie aber messen wir den Abstand von Fkt?
Hier gibt es keine richtige Antwort. Viele Konzepte sind möglich und in verschiedenen Situationen unterschiedlich nützlich, z.B.



max. Abstand, d.h. „dickste Stelle“

Fläche zw. den Fkt misst z.B. Arbeit oder Kosten

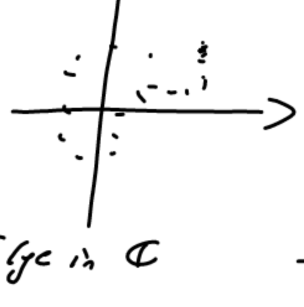


Diese Überlegungen führen zu (verschiedenen) KONVERGENZBEGRIFFEN FÜR FUNKTIONENFOLGEN

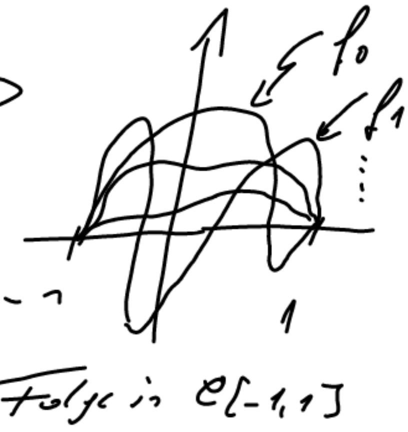
dem Thema von $\boxed{\text{KAP 5}}$ [vgl auch [3] 0.5(iii)]

→ also Folgen deren einzelne Glieder nicht Zahlen sind, sondern Funktionen

Folge in $\mathbb{R}$



Folge in $\mathbb{C}$



Folge in $C[-1,1]$

Bevor wir näher auf den Inhalt von Kap 5 eingehen, geben wir einen Ausblick auf die weiteren Themen der VO

A.3 Ausblick 1: Mehrdim. (Reelle) Analysis

{ Steckt im 1. Teil des langen Titels }

Bisher haben wir meist reelle Fkt betrachtet, also Fkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [oder $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ was aber im Moment nicht der Pkt ist.]

Man spricht auch von 1-dim Fkt oder gleich der 1-dim Analysis.

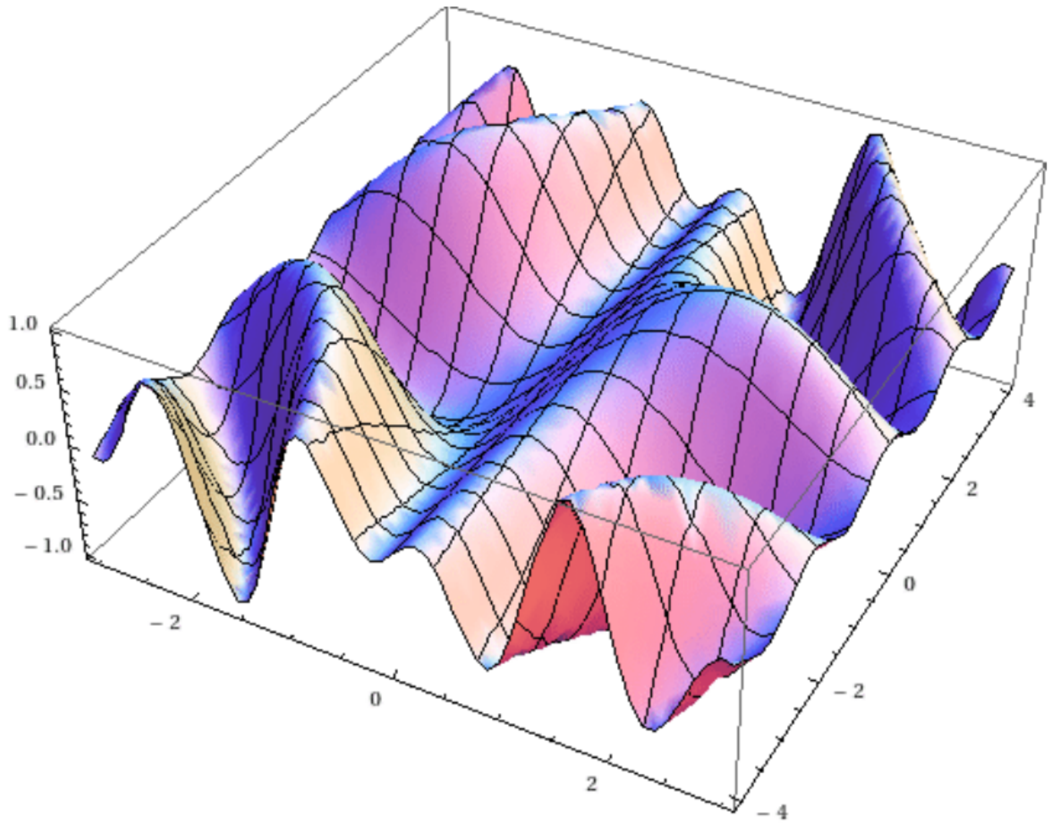
Für die allermeisten Zwecke ist das viel zu wenig! In den Anwendungen ist man ja nicht bloß an funktionalen Zusammenhängen reeller Zahlen interessiert sondern will/muss viel allgemeinere funktionale Zusammenhänge modellieren. Bsp. gefällig?

Temperatur in Wien heute Früh

Jedem Pkt in Wien – modelliert als eben – aha als Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ – wird die Temperatur an genau diesem Ort heute früh um 6:00 zugeordnet. Das ergibt eine Fkt

