Wie wir gleich sehen werden lautet die Antwort ja im Falle glm. Konv. & nein für pktw. Konv.

1.20 PROP (Vertauschung von Limes & Integral)

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine glm. konv. Folge stetiger Fkt. Dann gilt

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

Beweis. [erfreulich kurz & einfach] Wir setzen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f \text{ ist stetig auf } [a,b]$$

$$\overset{[4]\ 1.12(ii)}{\Longrightarrow} f_n, f \quad R\text{-intbar auf } [a,b]$$

Schließlich gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\right| \overset{[4]\ 1.15(ii),\ 1.19}{\leq} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt$$

$$\underset{[4]\ 1.21(ii)}{\leq} (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{f_n \to f \text{ glm}} 0.$$

$\square$

1.21 BSP (Integral einer Funktionenreihe)

Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ $(n \geq 1,\ x \in [0, 2\pi])$. In 1.18(ii) haben wir gesehen, dass f_n glm. konvergiert. Daher gilt mit 1.20 für $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx \quad \boxed{4}\ 1.15(ii)$$

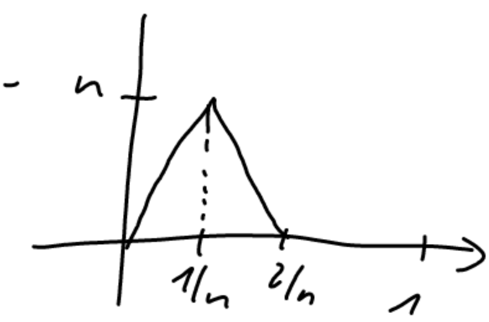
$$\underset{1.10}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \int_0^t \cos(kx)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k^3}$$

Mehr dazu in PS, UE

1.22 WARNUNG (Pktw. Limes vertauscht nicht mit $\int$)

Wir betrachten nocheinmal die „Zacken-funktionen" aus 1.4(ii). Es gilt



$$\int_0^1 f_n(t) = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\,n = 1 \quad \forall n$$

aber

$$\int_0^1 \lim f_n \underset{1.4(ii)}{=} \int_0^1 0 = 0 \quad \left[\neq 1 = \lim \int_0^1 f_n\right]$$

1.23 MOTIVATION (Vertauschen von Limes & Ableitung)

Jetzt wollen wir uns die analoge Frage über die Vertauschbarkeit von Limes einer Funktionenfolge mit dem Differenzieren stellen; wir wollen also herausfinden ob bzw. unter welchen Umständen

$$(\lim f_n') = (\lim f_n)'$$

Wie schon oft bemerkt: Integrieren ist „einfacher" als Diff.

gilt. Hier ist die Situation komplizierter als im Falle der Integration – insbesondere reicht (bei klarerweise als diffbar vorausgesetzten f_n's) auch die glm. Konv. von

f_n nicht ow, wie wir unten sehen werden. Zunächst aber das pos. Resultat.

1.24 PROP (Vertauschen von limes & Differenzieren)

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig diffbarer Funktionen. Sei f_n pktw. konvergent gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei die Folge der Ableitungen f_n' glm. konvergent. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f' \underset{(\text{pu. def.})}{=} (\lim f_n)' = \lim (f_n')$$

Beweis [wieder erfreulich einfach und kurz ...]

Wir setzen $g(x) := \lim f_n'(x) \overset{1.11}{\Longrightarrow} g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $(*)$

f_n stetig diffbar $\overset{\text{HsDI}}{\Longrightarrow} \forall x \in [a,b]\ \forall n$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$f_n' \to g \text{ glm} \overset{1.20\,(n\to\infty)}{\Longrightarrow} \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