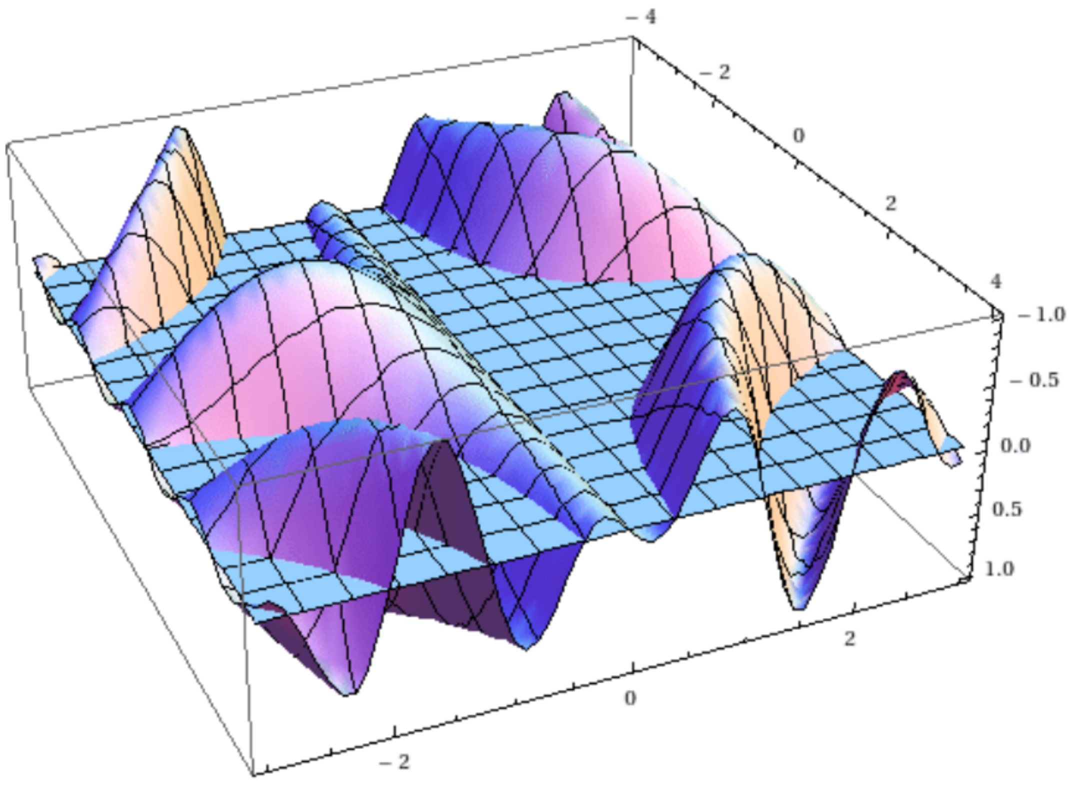
$$T : W \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto T(x,y)$$

Der Graphen $G(T) := \{(x,y,T(x,y))\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Temperaturfkt kann veranschaulicht werden:



mögliche Graph der Temperaturfkt.

Schnitt des Graphen der Tempfkt mit der (x,y)-Ebene: Punkte am Graphen unterhalb der (x,y)-Ebene sind gefährlich: dort friert es!



Strömung in Flüssigkeiten.

Jedem Pkt an der Oberfläche eines Flusses wird die Fließgeschwindigkeit an diesem Pkt zugeordnet – dabei wird die Fließgeschwindigkeit als 2-dim Vektor modelliert, der in Richtung der Strömung zeigt und dessen Länge gleich (dem Betrag) der Geschwindigkeit ist. Es ergibt sich eine Fkt

$$v: F \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto v(x,y)$$

In der Physik ist die Geschwindigkeit immer ein Vektor

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (n,m \geq 1)$$

Teil des Titels der VO

zu studieren, also eine Analysis mehrdim Fkt bzw Analysis in mehreren (reellen) Variablen zu betreiben.

↳ $m=1=n$ ist dann der einfachste Spezialfall

Wie wirken sich $m>1$, $n>1$ aus?

Man könnte evtl. meinen, dass sich die mehrdim Analysis irgendwie leicht aus der 1-d Analysis „zusammenbauen" lässt. Dem ist aber in vielen Bereichen nicht so und es treten „neue Effekte" auf!

Leitfaden:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$m > 1$ bringt zunächst wenig Neues aber mehr Arbeit (1)

$n >$ bringt neue Effekte (2)

(1) Jede Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ kann in m-Stück Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zerlegt werden.

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$$

Komponenten im $\mathbb{R}^m$

$$= (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

Jedes $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ ist eine „Komponentenfkt" von f und statt einer Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ können wir oft die m-Stück $f_1, \ldots, f_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten

Also sind Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die „Grundbausteine" der mehrdim Analysis

ABER

(2) Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haben es in sich & bringen viel Neues

$$\boxed{\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ $\qquad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$

Zwar kann man $x \in \mathbb{R}^n$ in seine Komponenten zerlegen aber das führt nicht wie in (1) zu einer „Entkopplung" der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

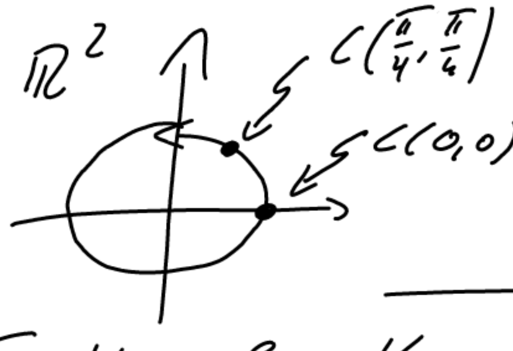
Hier entstehen also die „neuen Effekte":

sog. ebene Kurve

NICHT VORGETRAGEN

Zur Verdeutlichung 2 Bsp.

$$c : \mathbb{R} \supseteq [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



gibt x- & y-Komponente des Funktionswertes an

zB: $t = 0 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = \frac{\pi}{4} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \pi/4 \\ \sin \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Die Zerlegung von $c(x)$ in $c_1(x) = \cos(x)$, $c_2(x) = \sin(x)$ führt zu einer angemessenen Beschreibung von f

$$f : D^2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

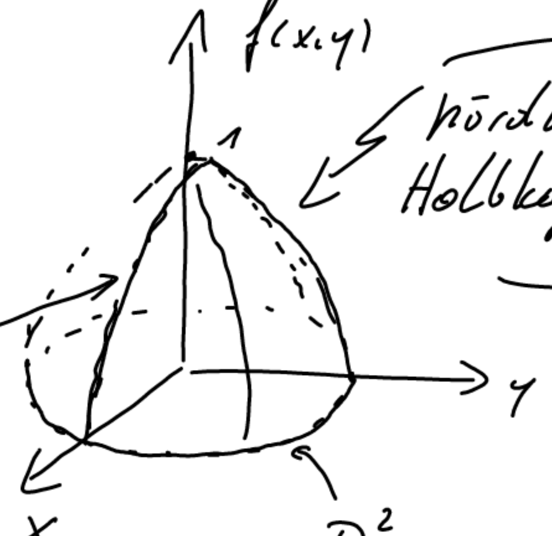
zB: $(0,0) \mapsto 1$

(x,y) mit $x^2 + y^2 = 1 \mapsto 0$

am Rand der Scheibe

$(0,y) \mapsto \sqrt{1 - y^2}$

Halbkreis über x-Achse



nördliche Halbkugel

Im Ausdruck $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ können die Variablen x, y nicht gut getrennt werden.

$\Rightarrow$ neue Effekte!

A.4 Mehrdim Analysis – Inhalte

Der Kern der Analysis ist ja (vgl. A.1) die Differential- und Integralrechnung. Das ist auch in der mehrdim. Analysis so. Das benötigt aber als Grundlage den Konvergenzbegriff im Def- & Zielbereich.

Daher beginnt das

KAP 6 DIFFERENTIALRECHNUNG IM $\mathbb{R}^n$

mit und $\left\{ \begin{array}{l} \text{FOLGEN \& KONVERGENZ in } \mathbb{R}^n \\ \text{STETIGKEIT VON FKT } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{array} \right.$

1. Überraschungen

Dann gehts zur MEHRDIM DIFFERENTIALRECHNUNG

Diese kann offensichtlich nicht mittels Differentialquotienten aufgebaut werden:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2)}{(h_1,h_2)}$$

$x=(x_1,x_2)$
$h=(h_1,h_2)$

HOPPALA: was soll das heißen? [dividieren durch Vektor?]

Vielmehr muss die Kernidee der Ableitung als lin Bestapproximation [vgl [3] 1.19, 1.20] verwendet werden.

Das nachfolgende

KAP 7 | MEHRDIM INTEGRALRECHNUNG

widmet sich vor allem den Verallgemeinerungen des Integralbegriffs und des HsDI – den Integralsätzen von Gauß & Stokes.

Um einen ersten Eindruck davon zu erhalten betrachten wir folgenden Teil des HsDI:

$$\left\{ \int_a^b f'(t)\,dt = f(x)\Big|_a^b \right\}$$

Integral über die Ableitung

Funktion am Rand

In größter Allgemeinheit sagen die Integralsätze

$$\left\{ \int_M df = \int_{\partial M} f \right\}$$

„schönes" n-dim „Gebiet"

geeignete Ableitung von f

Rand von $M \triangleq$ „schönes" (n-1) dim „Gebiet"

A.5 AUSBLICK 2: KOMPLEXE ANALYSIS

Auch Teil des looooongen Titels der VO

Als Menge gilt natürlich $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
Aber $\mathbb{C}$ hat zusätzlich eine „eigene" Körperstruktur [$\mathbb{C}$ ist ein Körper; vgl [O] 1.4]

[Nebenbemerkung: Auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ gibt es keine Körperstruktur. Es gibt (immer) schwächere Ersatzstrukturen, die weit nicht soviel bringen [vgl. auch EMA, Abschnitt 6.6]

$n = 4$: QUATERNIONEN (Schiefkörper, d.h. Mult. nicht kommutativ)
$n = 8$: OKTAVEN (Mult nicht assoz.)]

Also: Eine Fkt

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist mehr als eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Insbesondere kann in der Differentialrechnung der Differenzenquotient verwendet werden

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Division in $\mathbb{C}$ geht klar

Es ergibt sich eine reiche [soll heißen: mit viel schöner Struktur] Theorie, die KOMPLEXE ANALYSIS (in einer Variable) deren Grundzüge wir am Ende der VO kurz kennenlernen werden.

A.6 „BLÖDE" FRAGE:

Und warum nicht gleich $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$?

Da wird es schnell viel schwieriger – meist auch nicht Teil des Bachelor-Studiums.

15 Funktionenfolgen & -Reihen

In diesem Kapitel wollen wir also Funktionenfolgen & Funktionenreihen — also Folgen bzw Reihen deren Glieder Fkt sind — und vor allem ihre Konvergenz studieren.

Nach einer Begriffsbestimmung werden wir uns in §1 um die 2 grundlegenden Konvergenzbegriffe kümmern: punktweise Konvergenz & gleichmäßige Konvergenz. Wie in A2 angedeutet gibt es hier nicht den einen richtigen Begriff, sondern viele Möglichkeiten mit jeweils anderen Eigenschaften. Insbesondere werden wir uns die Frage nach „Permanenzeigenschaften" stellen: Welche Eigenschaften der Folgenglieder (z.B. Stetigkeit) bleibt im Limes erhalten?

Wir werden die glm. Konvergenz mittels einer Norm beschreiben & diese dazu verwenden ein zentrales Konvergenzkriterium f. Funktionenreihen zu beweisen: den Satz v. Weierstraß. Dann werden wir uns ausführlich mit der Frage beschäftigen, ob der Limes von Fktionenfolgen mit Ableitung bzw Integral vertauscht, also der Frage ob etwa $f_n \to f \Rightarrow f_n' \to f'$ gilt.

da steckt ein allg. Prinzip dahinter

In einem Zwischenspiel werden wir dann 2 Bsp sehr gründlich studieren — Bsp die später immer wieder auftauchen werden.

In $\boxed{§2}$ werden wir Potenzreihen studieren; diese sind von der Form

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R}, \text{ die sog. Koeffizienten}, x \in \mathbb{R})$$

Sie verallgemeinern Polynome in dem Sinn, dass in $(*)$ die Summe nicht abbricht. Wir werden uns intensiv mit dem Konvergenzverhalten von PR beschäftigen – dabei wird es sich als natürlich erweisen „ins Komplexe zu gehen", also statt $(*)$ Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C})$$

zu betrachten. Daher werden wir auch Einiges in §1 schon vorsorglich für $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ formulieren – Aber keine Angst: $\mathbb{C}$ sorgt hier nicht für zusätzliche Probleme, sondern für zusätzliche Klarheit.

In $\boxed{§3}$ beschäftigen wir uns dann mit Taylorreihen. Wir werden dabei schöne Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus ihren (höheren) Ableitungen an einer einzigen Stelle rekonstruieren – und zwar in Form einer Potenzreihe. Hier ist schon wieder Schluss mit $\mathbb{C}$

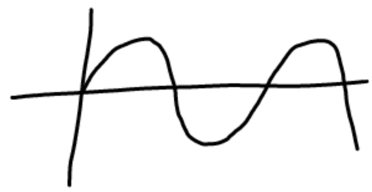
Alle diese Themen sind bisher schon aufgeblitzt – am deutlichsten bei der Exponentialreihe [vgl. $\boxed{H}$ 4.37, $\boxed{R}$ 3.12]

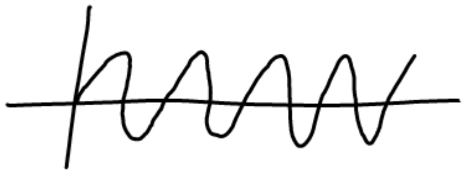
$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! \quad \text{das ist eine PR \& auch TR}$$

Im abschließenden $\boxed{§4}$ werden wir einen kurzen Abriss der

Theorie der Fourier-Reihen geben. Sie ermöglicht es periodische Fkt durch „Polynome in Sin & Cos" den sog. trigonometrischen Polynome anzunähern.
Wir betrachten also Fkt der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

k=1: Grundschwingung 

k>1: Oberschwingungen 

Das entspricht einer Zerlegung von f in Grund- und Oberschwingungen – also in ihre Frequenzanteile.