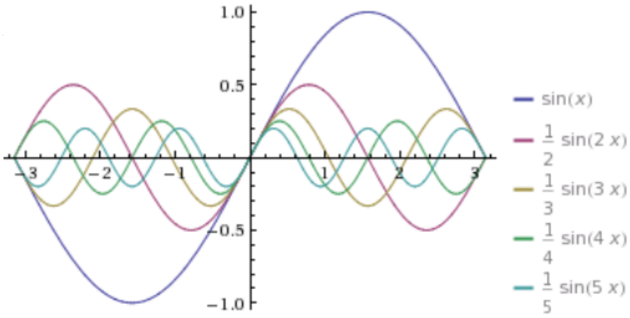
$$\underset{\text{HsDI}}{\overset{d/dx}{\Longrightarrow}} \quad \underline{f'(x)} = 0 + \underline{g(x)}$$

Schließlich ist $g = f'$ stetig $[(*)]$, also $f \in C^1$. $\square$

1.25 WARNUNG & AUSBLICK

(i) Die glm Konv. von f_n reicht – selbst wenn alle f_n stetig diffbar sind – nicht einmal dafür aus, dass f_n' (auch nur) pktw. konvergiert. Ein explizites Bsp dafür ist ($n \geq 1$)

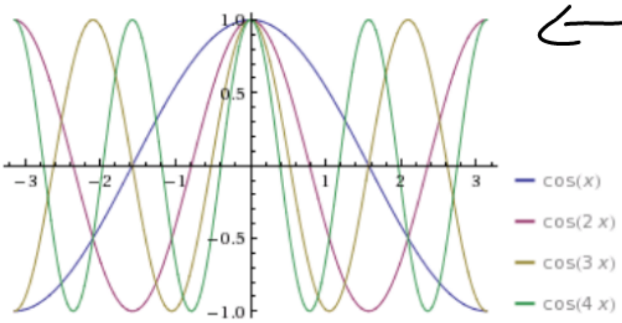
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$



Es gilt $\|f_n\|_\infty = 1/n \to 0 \implies f_n \to 0$ glm.

aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ ist nicht pktw. konvergent, denn setze z.B. $x = \pi$, dann gilt

$$f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$



(ii) Die Situation wird bedeutend einfacher, wenn man nur speziellere Typen von Funktionenfolgen/reihen betrachtet – zB die <u>Potenzreihen</u>, denen wir uns in §2 zuwenden.

ZWISCHENSPIEL: SÄGEZAHN- & HAIFISCHZAHN-FUNKTION

Z.1 INTRO. In diesem Zwischenspiel wollen wir ausführlich 2 Beispiele diskutieren, die im späteren Verlauf mehrmals auftreten werden. Wir werden die beiden Funktionenreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (S) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \quad (H)$$

untersuchen und vor allem die Summenfunktionen berechnen. Dabei werden wir einiges aus unserem bisher gesammelten Wissen verwenden. Wir beginnen mit einer Anwendung der part. Integration, die vielfältig verwendbar ist.

Z.2 SATZ (Lemma von Riemann-Lebesgue)

Sei $f \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$F(k) := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx.$$

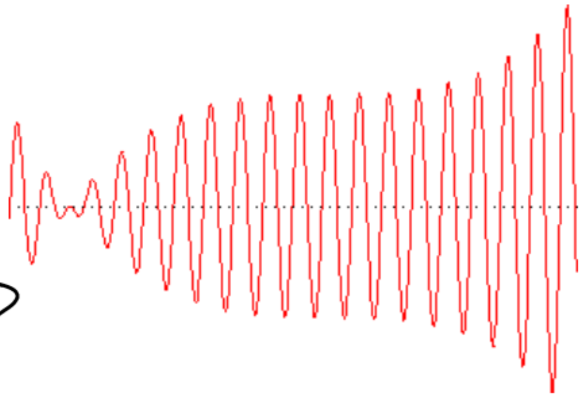
$\int_a^b f(x)\sin(kx)$ gibt eine Zahl, die von k abhängt. Nun lasse k laufen.

Dann gilt

$$\lim_{|k|\to\infty} F(k) = 0.$$

Z.3 BEM (Die anschauliche Bedeutung des L.v R.L.)