Dieses Prinzip eröffnet eine ganze Welt von Anwendungen [Physik, Elektrotechnik, Signalübertragung, Mobilkommunikation, mp3-Format, ...] und auch weitgehende theoretische Entwicklungen im Rahmen der FUNKTIONALANALYSIS.

in gewissem Sinne die Zusammenführung von lin. Algebra & Analysis

Studium von VR von Fkt, diese sind unendlichdimensional und benötigen $\sum^{\infty}$ statt $\sum^{\dim}$

§1 Punktweise & gleichmässige Konvergenz

1.1. Motivation (Funktionenfolgen und -reihen)

(i) Begriffsbestimmung. Lt [1] Def 2.1. ist eine Folge in (einer Menge) M eine Abb

$$a: \mathbb{N} \to M$$

Schreibweise $a_n = a(n)$
$(a_n)_n$ für die ganze Folge

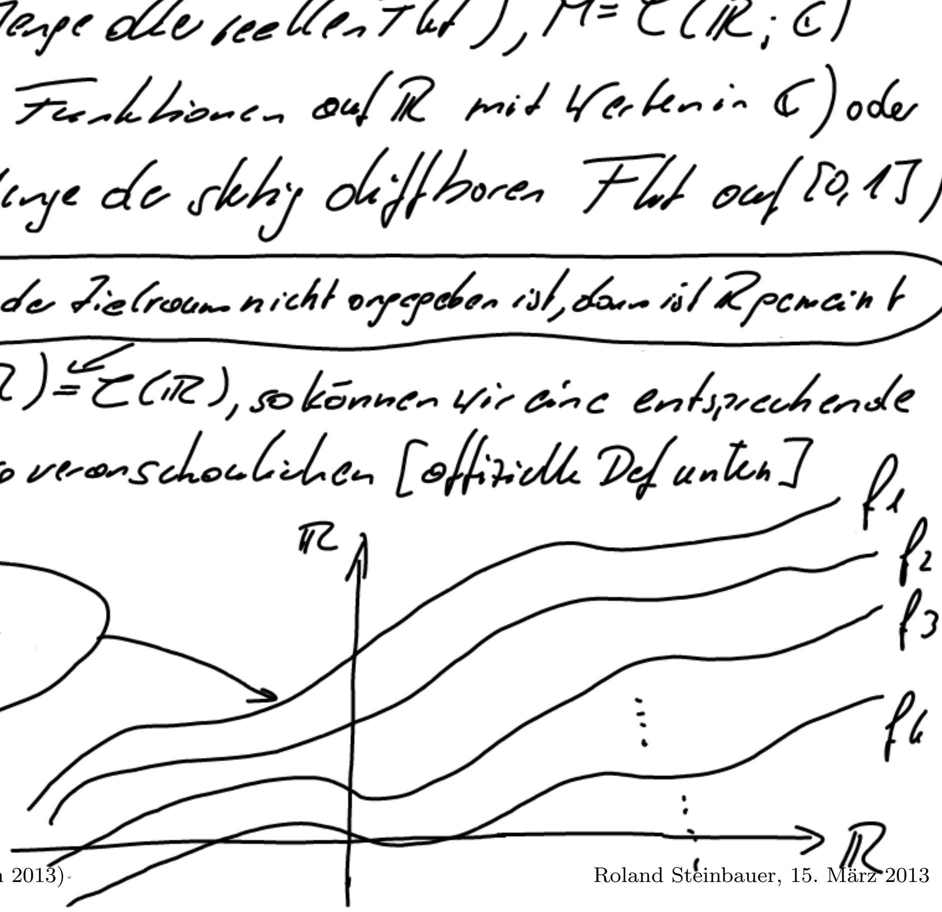
Bisher haben wir in den allermeisten Fällen $M = \mathbb{R}$ gesetzt und somit sog. reelle Folgen betrachtet. Den Fall $M = \mathbb{C}$ haben wir in [2] Exkurs 3.10. betrachtet. Dieser weist keinerlei konzeptuelle Neuigkeiten auf da jede komplexe Folge in Real- & Imaginärteil - also in zwei reelle Folgen - zerlegt werden kann [nichts Neues aber doppelt so viel Arbeit vgl. [2] 3.10(E)]

Jetzt wollen wir Funktionenfolgen betrachten also den Fall, dass M eine Menge von Funktionen ist, z.B. $M = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (Menge aller reellen Fkt), $M = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{C}$) oder $M = \mathcal{C}^1([0,1])$ (Menge der stetig diffbaren Fkt auf $[0,1]$).

Falls der Zielraum nicht angegeben ist, dann ist $\mathbb{R}$ gemeint

Setzen wir z.B. $M = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =: \mathcal{C}(\mathbb{R})$, so können wir eine entsprechende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ etwa so veranschaulichen [offizielle Def unten]

1. Folgenglied ist die ganze Fkt $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usw.



(ii) Wozu Funktionenfolgen? Reelle Folgen und ihre Konvergenz haben wir als essentiellen Begriff und als wichtiges Werkzeug kennengelernt. Ähnlich zentral für die Analysis sind Funktionenfolgen.

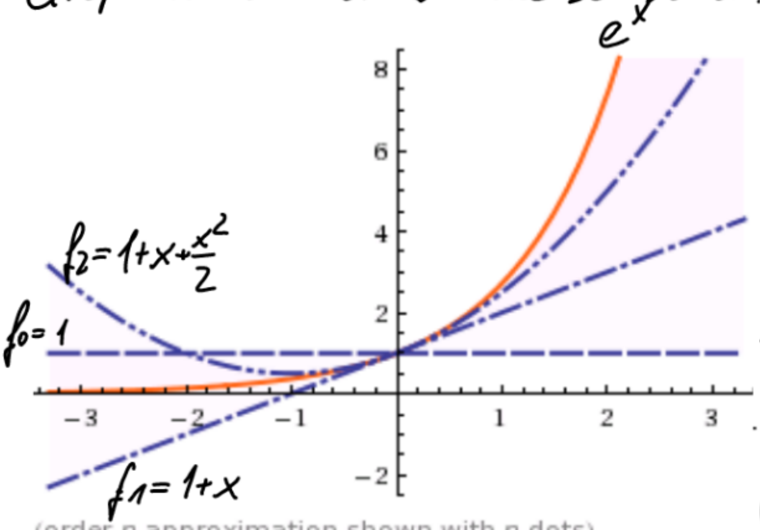
(iii) Okay, Konvergenz von Funktionenfolgen, aber wie? Eine naheliegende Idee ist es, die Konvergenz der Bildpkte ins Spiel zu bringen, also für fixes x die Folge $(f_n(x))_n$ in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$] zu betrachten. Diese Idee führt auf den Begriff der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen [offizielle Def unten].

(iv) Ja, aber hatten wir sowas nicht schon? Ja klar, bei der Exponentialfkt. Diese ist ja [[1] 4.37] definiert als der Limes der Exponentialreihe, genauer ($x \in \mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{C}$ [2] 3.12)

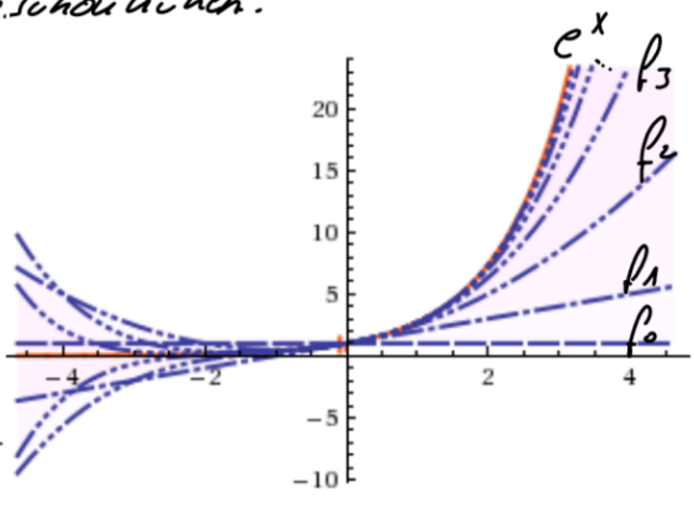
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{f_n \text{ n-te Partialsumme der Exp-Reihe}} \Big)$$

Graphisch können wir das so veranschaulichen.



(order n approximation shown with n dots)



(order n approximation shown with n dots) das schließt insbesondere $A \subseteq \mathbb{R}$ mit ein

1.2 DEF (Funktionenfolge) Sei M eine Menge von Funktionen, die alle auf $A \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind und Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ annehmen. [d.h. $M = \{f : A \to \mathbb{R}\,[\mathbb{C}] \mid f \ldots\}$]

evtl. bestimmte Eig wie etwa stetig, ...

Eine Folge in M [vgl. [1] 2.1] heißt <u>Funktionenfolge auf A</u>.

Wir schreiben für die Folge meist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_n$ oder (f_n). [Jedes $f_n \in M$ also $f_n : A \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$]

1.3. DEF (Punktweise Konvergenz)

Eine Funktionenfolge (f_n) auf A konvergiert punktweise gegen eine Fkt $f : A \to \mathbb{R}\,[\mathbb{C}]$, falls

$$\forall x \in A: \; f_n(x) \to f(x) \text{ in } \mathbb{K}$$

Betrag in $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$

d.h. $\forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(x, \varepsilon) \; \forall n \geq N \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

N hängt von ε <u>und x</u> ab!

1.4 BSP (Pktw konv. Funktionenfolgen)

(i) Sei $A = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ $(n \geq 1)$

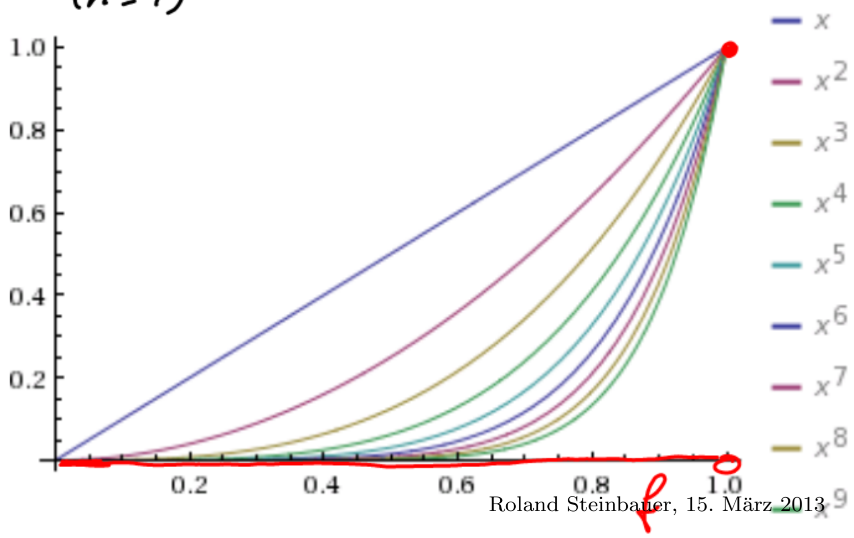
Es gilt

$f_n(0) = 0 \; \forall n$

$f_n(1) = 1 \; \forall n$

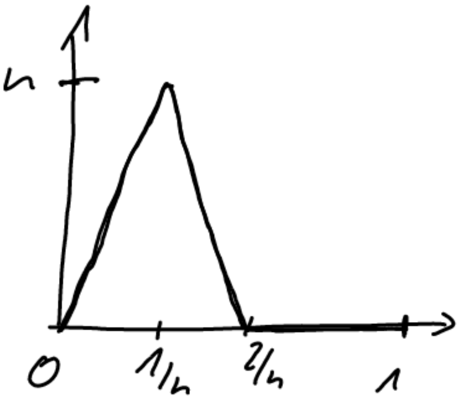
$f_n(x) \to 0 \; \forall x \in (0,1)$

[[1] 1.5]



Also gilt $f_n \xrightarrow{\text{pktw}} f$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

(ii) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ von der Form



[d.h.:

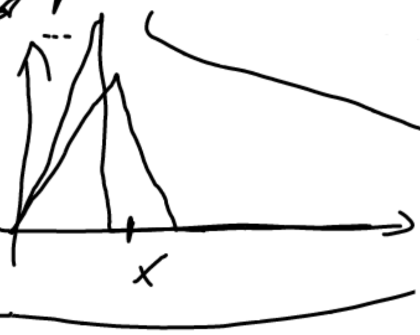
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le 1/n) \\ -n^2 x + 2n & (1/n \le x \le 2/n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

]

Dynamisches Bild: Die Zacken werden höher und wandern nach links

Dann gilt $f_n \to 0$ pktw, denn $f_n(0) = 0 \ \forall n$ und $\forall x > 0 \ \exists N$ sodass $2/N < x$ (N hängt von x ab!) und daher $\forall n \ge N$: $2/n < x$ und somit $f_n(x) = 0$.

Wenn man nur lange genug wartet (bis $n > 2/x$) sind die Buckel an x vorbeigezogen.



1.5 BEM (Punktweise Konvergenz ist ein schwaches Konzept)

So natürlich das Konzept der pktw. Konv. auch ist [vgl. 1.1(iv)] es hat erhebliche Nachteile

(A) schöne Eigenschaften der f_n gehen im Limes verloren.
zB sind in 1.4(i) alle f_n stetig, die Limesfkt aber nicht.

(B) Pktw. Konv. ist blind für „wandernde Pkte". So gilt in 1.4(ii) $f_n \to 0$ pktw aber $f_n(1/n) = n \to \infty$

„wandernder Pkt"

Die Ursache für beide Phänomene liegt darin begründet, dass die Konvergenz von $f_n(x)$ für jedes x separat behandelt wird und keine Rücksicht auf eine gewisse „Gleichmäßigkeit" der Konvergenz in verschiedenen Punkten genommen wird.
Ein Konzept, das darauf Rücksicht nimmt lernen wir jetzt kennen.