Die Behauptung des Satzes läßt sich anschaulich so interpretieren. Die immer schnellere Oszillation von $\sin(kx)$ löscht im Integral schöne f's aus – sie werden „herausgemittelt.“



Das Integral einer solchen Fkt ist klein, – die pos & negativen Teile löschen sich beinahe aus

Wenn die Frequenz der Oszillation $\to \infty$ geht, geht das $\int$ gegen 0

Beweis. Lt. Voraussetzung f, f' stetig auf $[a,b]$

$\overset{[2]\,2.11}{\Longrightarrow}$ f, f' beschränkt auf $[a,b]$

d.h. $\exists M>0: \|f\|_{\infty,[a,b]}, \|f'\|_{\infty,[a,b]} \le M \quad (*)$

$\longleftarrow$ 1.15(ii)

Sei $k \neq 0$, dann gilt

$$F(k) = \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$$

$$\overset{p.I}{=} f(x)\,\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx$$

$$\Longrightarrow |F(k)| \overset{|\cos(x)|\le 1}{\le} \frac{1}{|k|}\,|f(x)|\Big|_a^b + \frac{1}{|k|}\int_a^b |f'(x)|\,dx$$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{2M}{|k|} + \frac{1}{|k|}(b-a)M \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty)$$

$\square$

2.4 LEMMA (Eine trigonometrische Summenformel)

Sei t kein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

$\neq 0$ laut Voraussetzung

Beweis. Lt. def gilt $\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)$ [vgl. [R] 3.17(iii)]

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} - \frac{1}{2}$$

kompensiere den Term mit $k=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{e^{ikt}}_{(e^{it})^k}$$

geo. Reihe

$$= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

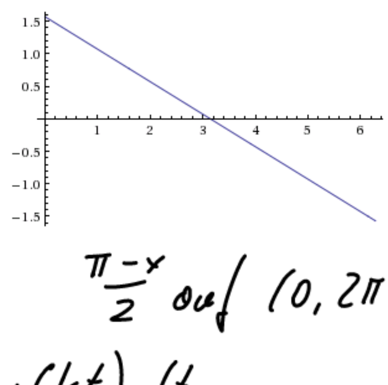
$$= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \qquad \square$$

7.5 BSP (Punktw. Konvergenz für (S))

Für $0 < x < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$$



$\frac{\pi - x}{2}$ auf $(0, 2\pi)$

Tatsächlich haben wir für $0 < x < 2\pi$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)\,dt = \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,dt$$

$$\overset{7.4}{=} \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2} \right) dt = \underbrace{\int_{\pi}^{x} \underbrace{\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}}_{\in C^1(0,2\pi)} \sin((n+1/2)t)\,dt}_{\to\, 0\ [7.2]} - \frac{x - \pi}{2}$$

$$\to \frac{\pi - x}{2}$$

7.6 Spezialfall. Setzen wir in 7.5 $x = \pi/2$ so erhalten wir

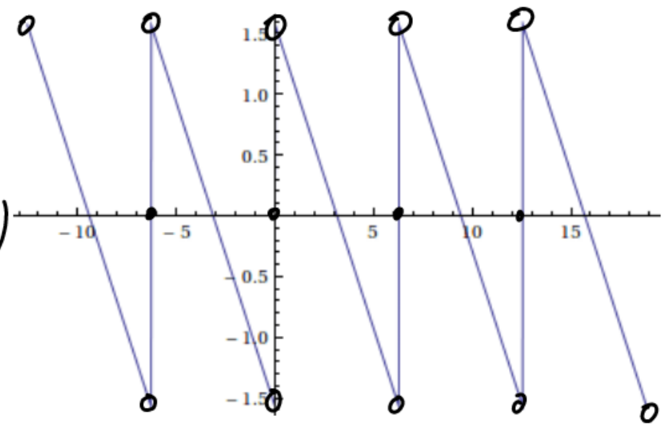
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schöne & berühmte Formel

7.7 Die Sägezahnfkt. Wir definieren $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als periodische Fortsetzung von $\frac{\pi - x}{2}$, d.h.

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0, 2\pi)) \\ S(x + 2n\pi) = S(x) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in (0, 2\pi)) \end{cases}$$



[Die Sägezahnfkt auf $(-4\pi, 6\pi)$]

Nach 7.5 gilt

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$ Für $x = 0$ stimmt die Aussage trivialerweise. Schließlich gilt sie ebenso für $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, weil $\sin(k(x + 2n\pi)) = \sin(kx)$.

Also gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ (im Sinne der pktw. Konv.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = S(x)$$ die sog. Sägezahnfkt.

Z.8 Die glm. Konvergenz der Sägezahnfkt.

(i) Die Konvergenz in Z.7 kann nicht auf ganz $\mathbb{R}$ glm sein, weil die PS $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ ist, aber die Grenzfkt unstetig [vgl. 1.12 (iii)].

(ii) Tatsächlich ist die Konvergenz glm. auf allen Intervallen der Form $[\delta, 2\pi-\delta]$ $(\delta>0)$.

Es gilt nämlich $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ mit $S_n := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$

$$|S_n(x)| = \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)}_{=\operatorname{Im}(e^{ikx})}\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\Big| = \Big|e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\Big|$$

$$\overset{\text{geom. R.}}{=} \underbrace{|e^{ix}|}_{=1}\,\Big|\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\Big| \le \frac{2}{|1-e^{ix}|}$$

$$= \frac{2}{\underbrace{|e^{ix/2}|}_{=1}}\,\frac{1}{|e^{ix/2}-e^{-ix/2}|} = \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \le \frac{1}{\sin(\delta/2)} \quad (*)$$

kleinster Wert von $\sin(x/2)$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$

unabhängig von n!

Nun folgt $\forall m \ge n > 0$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin(kx)}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{\overbrace{S_k(x)-S_{k-1}(x)}^{\sin(kx)}}{k}\Big|$$

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_{k-1}}{k} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=n-1}^{m-1} \frac{S_l}{l+1} = \sum_{l=n}^{m} \frac{S_l}{l+1} - \frac{S_m}{m+1} + \frac{S_{n-1}}{n}$$

$$= \Big|\sum_{k=n}^{m} S_k(x)\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big) + \frac{S_m}{m+1} - \frac{S_{n-1}}{n}\Big|$$

Teleskopsumme $\sum_{k=n}^{m}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n}\Big) = \frac{2}{n\sin(\frac{\delta}{2})}$$

$$\Longrightarrow \Big|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\Big| \le \frac{2}{n\sin(\frac{\delta}{2})} \quad \forall x \in [\delta, 2\pi-\delta] \quad (**)$$

Daraus folgt nun die behauptete glm. Konvergenz: $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k} - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \overset{(**)}{\leq} \underbrace{\frac{2}{n \sin(\frac{\delta}{2})}}_{\text{unabhängig von } x\,!} \to 0$$

2.9 BSP (Die Haifischzahnflkt) ← Achtung: Keine offizielle Terminologie

Wir berechnen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} =: H(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

Jetzt geht's Schlag auf Schlag

- $1.18(ii) \Rightarrow \sum \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konv. glm auf $\mathbb{R}$ $\overset{1.11}{\Longrightarrow}$ H stetig auf $\mathbb{R}$
- Die differenzierte Reihe ist $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

$$\overset{2.8}{\Longrightarrow} \quad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x-\pi}{2} \text{ glm auf jedem } [\delta, 2\pi-\delta]$$

$$\overset{1.24}{\Longrightarrow} H'(x) = \frac{x-\pi}{2} \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

jedes solche liegt in einem $[\delta, 2\pi-\delta]$

$$\overset{\text{Int}}{\Longrightarrow} H(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante})$$

und weil H stetig ist $\forall x \in [0, 2\pi]$!