1.6 DEF (Gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge (f_n) auf $A \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: A \to \mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$], falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \underbrace{\forall n \geq N \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{(*)}.$$

(hängt nur von ε ab)

Betrag in $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$]

1.7 BEM (Glm & pktw. Konvergenz)

(i) Wir vergleichen die beiden Defs 1.3 und 1.6:

$$f_n \to f \text{ pktw} :\Longleftrightarrow \forall x \ \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f_n \to f \text{ glm} :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Wir sehen, dass „$\forall x$" bei der pktw. Konv. vor „$\exists N$" steht bei der glm. aber dahinter. Daher hängt das N bei der pktw. Konv. von ε und x ab (ist also ein $N(\varepsilon, x)$), bei der glm. Konv. nur von ε (ist also nur ein $N(\varepsilon)$). [vgl. die analoge Situation bei Stetigkeit (in allen Punkten) vs glm Stetigkeit, [2] 2.15]

Daher ist die glm. Konvergenz die stärkere Bedingung
[$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall x \ldots \Rightarrow \forall x \ \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n \geq N$ weil bei

gegebenem ε für jedes x sogar dasselbe N gewählt werden kann.] und es gilt

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm.} \implies f_n \to f \text{ pktw.}}$$

(ii) Folgende einfache Umformulierung von (*) in Def 1.6 ist oft nützlich: Es gilt

$$\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

und daher [vgl. 1.6]

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm} \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0}$$

Vergleichen wir nochmals mit der pktw. Konvergenz,

$$f_n \to f \text{ pktw} \iff \forall x \ |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

so wird nocheinmal klar, dass glm. Konv. der stärkere Begriff ist. Die Umkehrung ist falsch, wie das folgende Bsp 1.8 zeigt. Also gilt insgesamt

$$\text{glm Konv} \underset{\not\Leftarrow}{\implies} \text{pktw Konv}$$

Zur Vorbereitung des angekündigten Bsp. bemerken wir noch

(iii) Falls $f_n \to f$ pktw und f_n überhaupt glm konvergiert, dann stimmen pktw. und glm. Limes überein, also $f_n \to f$ auch glm.

[gegen welche Fkt auch immer]

Denn angenommen $f_n \to f$ pktw und $f_n \to g$ glm

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $f_n \to g$ pktw und daher insgesamt

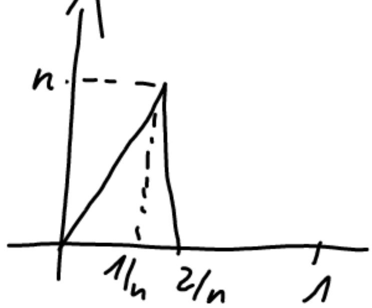
$\forall x \in A$: $f_n(x) \to f(x)$ und

$f_n(x) \to g(x)$ in $\mathbb{R}$ [bzw $\mathbb{C}$]

$\overset{\text{Eind. d. limes}}{\Longrightarrow}$ $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \implies f = g$

[1] 2.21 ← gilt auch in $\mathbb{C}$: spalte in Re & Im auf

1.8 BSP (pktw konv $\not\Rightarrow$ glm konv.)



Sei (f_n) wie in 1.4(iii), d.h. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

Wir haben gesehen, dass $f_n \to 0$ pktw.

Jetzt zeigen wir, dass f_n nicht glm konv.

Angenommen doch, also f_n glm konv

$$\overset{1.7(iii)}{\Longrightarrow} f_n \to 0 \text{ glm} \overset{1.7(ii)}{\Longrightarrow} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \to 0$$

Das widerspricht aber

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

1.9 BSP (glm Konv. der Exponentialreihe auf kp. Intervallen)

Wir betrachten auf $A = [-m, m]$ ($m > 0$ beliebig)

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(n-te Partialsumme der Exp. Reihe in } x\text{)}$$

Wegen [1] 4.36, 4.37 gilt $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) \to \exp(x)$, also insbesondere $f_n \to \exp$ pktw auf $[-m, m]$. [vgl. auch 1.1(iii)]

Wir zeigen jetzt, dass sogar $f_n \to \exp$ glm auf $[-m,m]$ gilt. Dazu bemühen wir (ein weiteres Mal) die Restgliedabschätzung aus [1] 4.42:

$$\exp(x) = f_n(x) + R_{n+1}(x) \text{ und } |R_{n+1}(x)| \le 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall x \text{ mit } |x| \le 1 + n/2$$

Daher gilt $\forall n \ge 2(m-1)$ $[\Rightarrow m \le 1 + n/2]$

$$\sup_{x\in[-m,m]} |f_n(x) - \exp(x)| \le 2\frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

[UE, Bl. 3 13](b)]

1.10 MOTIVATION (Warum glm Konv „besser" als pktw. K. ist)

Von den beiden Mängeln der pktw. Konvergenz, die wir in 1.5. besprochen haben, ist für die glm. Konv. (B) ausgeschlossen, vgl. 1.8. Ebenso wichtig ist, dass (A) ebenfalls verbessert werden kann. Wie das folgende Thm besagt bleibt Stetigkeit im glm. Limes erhalten.

1.11 THM (Glm Konv. & Stetigkeit)

Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen auf $A \subseteq \mathbb{C}$. Falls $f_n \to f$ glm konvergiert, dann ist f stetig auf A.

[kurz gesagt: Der glm Limes stetiger Fkt ist stetig.]

Beweis. [„klassischer $\varepsilon/3$-Beweis"]

Sei $x \in A$ beliebig. Wir zeigen, dass f stetig in x ist.

Sei $\varepsilon > 0$

$$\overset{f_n \to f \text{ glm}}{\Longrightarrow} \exists N\ \forall x \in A\ \ |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \qquad (*)$$

$$\underset{\text{in } x}{\overset{f_N \text{ stetig}}{\Longrightarrow}} \exists \delta > 0\ \forall x' \in A \text{ mit } |x - x'| < \delta:$$

$$|f_N(x) - f_N(x')| < \varepsilon/3 \quad (**)$$

$$\Longrightarrow \forall x' \in A \text{ mit } |x - x'| < \delta:$$

$$|f(x) - f(x')| \underset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')| + |f_N(x') - f(x')|$$

$$\overset{(*), (**)}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\Longrightarrow f$ stetig in x. $\square$

1.12 WARNUNG + BEM (Mit pktw. K. geht das nicht!)

(i) Thm 1.11 gilt nicht, falls statt glm Konv. nur pktw. Konv. vorausgesetzt wird. Ein expliziter Gegenbsp ist Bsp 1.4(i), denn $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$ ist stetig $\forall n$, aber

$$f_n \xrightarrow{\text{pktw}} f, \text{ wobei } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

und f ist nicht stetig in $x = 1$; vgl. 1.5(A).