Muß auch am Rand so aussehen $\boxed{R}$ 1.26

- Daher können wir c mittels Integration bestimmen

$$\int_0^{2\pi} H(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 dx + \int_0^{2\pi} c\,dx = \frac{(x-\pi)^3}{12}\Bigg|_0^{2\pi} + 2\pi c$$

$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

Andererseits gilt $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k \geq 1$

und H ist glm Limes

$$\overset{1.20}{\Longrightarrow} \int_0^{2\pi} H(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{c = -\pi^2/12}$$

Damit gilt also

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \forall x \in [0,2\pi]}$$

glm. Limes

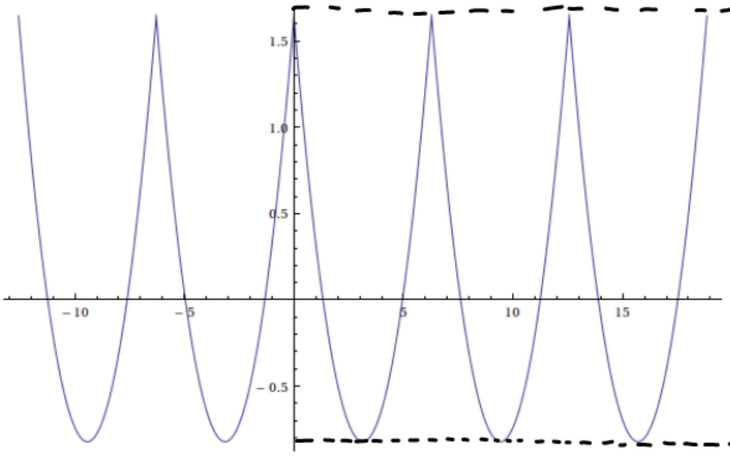
Definieren wir wie vorher die periodische Fortsetzung von $\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ also

Achtung: Nicht korrekt vorgetragen

$$\begin{cases} H(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ H(x+2n\pi) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} & n \in \mathbb{Z},\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

so erhalten wir die sog. Haifischzahnfkt und es gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = H(x) \quad \text{glm. auf } \mathbb{R}}$$



$\pi^2/4 - \pi^2/12 = \pi^2/6 \approx 1{,}64$

[Die Haifischzahnfkt auf $[-4\pi, 6\pi]$]

$-\pi^2/12 \approx -0{,}82$

7.10 Spezialfall.

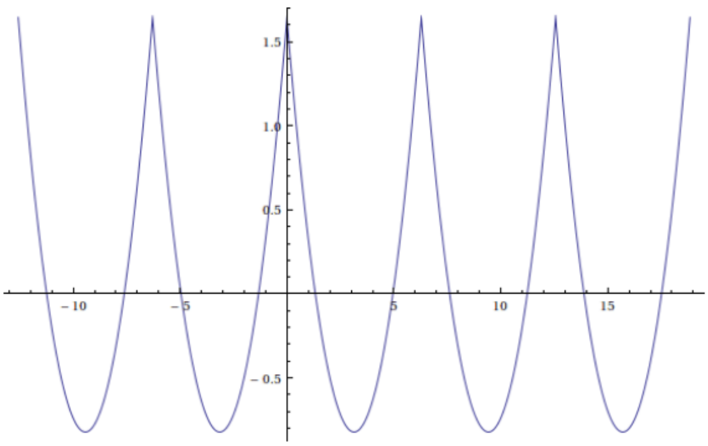
Setzen wir in 7.9 $x=0$ so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(0)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$$

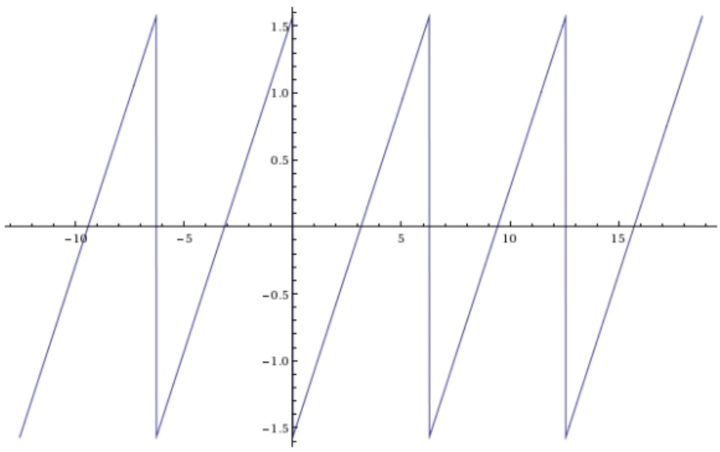
ebenfalls berühmt & schön

7.11 Fazit

H



$-S$



anschaulich klar

Wir haben insgesamt:

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$ glm. auf $\mathbb{R}$, stetig, nicht diffbar in $2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$ pktw. auf $\mathbb{R}$, glm auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ & per. Fortsetzung
stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\forall x \neq 2n\pi$: $H'(x) \overset{1.24}{=} -S(x)$, was man auch den Graphen ansieht.

§ 2 POTENZREIHEN

2.1. MOTIVATION (Was sind einfache Fkt?)

Die einfachsten Fkt, die wir kennengelernt haben sind konstante Fkt $f(x)=c\in\mathbb{R}$, lineare Fkt $f(x)=kx+d$, Polynome $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ ($n\in\mathbb{N}$, der Grad von f).

Hoppala: konstante & lineare Funktionen sind ja nur spezielle Polynome ($a_0=c$, $n=0$ bzw $a_0=d$, $a_1=k$, $n=1$) nämlich vom Grad 0 bzw. 1.

Also: Die einfachsten Fkt sind Polynome. Aber was sind die nächst einfachen Fkt?

Kennengelernt haben wir etwa exp, sin, cos, die als Reihen gegeben sind [[1] 4.3, [2] 3.17(v)]

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\dots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=0+x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\dots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}x^2+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

Wir sehen also, dass diese Funktionen Limiten von Polynomen sind, wobei der Grad n gegen ∞ geht.

In gewisser Weise sind also die nächst einfacheren Fkt nach den Polynomen die Polynome von „unendlichem Grad." Genauer ausgedrückt Funktionenreihen von der Form

Das ist keine offizielle Terminologie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

In diesem § werden wir systematisch solche Funktionenreihen – genannt Potenzreihen, offizielle Def unten – studieren.

Dabei ist es natürlich etwas allgemeiner vorzugehen und

(1) komplexe Koeffizienten c_k ($\in \mathbb{C}$, statt $a_k \in \mathbb{R}$) und auch komplexe „Variable" z resp. z^k ($\in \mathbb{C}$ statt $a, a^k \in \mathbb{R}$) zuzulassen und ebenso

vgl. die komplexe Exp-Reihe $\boxed{Z}$ 3.11 über die wir erst zu sin & cos gelangt sind

(2) Verschiebungen $(x - x_0)$ bzw. $(z - z_0)$ statt x bzw. z um eine fixe reelle x_0 bzw. komplexe Zahl z_0 zu gestatten.

Also kurzum betrachten wir Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad (a_k, x_0 \in \mathbb{R}) \quad \text{bzw}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad (c_k, z_0 \in \mathbb{C})$$

als Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ bzw $z \in \mathbb{C}$ und fragen uns insbesondere nach deren Konvergenz.

Jetzt aber los [und zwar gleich den komplexen Fall, der den reellen Fall ja als Spezialfall beinhaltet].

2.2 DEF (Potenzreihe)

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nennen den Ausdruck ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad \left[\text{kurz nur } \sum c_k(z-z_0)^k\right]$$

eine Potenzreihe mit (Entwicklungs-)Koeffizienten c_k und Entwicklungspunkt z_0.