(ii) Diese Tatsache kann man für folgende Schlussweise einsetzen:

Gilt $f_n \to f$ pktw und alle f_n sind stetig aber ist f unstetig, dann gilt $\underline{f_n \not\rightrightarrows f \text{ glm.}}$ ↪ siehe auch [UE]

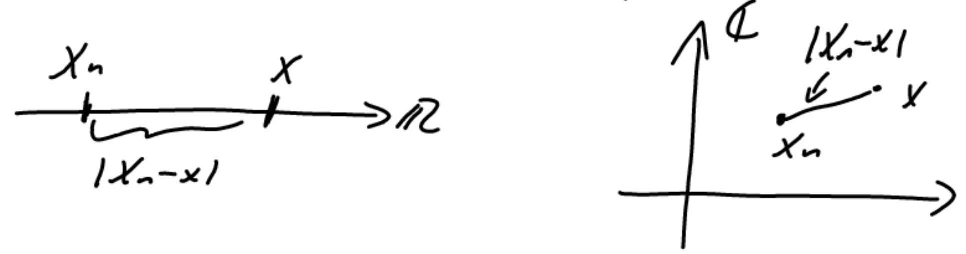
1.13 MOTIVATION & AUSBLICK (Konvergenz & Abstandsmessung)

(i) Unser nächstes Ziel ist es, die glm. Konv. von Funktionenfolgen auf eine nützliche Art umzuformulieren. Betrachten wir dazu nochmals die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ $[\mathbb{C}]$:

$$x_n \to x :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x - x_n| < \varepsilon$$

Betrag in $\mathbb{R}$ $[\mathbb{C}]$

Hier spielt $|x_n - x|$ die Rolle eines „Abstands" zwischen den reellen oder komplexen Pkten x_n und x



sodass wir schreiben können:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \text{„Abstand von } x_n \text{ zu } x\text{"} \to 0 \qquad (*)$$

Um eine analoge Formulierung für die glm. Konv. zu erhalten, müssen wir einen geeigneten <u>Abstandsbegriff für Funktionen</u> finden. Vergleichen wir $(*)$ mit der Formulierung in 1.7(ii), nämlich

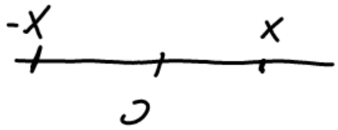
$$f_n \to f \text{ glm} \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

so liegt es auf der Hand für 2 Fkt auf A zu definieren

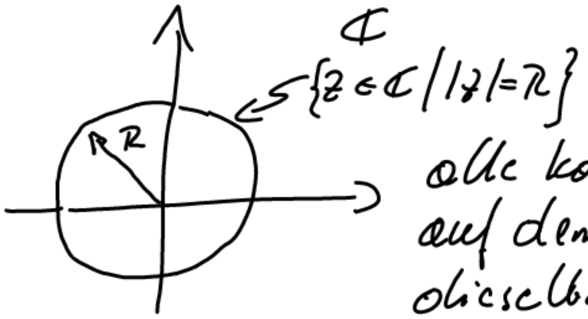
„Abstand von f zu g" $:= \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$.

max Abstand der Fktswerte, „Dicke" vgl. A.2

(ii) In $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$] beruht der Abstandsbegriff $|x-y|$ je auf dem Begriff des Betrags. Analog dazu lässt sich obiger Abstandsbegriff auf einen Begriff bauen, der – analog zum Betrag, der die Größe einer Zahl misst – die Größe einer Fkt misst.



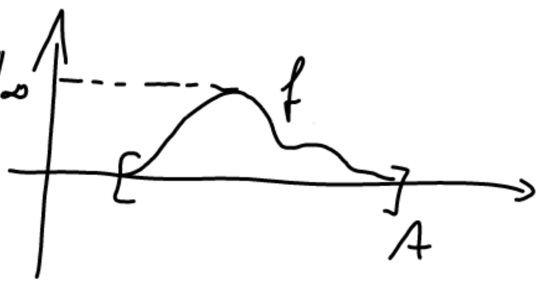
$|x|$ misst den Abstand von $\pm x$ zu 0, also die Größe von $\pm x$



alle komplexen Zahlen auf dem Kreis haben dieselbe „Größe", nämlich R

So erhalten wir die Unendlichnorm bzw Supremumsnorm [offizielle Def unten]

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$$



$\|f\|_\infty$ ist im wesentlichen der betragsmäßig größte Wert von f

(iii) Es lassen sich noch viele weitere „Größenbegriffe" sprich Normen für Funktionen finden. Prominente Bsp sind etwa ($A=[a,b]$)

1-Norm $\longrightarrow$ $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$

Im wesentlichen die Fläche unter f (vgl. A.2)

2-Norm; wichtig für Fourier-Reihen $\longrightarrow$ $\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$, irgendeine Norm

die jeweils nach dem Schema

$$f_n \to f \text{ im Sinne der } \| \ \|_* \iff \|f_n - f\|_* \to 0$$

einen eigenen Konvergenzbegriff erzeugt.

Das Studium von Vektorräumen von Fkt mit verschiedenen Normen ist Teil des math. Gebiets der

FUNKTIONALANALYSIS

VR

das in gewisser Weise die Analysis mit der lin. Algebra zusammenführt.

$\| \ \|$ & Konvergenz

Nun offiziell

1.14 DEF ($\| \ \|_\infty$) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und $f: A \to \mathbb{R}\ [\mathbb{C}]$.
Wir definieren die Unendlichnorm oder Supremumsnorm von f (auf A) als

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

und setzen $\|f\|_{\infty,A} = \infty$, falls f auf A unbeschränkt ist.

Falls A aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir nur $\|f\|_\infty$.

1.15 BEOBACHTUNG (zu $\| \ \|_\infty$)

(i) Tatsächlich gilt $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ denn zB
$\|0\|_\infty = 0$, $\|x\|_{\infty,[0,1]} = 1$, $\|1/x\|_{(0,1]} = \infty$.

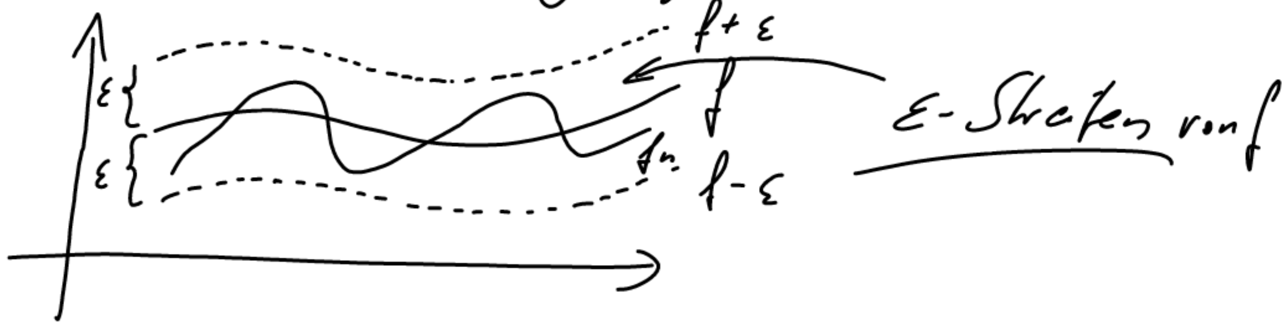
(ii) Es gilt f beschränkt $\left[[R]\ 2.10\ |f(x)| \leq C\ \forall x \right]$ genau dann, wenn $\|f\|_\infty < \infty$

(iii) Wie in 1.13(i),(ii) diskutiert gilt [vgl 1.7 (ii)]

$$\boxed{f_n \to f \text{ glm} \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0} \quad \text{bzw}$$

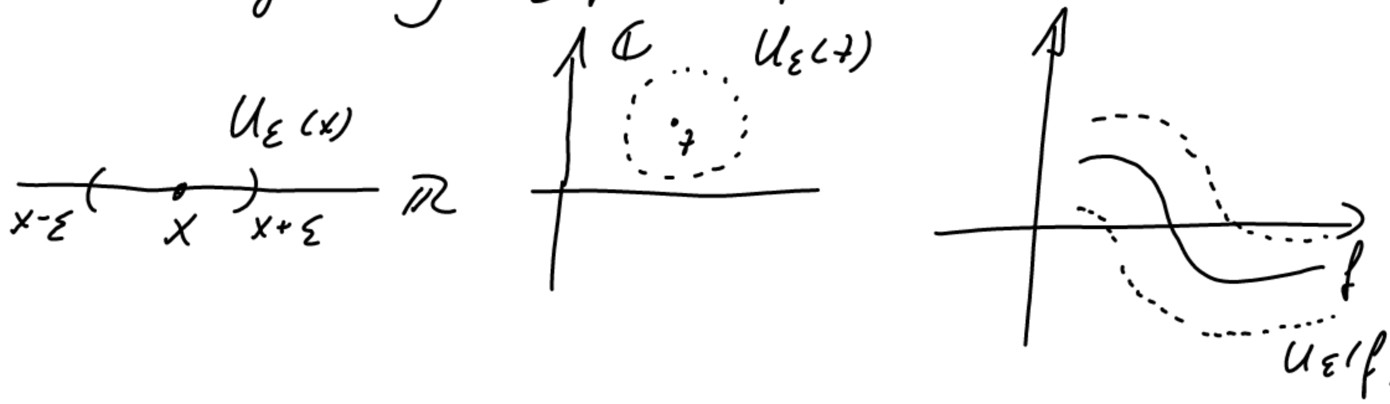
$$f_n \to f \text{ glm} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \underbrace{\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon}_{(*)}.$$

Bedingung (*) lässt sich gut graphisch darstellen.



$\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bedeutet ja, dass $f_n(x)$ nie weiter als ε von $f(x)$ entfernt ist, f_n also im ε-Streifen zwischen $f-\varepsilon$ und $f+\varepsilon$ liegt.

(iv) Der ε-Streifen spielt also hier die Rolle der ε-Umgebungen in $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ und wird daher auch als ε-Umgebung $U_\varepsilon(f)$ von f bezeichnet



1.16 MOTIVATION ($\|\ \|_\infty$ und Konv. v. Funktionenreihen)

Wie wir oben gesehen haben ist $\|\ \|_\infty$ der zentrale Begriff, der eine anschauliche Formulierung der glm. Konvergenz ermöglicht. Sie erlaubt aber auch äußerst praktische Formulierungen, wie wir am folgenden wichtigen Satz über die Konvergenz von Funktionenreihen sehen können.

1.17 THM (Satz von Weierstraß)

Dass ist eine Reihe reeller Zahlen, also nichts Neues!

Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf $A \subseteq \mathbb{C}$. Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert, dann gilt:

(i) Für alle $x \in A$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut.

[Wir sagen: die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert absolut]

(ii) Sei $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \longrightarrow F \text{ gleichmäßig}$$

[Wir sagen die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konv. glm.]

[Eine beliebte Kurzform des Thms lautet: Falls $\sum \|f_k\|_\infty < \infty$, dann konv. die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut & gleichmäßig]

Beweis. (i) Wir zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konv. abs. $\forall x \in A$

Sei $x \in A$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt lt. Def $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$

$\Longrightarrow \sum \|f_k\|_\infty$ ist eine konv. Majorante für $\sum |f_k(x)|$

$\overset{[1]4.19(i)}{\Longrightarrow} \sum |f_k(x)|$ konvergiert.

(ii) (1) Gewinnen eines Kandidaten für den glm Limes

$(i) \Rightarrow \sum |f_k(x)|$ konv $\forall x \in A \overset{[1]4.16}{\Longrightarrow} \sum f_k(x)$ konv $\forall x$

Wir können daher für $x \in A$ definieren $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

(2) Wir zeigen: $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \to F$ glm

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \text{ konv} \overset{\text{CP }[1]4.3+[1]2.28}{\Longrightarrow} \exists N\ \forall n \geq N \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $x \in A$, dann gilt für $n \geq N$

verallg. Δ-Ungl
vgl. [1]4.42

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$$

$$\overset{[1]2.28}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon .$$

Also gilt $F_n \to F$ glm. $\square$

1.18 BSP (abs & glm konv. Funktionenreihen)

(i) Nochmals die Exponentialreihe. Sei $A=[-m,m]$ $(m>0)$.
Wir betrachten $f_k(x)=x^k/k!$ $(k\in\mathbb{N})$
Es gilt $\|f_k\|_{\infty,A}=m^k/k!$ und daher

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|f_k\|_\infty=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^k}{k!}=e^m<\infty$$

$$\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}\sum_{k=0}^{\infty}f_k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k! \text{ konv glm auf } [-m,m],$$

was ein alternativer Beweis zu 1.9. ist.

(ii) Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir $f_k(x)=\dfrac{\cos(kx)}{k^2}$ $(k\geq 1)$
Es gilt $\|f_k\|_\infty=\frac{1}{k^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ [M] h.9(ii)

und daher konvergiert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ abs & glm (auf $\mathbb{R}$).

1.19 MOTIVATION (Vertauschen von Limes & Integral)

Ab hier bis Ende §1 alles reell

Wir betrachten nun die folgende Frage: Gegeben seien $f_n:\mathbb{R}\supseteq A\to\mathbb{R}$ und (f_n) konv. gegen eine Grenzflkt f.
Die Integrale $\int f_n$ seien bekannt. Was können wir über das Integral der Grenzfkt $\int f$ sagen?

Gilt $\left(\int f_n\right)\to\left(\int f\right)$, d.h. gilt

Folge in $\mathbb{R}$

$$\lim\int f_n=\int\lim f_n\ ?$$

Vertausche. von lim & $\int$