2.3 BSP (Potenzreihen)

(i) Die komplexe Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ($z \in \mathbb{C}$) aus [2] 3.11 ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $c_k = 1/k!$ und Entwicklungspkt $z_0 = 0$ $\left[(z-0)^k = z^k\right]$.

Bemerke $c_k \in \mathbb{R}$

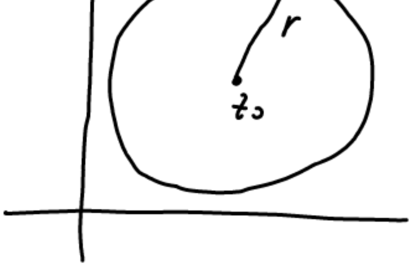
(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine (reelle) Potenzreihe mit Koeffizienten $c_0 = 0$, $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \geq 1)$ und Entwicklungspkt $x_0 = 0$.

2.4 BEM (Nochmal: was wir hier tun)

(i) (Folgen von Polynomen) Im Folgenden werden wir Konvergenzeigenschaften von PR in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ studieren, d.h. wir studieren Folgen von komplexen Polynomfkt $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$.

(ii) (Weiterhin keine Angst vor $\mathbb{C}$) Wir haben es ja schon längere Zeit mit Fkt zu tun, die auf (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ definiert sind. Dieser Tatsache haben wir bisher wenig Aufmerksamkeit schenken müssen.

Jetzt sind wir aber erstmals in der Situation, dass wir uns Fragen nach der Konvergenz der $p_n(z)$ stellen und dabei $z \in \mathbb{C}$ variieren. Als wesentliches Kriterium wird sich erweisen, wie weit z vom Entwicklungspkt z_0 weg ist. Diesen Abstand „messen" wir natürlich wieder mit dem Betrag in $\mathbb{C}$. Insbesondere verwenden wir die folgende Notation:



$$K_r(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$$

Rand gehört dazu

bezeichnet die abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ um z_0 mit Radius r.

2.5 PROP (Konvergenz von PR – zum Ersten)

Sei $\sum c_k (z-z_0)^k$ eine Potenzreihe die im Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiert (d.h. $\sum c_k (z_1-z_0)^k$ konv.) und sei $0 < r < |z_1 - z_0|$, dann gilt

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ konvergiert absolut & gleichmäßig für $z \in K_r(z_0)$ [man sagt auf $K_r(z_0)$]

(ii) Die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}$$ konvergiert ebenfalls abs & glm auf $K_r(z_0)$

Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist das die übliche Ableitung von Polynomen; Polynome auf $\mathbb{C}$ haben wir bisher nicht differenziert; daher „formal“

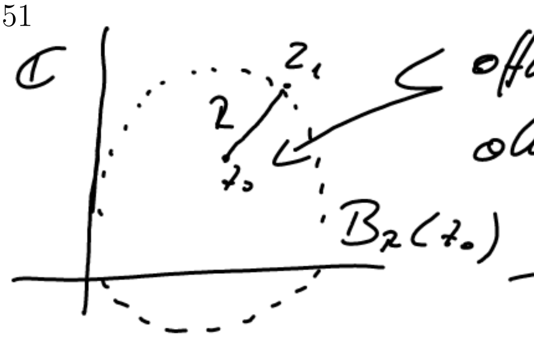
2.6 BEM (Zur Konvergenz von PR)

(i) (Keine Lücken) Prop 2.5(i) besagt, dass falls wir schon wissen, dass die PR im Pkt z_1 konvergiert sie schon auf jeder kleineren abg. Kreisscheibe um z_0 ganz toll konvergiert.

nämlich abs & glm

$K_r(z_0)$'s wo alles perfekt läuft.

(ii) Insbesondere ist eine Potenzreihe in allen Pkten der offenen Kreisscheibe mit $R = |z_1 - z_0|$, d.h. $\forall z \in B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R = |z_1 - z_0|\}$ punktweise konvergent.

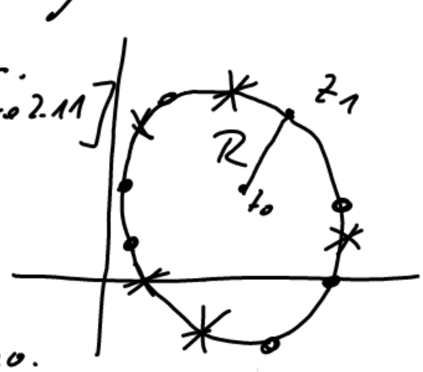


offene Kreisscheibe auf der noch immer alles relativ gut geht

WARNUNG: Glm Konv. auf $B_R(z_0)$ wäre stärker & ist i.a. nicht gegeben

In diesem Sinne gibt es keine „Lücken" in der Konvergenz zwischen z_0 und z_1.

(iii) (Der Rand ist fraglich) Was jedoch auf dem Kreis durch z_1 passiert, kann nicht allgemein beantwortet werden — siehe Bsp unten. [etwa 2.11]
In Pkten z mit $|z-z_0| = |z_1-z_0| = R$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.



zB: • Konv.
* Div

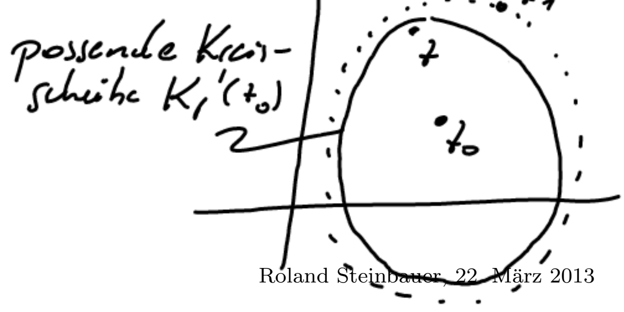
(iv) (Stetigkeit der Grenzfkt)

alle z's die näher bei z_0 sind als z_1

Wegen (ii) können wir auf $B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ die Grenzfkt

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

definieren. Diese ist stetig, denn jedes $z \in B_r(z_0)$ liegt in einem abg. Kreis $K_{r'}(z_0)$ ($r' < R$) und dort ist die Konv. ja glm [2.5(i)]. Da die Folgenglieder Polynome [vgl. 2.4(i)] und daher stetig [[2] 1.18, „Baukasten"] sind liefert 1.11 die Stetigkeit von f.



Beweis [Eigentlich nicht zu kompliziert, Anwendung des Konvergenzsatzes von Weierstraß]

(i) Wir setzen $f_n(z) = c_n(z-z_0)^n$ $(n \in \mathbb{N}, z \in K_r(z_0))$.
Dann gilt

$$(*) \quad |f_n(z)| = |c_n||z-z_0|^n = |c_n||z_1-z_0|^n \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n$$

Trick

und $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} \le \frac{r}{|z_1-z_0|} =: \Theta < 1$ [THETA]

weil lt. Voraussetzung $r < |z_1 - z_0|$

Lt. Voraussetzung konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1-z_0)^n$

$$\underset{\text{„Doof-Test"}}{\overset{[1]\,4.5}{\Longrightarrow}} c_n(z_1-z_0)^n \to 0 \Longrightarrow \exists M: |c_n||z_1-z_0|^n < M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

$$\underset{(**)}{\overset{(*)}{\Longrightarrow}} |f_n(z)| \le M\Theta^n \quad \forall z \in K_r(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \|f_n\|_{\infty, K_r(z_0)} = \sup_{z \in K_r(z_0)} |f_n(z)| \le M\Theta^n$$

$$\overset{[1]\,4.19}{\Longrightarrow} \sum \|f_n\|_{\infty, K_r(z_0)} \text{ konvergent}$$

geom. Reihe ist konv. Majorante

$$\underset{\text{Weierstraß}}{\overset{1.17}{\Longrightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert auf } K_r(z_0)$$

$\underbrace{\text{absolut \& glm}}$

(ii) [Genau ähnlich zu (i)]